

〈論 文〉

# 부분구조 합성법을 이용한 비선형 결합부 구조물의 동적 해석

李 信 永\*·李 長 茂\*\*

(1989년 9월 29일 접수)

## Dynamic Analysis of Structures with Nonlinear Joints by Using Substructure Synthesis Method

Sin Young Lee and Jang Moo Lee

**Key Words :** Substructure(부분계), Substructure Synthesis Method(부분구조 합성법), Non-linear Joint(비선형 결합부), Transformation Matrix(변환행렬), Describing Function(기술함수), Frequency Response(주파수 응답)

### Abstract

In this study, in order to perform dynamic design of machine tools reasonably and effectively, a method was formulated to be applicable to the damped structures connected by joints having elasticity and damping by using substructure synthesis method. And a nonlinear solution method was proposed and it formulates the nonlinear parts by describing functions and uses the reducing transformation matrix by the substructure synthesis method. The results of frequency response analysis of a machine tool, where an NC lathe was partitioned by three parts of spindle, housing and bed-base part and the nonlinearity of bearing parts between spindle and housing was modelled, showed force dependency of the response.

### 1. 서 론

공작기계와 같이 복잡한 구조물의 動的 加振에 대한 응답해석은 보통 그 구조물의 진동실험 또는 유한요소 해석에 의하여 수행된다. 구조물이 복잡해지면 유한요소모델은 매우 많은 자유도를 갖게 되므로 이 경우의 固有值 해석은 컴퓨터의 능력을 넘어서거나 많은 시간을 필요로 한다. 또한 복잡한 구조는 독립적으로 설계되고 제작되는 여러 개의 部分構造로 이루어진 것으로 간주할 수 있다. 그러므로, 유한요소 모델의 자유도 수를 줄일 수 있고, 부분구조의 설계와 해석에 독립성을 줄 수 있는 동적 구조해석 및 설계방법이 개발되는 것이 바람직

하다. 부분구조 합성법은 구조물을 몇 개의 부분구조로 나누고 해석한 후, 그것들을 합성하여 전체계의 운동방정식을 작성하고 풀어서 全體 系의 고유진동수, 고유 모드와 응답의 진폭 등을 계산한다<sup>(1~5)</sup>.

한편 실제 기계의 구조물에 존재하는 결합부는 엄밀히는 비선형을 가지고 있고, 감쇠와 응답의 加振力 의존성 등에 대해서 선형해석으로는 대응되지 않는다. 현재 사용되고 있는 다자유도 비선형계의 응답해석법으로는 미분방정식의 직접적분법에 의한 시간이력 응답해석이 있다. 이 방법은 시간영역의 해석이기 때문에 주파수 응답해석을 하기에는 많은 계산시간을 필요로 한다. 이러한 관점에서, 기본주파수 성분에 주목하여 비선형 요소를 기술함수(describing function)<sup>(6)</sup>로 치환하는 것에 의하여 준선형화하고<sup>(7)</sup> 수치계산에 의하여 해석하는 방법

\*정회원, 군산대학 생산기계공학과

\*\*정회원, 서울대학교 공과대학 기계설계학과

을 사용하면 효과적이다.

본 논문에서는 부분구조 합성법과 기술함수법을 결합하여 비선형 결합부를 갖는 구조물의 동적해석 방법을 제시하고 공작기계의 주파수 응답해석에 대하여 적용한다.

2. 감쇠를 고려하는 부분구조 합성법

공작기계는 베드와 같은 지지부, 주축대와 같은 연결부, 주축과 같은 작동부 등의 주요 3부분으로 모델링하는 것이 적당하므로, 실제 문제에 대한 적용성을 높이기 위하여 Fig. 1과 같이 3부분계로 된 시스템에 대하여 해석한다.

