

## Cubic Spline에 의한 Munsell Color Space Data Point의 확장 및 Smoothing

이종문 · 김용구\* · 류운영\*\* · 김진우\*\*\*

전북대학교 섬유공학과  
\*미국 S.M.U. 섬유공학과  
\*\*경희대학교 섬유공학과  
\*\*\*한양대학교 섬유공학과  
(1990. 8. 23 접수)

## Extension of Data Points and Smoothing of Munsell Color Space by Cubic Spline

John M. Rhee, Yong Ku Kim\*, Woon Young Ryu\*\*, and Jin Woo Kim\*\*\*

*Department of Textile Eng. Chonbuk National Univ. Chonju 560-765, Korea*

*\*Textile Science Department Southeastern Mass. Univ. U.S.A.*

*\*\*Department of Textile Eng. Kyung Hee Univ., Seoul Korea*

*\*\*\*Department of Textile Eng. Hanyang Univ., Seoul, Korea*

(Received August 23, 1990)

**Abstract**-An extension method of data points of Munsell color space is described. A cubic spline method is used for this extension and the charts made by the use of these points are recommended for general use in the textile industry in determining the Munsell notation (H,V,C) of a given color sample when the CIE specification (Y,x,y) is known. These data points are used for the analysis of the H-C plane of Munsell color space.

### 1. 서 론

Munsell 색채공간의 데이터점의 확장은, A.E.O. Munsell<sup>1,2)</sup> 등이 "Munsell Book of Color"의 명도 공간간격(value spacing)에 대한 분석과 이로부터 얻은 "Munsell-Sloan-Godlove data"로부터 시작한 것이다. 그 후 Hardy 등에 의해서 자동기록 분광 광도계가 만들어지고, 이를 이용해서, Glenn<sup>3)</sup> 등이 "Glenn-Killian data"를 내놓음으로써 Munsell 색채공간(1929년판)의 불균일성이 밝혀지게 됐으며, Kelly 등<sup>4)</sup>이 x, y 도해상에 이들 데이터를 프롯트 함으로써, 그 불균일성의 근본을 해결하려는 시도가 일기 시작했었다. 1940년 Newhall을 위원장으로 하는 O.S.A. 위원회의 Munsell 색채공간의 smoothing과 데이터 점들의 확장으로 3,000여 데이터 점들이 만들어지게 되었고<sup>5,6)</sup> 1956년 Judd-Wyszecki의<sup>7)</sup> 어두운 색(Munsell 명도 0.2까지)까지의

확장과, Schlerer 등<sup>8)</sup>에 의해서 "MacAdam's maximum visual limit"<sup>9)</sup>밖의 공간까지 데이터점이 확장됨에 따라 그 수가 5,000점 이상에 달하게 되었다.

그럼에도 불구하고 전산기에 의해서 Munsell 색채공간을 데이터 점들로부터, 수학적으로 해석하기 위해서는 그 수를 더욱 확장하지 않으면 안되었다.<sup>10)</sup>

<sup>11)</sup> 데이터 점들의 확장방법에는 도해에 의한 외삽(extrapolation) 및 보간(intrapolation)법과 Adams-Nickerson의 확장법, Newhall<sup>5)</sup>의 방법 등이 있겠으나 이들 모든 방법들이, 모두 physical spline에 의한 smoothing 법에 의존함으로써<sup>5,6,12)</sup> 그것에 의한 보간값들은 불확정적이고, 부정확하기 때문에, 수학적 spline 함수가 실용단계에 이르고 있는 현재,<sup>13)</sup> 보다 확정적이고, 정확한 cubic spline 보간값을 색채공간의 smoothing 및 데이터 점 확장에 사용하는 것은 당연하다고 본다.

현대의 spline법은 1946년 Schoenberg에 의해서,

비롯되었는데, Schoenberg의 spline 이론과 밀접한 관계가 있는 보이론(beam theory)에 대해서는 Sokolnikoff(1956)가 간단명료하게 그의 저서에서 설명하고 있다. Schoenberg와 Whitney는 어떤 spline 보간값의 존재에 관한 기준을 얻게 되었으며, 또한, Ahlberg, Nilson, Walsh 등에 의한 연구로, spline 이론의 일반화라는 국면에 이르렀는데, 그들은 Holladay(1957)의 mesh에 대한 함수  $f(x)$ 에, cubic spline 보간법을 위해서 얻어진, 기본적인식을 적용하고 있다.<sup>17)</sup> 또한 근자에 Henrici 등<sup>13,18)</sup>은 cubic spline을 소형계산기로도 계산할 수 있는 방법을 제의함으로써, 이 수치해석 방법의 여러 공업에의 응용은, 보다 활발해질 것으로 본다.

Table 1은 Munsell 색채공간의 확장과 smoothing에 대한 발전과정을 역사적으로 정리해 놓은 것이다.