부분계 1의 운동방정식은

$$\begin{bmatrix} M_a^1 & M_{ac}^1 \\ M_{ca}^1 & M_c^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_a^1 \\ \dot{x}_c^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_a^1 & C_{ac}^1 \\ C_{ca}^1 & C_c^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_a^1 \\ x_c^1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_a^1 & K_{ac}^1 \\ K_{ca}^1 & K_c^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_a^1 \\ x_c^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_a^1 \\ f_c^1 + f_c \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기에서  $\{x_a^1\}$ 은 부분계 1의 내부영역의 변위이고  $\{x_c^1\}$ 은 부분계 1의 결합부 영역의 변위이다.  $\{f_a^1\}$ 은 부분계 1의 내부영역에 작용하는 외력을 나타내고  $\{f_c^1\}$ 은 부분계 1과 결합부 c간의 내력이며  $\{f_c\}$ 는 결합부 c에 작용하는 외력이다. 또한 결합부 c에 대한 결합부 조건식은

$$\begin{bmatrix} C_c^{1j} & C_c^{12j} \\ C_c^{21j} & C_c^{2j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_c^1 \\ \dot{x}_c^2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_c^{1j} & K_c^{12j} \\ K_c^{21j} & K_c^{2j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_c^1 \\ x_c^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f_c^1 \\ -f_c^2 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

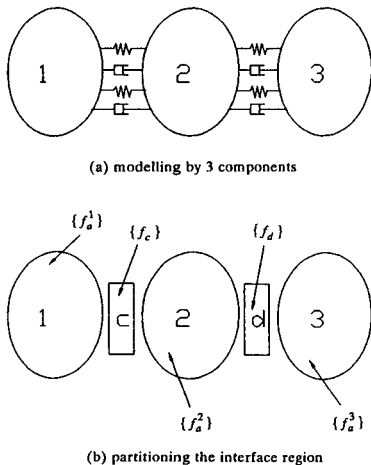


Fig. 1 System composed of 3 components with non-proportional damping

여기에서 상첨자 1은 부분계 1, 상첨자 2는 부분계 2를 나타낸다.

전체 계의 운동방정식은 각 부분계의 운동방정식과 결합부 조건식을 연립하면 다음 식과 같이 된다.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (3)$$

여기에서

$$\{x\}^T = [x_a^1 \ x_c^1 \ x_a^2 \ x_c^2 \ x_a^3 \ x_c^3 \ x_a^3] \quad (4)$$

식 (1)에서 부분계 1의 결합부 고정 모우드를  $[\phi_a^1]$ 이라고 하면 부분계 1의 결합부 고정 모우드에 의한 변위  $\{x_a^1\}$ '는

$$\{x_a^1\}' = [\phi_a^1]\{u_1\} \quad (5)$$

부분계 1의 구속 모우드에 의한 변위  $\{x_a^1\}$ '는

$$\{x_a^1\}'' = -[K_a^1]^{-1}[K_{ac}^1]\{x_c^1\} = [T_c^1]\{x_c^1\} \quad (6)$$

내부 영역  $\{x_a^1\}$ 의 변위는 결합부고정 모우드와 구속모우드 집합의 조합에 의하여 표시될 수 있고<sup>(1,5)</sup>

$$\{x^1\} = \begin{Bmatrix} x_a^1 \\ x_c^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_a^1 & T_c^1 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ x_c^1 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

부분계 2,3에 대해서도 같은 방법으로 변환하여 연립하면

$$\begin{Bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_a^1 & T_c^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_a^2 & T_c^2 & T_a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_a^3 & T_a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ x_c^1 \\ u_2 \\ x_c^2 \\ x_a^2 \\ u_3 \\ x_a^3 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

식 (8)에서 변환되는 변위의 벡터 차원은 채용되는 각 부분계의 결합부 고정 모우드 수들과 결합부 영역의 물리좌표 영역의 자유도의 합이 되므로 전체 계의 자유도를 축소하기 위하여 결합부 영역의 좌표를 좌표변환시킨다<sup>(6,8)</sup>. 각 부분계의 운동 방정식에 Guyan의 정축소<sup>(8)</sup>를 적용하고 결합부 영역으로 축소된 행렬들을 합성한다. 이 결합부 영역에 관한 고유치 문제를 작성하고 풀어서 구한 고유모우드로 결합영역의 좌표변환을 행하면 식 (9)와 같이 된다.

$$\begin{Bmatrix} x_c^1 \\ x_c^2 \\ x_a^2 \\ x_c^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_c^1 \\ \phi_c^2 \\ \phi_a^2 \\ \phi_c^3 \end{bmatrix} \{\nu\} \quad (9)$$

식 (9)를 식 (8)에 대입하여 정리하면

$$\begin{Bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_a^1 & 0 & 0 & T_c^1 \phi_c^1 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_c^1 \\ 0 & \phi_a^2 & 0 & T_c^2 \phi_c^2 + T_a^2 \phi_a^2 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_c^2 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_a^2 \\ 0 & 0 & \phi_a^3 & T_a^3 \phi_a^3 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_a^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \nu \end{Bmatrix} = [T_y] \{y\} \quad (10)$$

여기에서

$$\{y\}^T = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \nu] \quad (11)$$

식 (10)을 식 (3)에 대입하고 앞에서  $[T_y]^T$ 를 곱하면 운동방정식은 축소변환되어 식 (12)와 같이 된다.

$$[\hat{M}]\{\dot{y}\} + [\hat{C}]\{y\} + [\hat{K}]\{y\} = \{f\} \quad (12)$$

여기에서

$$\begin{aligned} [\hat{M}] &= [T_y]^T [M] [T_y], \\ [\hat{C}] &= [T_y]^T [C] [T_y], \\ [\hat{K}] &= [T_y]^T [K] [T_y] \end{aligned} \quad (13)$$

### 3. 비선형계의 주파수 응답해석

비선형계의 정현파가진에 의한 운동방정식은 식 (14)와 같다.

$$m\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = F e^{j\omega t} \quad (14)$$

식 (14)의 응답은 식 (15)와 같이 고차의 조화 모드들을 포함하는 급수로 표시될 수 있고 비선형계에 생기는 복원력은 식 (16)과 같다.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{jn\omega t} \quad (15)$$

$$f(x, \dot{x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n g_n e^{jn\omega t} \quad (16)$$

$g_n$ 는 기본파와 조화과성분에 대하여 복소수로 표시되는 이득이다. 기본파의 응답에 주목하면, 기본파의 성분이 출력에 가장 크게 기여를 하고 고주파 성분은 다른 선형부분에 의하여 누진적으로 감소되므로 계의 작동특성에 미치는 효과가 적어서, 기본파에 관한 항  $g_1$ 만을 채용하여 이것을 기술함수라 하고, 이것에 의하여 해를 구해도 좋은 근사치를 준다<sup>(6)</sup>. 이 방법은 간단하면서도 적용범위가 넓기 때문에 비선형효과를 조사하는데 아주 유용한 기법이다<sup>(6,7)</sup>. 비선형 요소에의 입력과 출력이 Fig. 2와 같이 표시된 것과 같은 강성특성을 갖는 경우에 대하여 기술함수를 구하면 다음과 같다. 조건식은

$$y = \begin{cases} k_2 x + (k_1 - k_2) D & x > D \\ k_1 x & 0 \leq x \leq D \end{cases} \quad (17)$$

보통, 비선형성은 정현파의 입력에 대하여 출력

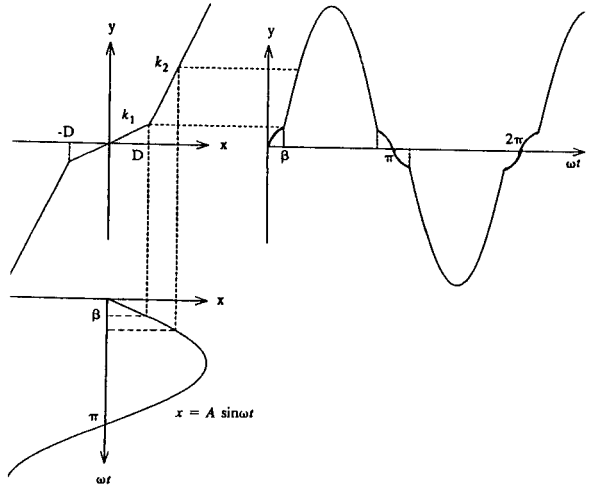


Fig. 2 Characteristics of a nonlinear elements

이 주기  $2\pi$ 의 기함수이고, Fig. 2의 요소에 대한 Fourier 급수 제 1 항의 계수  $B_1$ 으로부터 기술함수  $G_N$ 은 다음과 같이 된다.

$$G_N = \frac{B_1}{A} = k_2 + \frac{2}{\pi} (k_1 - k_2) \{ \sin^{-1}(u) + u(1 - u^2)^{0.5} \} \quad (18)$$

공작기계와 같이 결합부의 자유도가 큰 구조물에 있어서 선형부분구조가 비선형 결합조건에 의하여 결합된 경우에 대하여 수식화하면 다음과 같다. 비선형 강성을 부가적으로 고려한 전체 구조물의 운동방정식을 작성하면 식 (19)와 같다.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K_L]\{x\} + [K_{NL}]\{x\} = \{F\} \quad (19)$$

단,  $[K_L]$ : 선형 강성행렬

$[K_{NL}]$ : 비선형 강성행렬

부분구조 합성법을 사용하면, 식 (10)의 변환행렬  $[T_y]$ 에 의하여 전체 계의 운동방정식을 축소변환할 수 있다.

$$[\hat{M}]\{\dot{z}\} + [\hat{C}]\{z\} + [\hat{K}_L]\{z\} + [\hat{K}_{NL}]\{z\} = [T_y]^T \{F\} \quad (20)$$

여기에서,  $[\hat{M}] = [T_y]^T [M] [T_y]$

$[\hat{K}_L] = [T_y]^T [K_L] [T_y], \dots$

$[K_{NL}]$ 을 구성하는 개개의 요소를 기술함수로 치환하여 준선형화하여 이것을  $[K_{GN}]$ 이라 놓고 해를 구한다.

$$\{z\} = \{V\} e^{j\omega t} \quad (21)$$

$$\{F\} = \{P\} e^{j\omega t}$$

이라고 놓으면 식 (20)은

$$[[\hat{K}_{GN}] + [\hat{K}_L] - \omega^2 [\hat{M}] + j\omega [\hat{C}]]$$

$$\{V\} = [T_y]^T \{P\} \quad (22)$$

여기에서

$$[\hat{K}_{GN}] = [T_y]^T [K_{GN}] [T_y] \quad (23)$$

비선형부의 강성특성 및 감쇠특성의 초기 추정값을 입력하고 이들 데이터를 기본으로 하여, 주어진 주파수에 대하여 비선형부의 초기변위를 계산하고 이 변위로부터 강성값을 결정한다. 반복계산에 의하여 수렴하는 값을 구하고 주어진 주파수에서의 전달함수를 결정하며, 다음의 주파수에 대해서도 같은 방법으로 전달함수를 결정한다.

#### 4. 공작기계의 주파수 응답해석

공작기계의 구조물에 대하여 주파수 응답해석을 행하였다. 주축을 하나의 부분계로 보고 주축대를 제 2의 부분계로, 베드와 베이스의 부분을 제 3의 부분구조계로 보며 베어링 결합부를 비선형으로 모델링하였다. Fig. 3은 주축 부분계의 모델링된 형태를 나타내고 Fig. 4는 주축대와 베드-베이스 계의 모델을 나타낸다. 주축 베어링 중 앞 베어링은 앵글러 접촉 볼 베어링 7016 CTDB이고 뒤의 베어링은 로울러 베어링 NN 3014 K이다. 베어링 강성은 한 점에 집중된다고 가정하였고, 각 베어링은 4



Fig. 3 Modelling of main spindle part

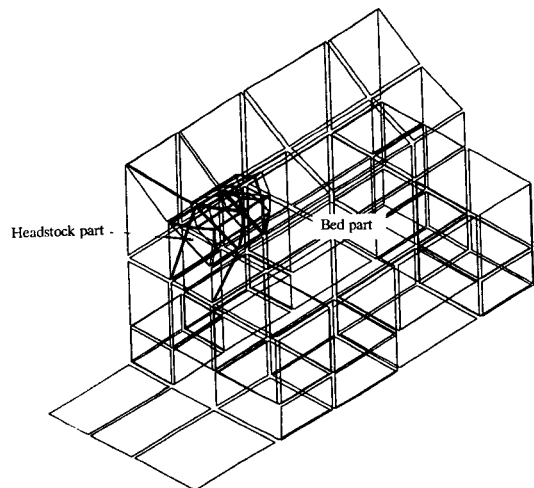


Fig. 4 Modelling of headstock and bed parts

개의 질량이 없는 트러스 요소로 모델링하였다. 주축은 보요소로 모델링하였고 주축에 조립된 단품은 집중질량으로 고려하였다. 주축대와 베드-베이스는 관요소와 집중질량으로 모델링하였다. 모터 부위와 심압대 부위는 전체의 동적 특성에 큰 영향을 미치지 않는다고 보고 모델링에서 제외하였다. 베드-베이스의 요소수는 119개, 절점수는 81개이었으며, 주축대계의 요소수는 56개, 절점수는 52개이었다. 각각의 부분계를 해석한 결과의 고유진동수는 Table 1과 같다. 계산에 사용한 주축 베어링계(주축과 주축대 간의 결합부)의 강성특성은 Fig. 2와 같은 형상을 갖는다고 하였고 그 비선형 계수, 감쇠, 변곡점은 Table 2와 같다.

결합된 전체 계에 대하여 계에 작용하는 하중을 달리하여 비선형 해석을 하였다. 작용하중은 1960 N(200kgf), 196 N(20kgf)과 19600 N(2000kgf)의 세 가지로 하여 주축과 결합된 공작물 끝에서의 컴플라이언스(compliance)를 계산하였다. 작용하중에 따른 전체 계의 컴플라이언스는 Fig. 5~Fig. 8과 같다. 여기에 나타난 컴플라이언스는 공작물의 끝을 가진한 경우의 가진점에서의 변위를 작용하중으로 나눈 것이다.

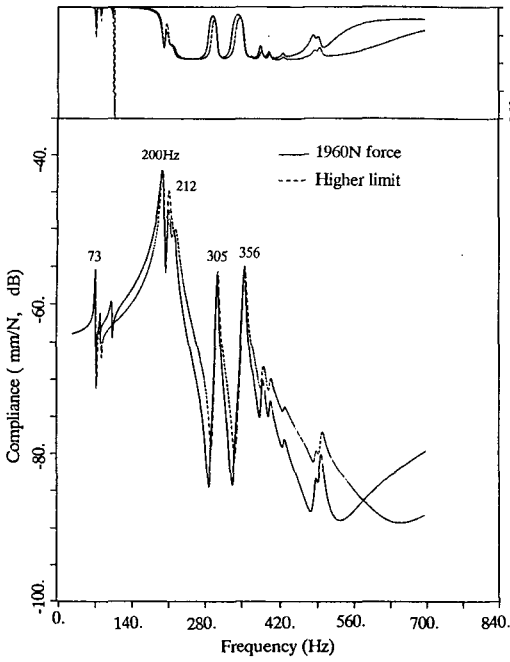
Fig. 5는 작용하중이 1960 N인 경우의 컴플라이언스를 나타낸다. 첫 피크를 갖는 진동수 73Hz는 주축계 좌측의 실린더 부근에 변위가 크게 나타나

Table 1 Natural frequencies of substructures with fixed interface(Hz)

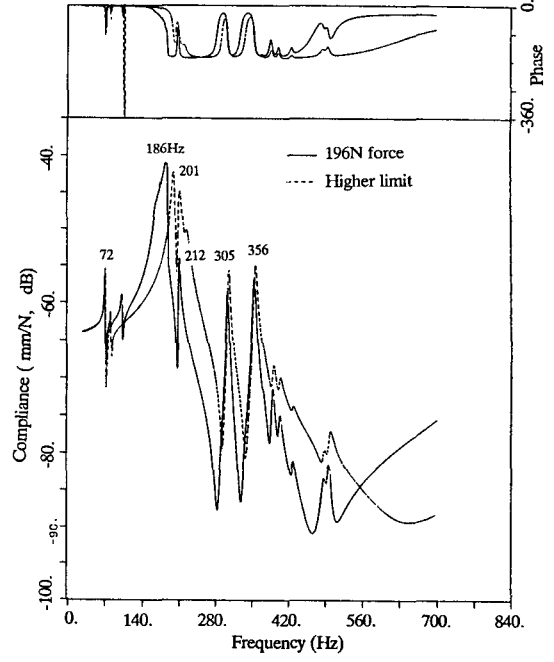
Mode	Spindle	Headstock	Bed-base
1st	87.5	2425.	209.6
2nd	87.9	2694.	247.7
3rd	265.0	3111.	372.9
4th	273.0	3361.	400.6
5th	1237.	3523.	423.7

Table 2 Parameters of bearing parts

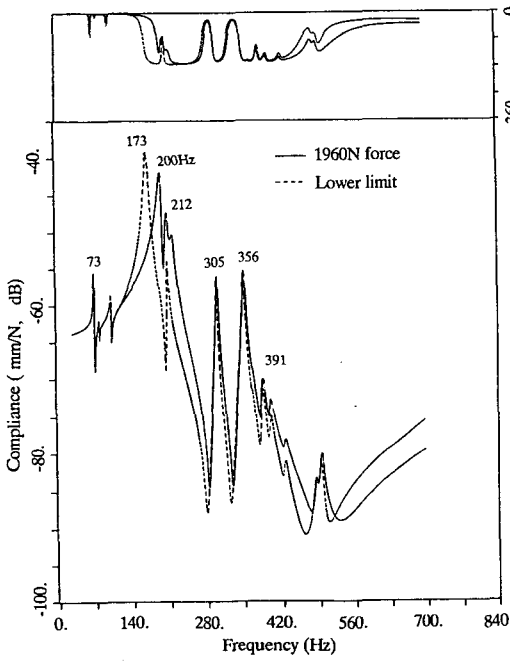
Item	Front bearing	Rear bearing	Unit
Stiffness	k1=7.8×10 <sup>4</sup> k2=1.77×10 <sup>5</sup>	k1=4.9×10 <sup>5</sup> k2=1.96×10 <sup>6</sup>	N/mm
Damping	24.5	19.6	N·S/mm
Transition point	D=0.01	D=0.01	mm



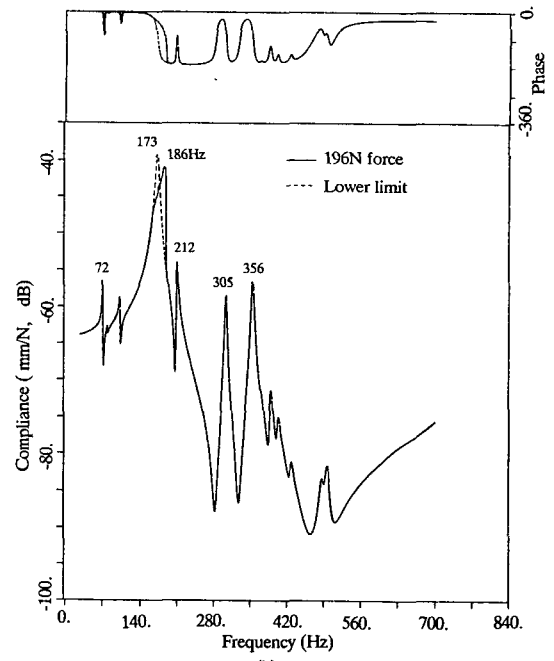
(a)



(a)



(b)



(b)

Fig. 5 Compliance of total system with 1960N

Fig. 6 Compliance of total system with 196N

는 모우드의 고유 진동수이고 두번째 피크를 갖는 진동수 200Hz는 주축계 우측의 공작물 부분의 변위가 크게 나타나는 모우드의 고유 진동수이다. 세 번째의 진동수 212Hz는 두번째의 진동모우드와 유

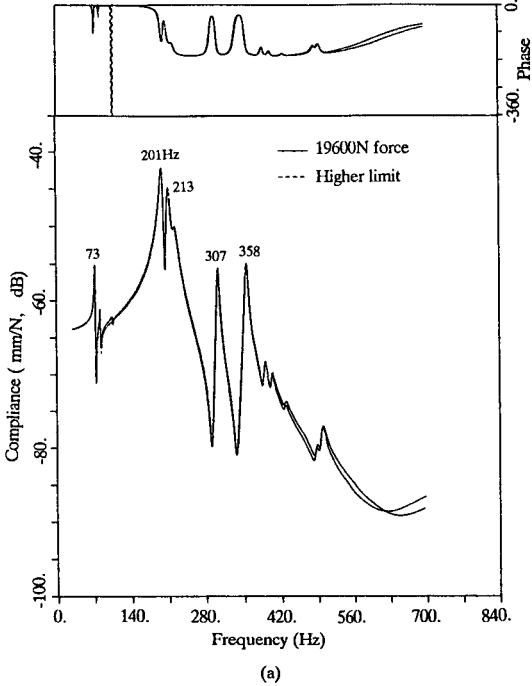
사한 형상을 갖는다. 선형 해석의 경우와 비교하면 강성이 상한치인 경우와는 고유진동수가 0.5% 이내로 잘 일치하였고, 강성이 하한치인 경우와는 주축계 좌측의 변위가 주로 나타나는 73Hz에서는

1.4%의 작은 차이가 있고 주축계 우측의 변위가 큰 200Hz에서는 13.5%이었다. 대체로 피크치에서 강성이 상한치를 갖는 경우에 근접하였으며 컴플라

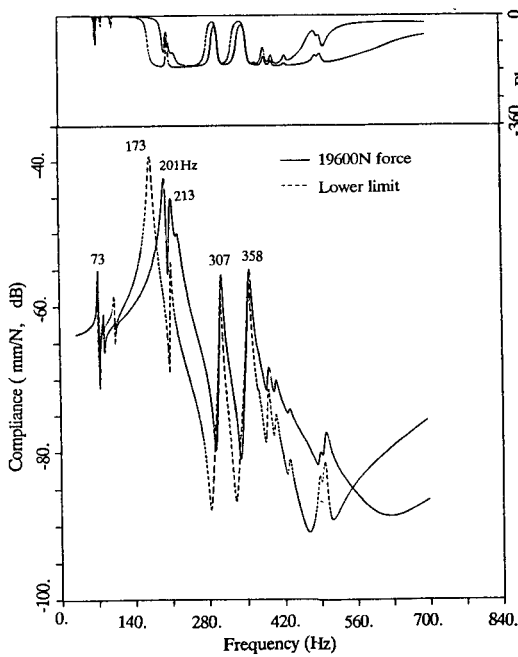
이언스가 작은 주파수에서는 강성이 하한치를 갖는 경우와 근사함을 알 수 있다.

Fig. 6은 작용하중이 작은 196 N인 경우의 컴플라이언스를 나타낸다. 186Hz 피크 근방의 주파수 영역을 제외하고는 변위가 변곡점 이하에 위치하였으며 따라서 전체적인 컴플라이언스의 형상은 강성이 하한치를 갖는 선형의 경우와 근접한다. 단지가장 큰 피크인 186Hz 근방에서는 강성이 하한치인 경우와 상이한 형상을 나타내었고, 강성이 하한치인 경우와의 고유진동수 오차는 7%이었다.

Fig. 7은 작용하중이 19600 N인 경우의 컴플라이언스를 표시한 것이다. 컴플라이언스가 작은 일부의 주파수 영역을 제외하고는 변위가 변곡점 이상에 위치하였으며 따라서 전체적인 컴플라이언스의 형상은 강성이 상한치를 갖는 선형의 경우와 근사한 값을 갖는다. Fig. 8은 작용하중이 196 N인 경우의 컴플라이언스와 작용하중이 1960 N인 경우의 컴플라이언스를 비교한 것이다. 컴플라이언스가 작용하중에 따라서 민감하게 반응하는 주파수 영역과 거의 반응하지 않는 주파수 영역이 존재함을 알 수 있다. 두 경우에서의 고유진동수는 하중이 196 N에서 1960 N으로 증가함에 따라서 73Hz 피크에서



(a)



(b)

Fig. 7 Compliance of total system with 19600N

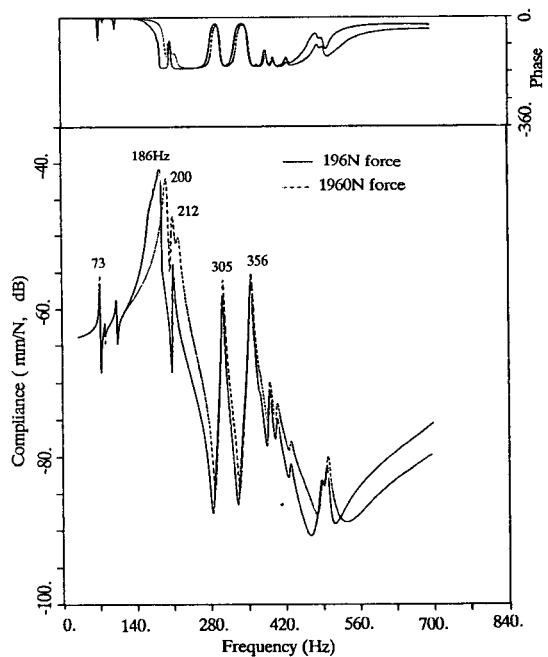


Fig. 8 Comparison of compliances with different force levels

는 1.4%, 200Hz 피크에서는 7.5% 증가하였다.

이상의 결과를 종합하면, 같은 하중하에서의 강성이 선형인 경우와 강성이 비선형인 경우를 비교하면, 비선형에 기인하는 고유 모우드가 혼합되는 양상을 나타내었고, 컴플라이언스가 큰 경우에는 강성이 상한치인 해석결과에 접근하고 컴플라이언스가 작은 경우에는 강성이 하한치인 결과에 접근하는 경향을 나타내고 있다. 작용 하중이 다른 경우에는 하중이 증가할수록 고유진동수가 증가하였고, 하중이 작은 경우에는 전체적으로 강성이 하한치인 방향으로 근접하고 작용하중이 큰 경우에는 전체적으로 강성을 상한치로 해석한 것과 근사한 경향을 나타내었는데 대체로 비슷한 형상의 주파수 응답함수를 가졌다.

선형인 경우와 비선형인 경우를 검토하면, 강성이 비선형인 경우의 컴플라이언스는 강성이 상한치인 경우와 하한치인 경우의 사이에 오게 되므로 개략적인 해를 구하는 구조해석의 경우에는 강성을 선형으로 해석해도 좋지만, 공작기계의 경우와 같이 컴플라이언스가 극대인 경우와 극소인 경우의 거동 특성이 중요한 경우에는 이러한 비선형 특성을 고려하여 계산하는 것이 필요함을 알 수 있다.

## 5. 결 론

비선형 특성을 포함하는 구조물을 해석하기 위하여 비선형 결합부를 등가전달함수로 나타내고 부분 구조 합성법에 의한 축소변환 행렬을 사용하여 모달좌표계로 축소된 행렬을 가지고 비선형계를 해석하는 방법을 제시하였다.

공작기계를 주축계와 주축대계, 베드계로 나누어 베어링 결합부의 비선형성을 모델링하고 주파수 응

답을 구하였다. 같은 하중하에서 강성이 비선형인 해석의 결과를 선형인 경우와 비교하면, 비선형인 경우 컴플라이언스가 큰 경우에는 강성이 상한치인 해석 결과에 접근하고 작은 경우에는 강성이 하한치인 결과에 접근하는 경향을 나타내었다. 또한 하중이 증가하는 경우에는 고유진동수가 증가하였으며 공진점 부근의 컴플라이언스는 작아지는 것을 알 수 있다.

## 참 고 문 헌

- (1) Hurty, W.C., 1965, "Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes", AIAA J., Vol. 3, No. 4, pp. 678~685.
- (2) Craig Jr., R.R. and Bampton, M.C.C., 1968, "Coupling of Structures for Dynamic Analysis", AIAA J., Vol. 6, No. 7, pp. 1313~1319.
- (3) Benfield, W.A. and Hrudu, R.F., 1971, "Vibration Analysis of Structures by Component Mode Substitution", AIAA J., Vol. 9, No. 7, pp. 1255~1261.
- (4) Nagamatsu, A. and Ookuma, M., 1982, "Analysis of Vibration by Component Mode Synthesis(Part 2)", Bulletin JSME, Vol. 25, pp. 1093~1099.
- (5) Goldman, R.L., 1969, "Vibration Analysis by Dynamic Partitioning", AIAA J., Vol. 7, No. 6, pp. 1152~1154.
- (6) Raven, F.H., 1978, Automatic Control Engineering, McGraw-Hill Book Co. pp. 485~490.
- (7) Watanebe, K. and Sato, H., 1988, "Development of Nonlinear Building Block Approach", J. of Vib., Acoustics, Stress and Reliability in Design, Trans. ASME, Vol. 110, pp. 36~41.
- (8) Gyan, R.J., 1965, "Reduction of Stiffness and Mass Matrices", AIAA J., Vol. 3, p. 380.