## 2. Cubic Spline 이론

만일 어떤 함수가 스무우드(smooth)하고, 보간점(interpolating point)들을 자유롭게 선택할 수 있다면, Chebyshev point에서의 보간(interpolation)으로, 보다 정확하고 안정하게 접근할 수 있는 다

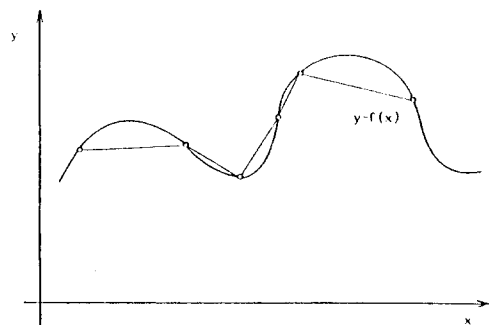
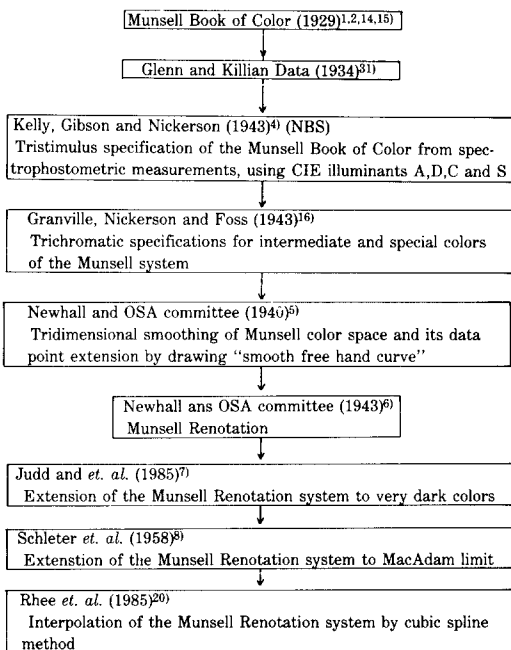
항식을 얻을 수 있다. 그러나 approximate될 함수에 대한 보간점들(interpolating point)을 항상 자유롭게 선택한다는 것은 불가능하다. 특히 실험의 측정 결과에서 자주보는 바와 같이 함수가 수표의 형으로 주어진다든가, 실험으로부터 얻어진 것일 경우, 보간점들의 선택은 더욱 어려워진다.

Global interpolation(한개의 보간 다항식<interpolating polynomial>에 의한 보간)을 사용할 때는, 잠정적으로 함수의 조건이 좋지 않거나(ill-conditioning) 수치불안정(numerical instability)이 내재하기 때문에, 보간점(interpolating point)들의 분포와 꼭 관련을 갖지 않으면 안된다.

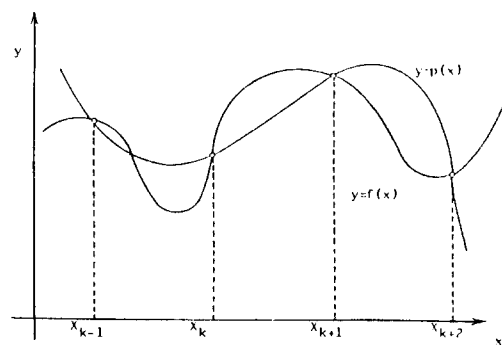
이런 문제를 해결하기 위해서 나타난 것이 낮은 차수를 이용한 piecewise interpolating polyomial이었다. 이 방법은 1950년대에 널리 사용됐던 방법으로, 예를 들면 Fig. 2에서와 같이 4점의 보간점(intt-erpolation polynomial)에 의한 구간( $x_k, x_{k+1}$ )에서의 보간법을 들 수 있다.

이런 종류의 보간법은 만약 interpolation step이

**Table 1. The extension and smoothing of Munsell color space**



**Fig. 1. Piecewise linear interpolation.**



**Fig. 2. Piecewise cubic interpolation.**

충분히 작고 보간될 함수  $f$ 가 충분히 수무우드하다면, 상당히 만족한 결과를 줄 것이다.

그러나 이 Piecewise interpolation은, Munsell 데이터와 같이 실험적인 값들로 주어져서 함수  $f$ 의 원활성(smoothness)에 대해서는 전혀 정보가 없는 경우 의심스러운 결과를 조래한다. 또한 각 subinterval에 사용되어진 보간 다항식의 차수가 아무리 높다 할지라도, 그렇게 만들어진 global interpolant의 일차 미분치는  $x_i$  점에서 불연속점을 갖게 될 것이다. 그럼으로써 global interpolant의 곡선그림은 항상 보통이(corners)를 갖게 되어 어떤 문제에 대한 이론적인 해석이라든가 graphic design 같은 산업에의 응용에는 받아들일 수 없는 상황이 되는 경우가 발생하게 된다.

이런 여러 가지 문제를 해결하려는 수학적인 새로운 방법이 cubic spline 보간법이다. 이 방법은 고전적인 종래의 보간함수(interpolation function)를 찾는 방법보다, 좀 더한 계산상의 어려움이 수반되기는 하나, 그것의 numerical stability, 그리고 조건이 좋은 함수계(well-conditioning)를 갖기 때문에, 이 spline 보간법의 기술은 근래에 널리 사용되기에 이르렀다.

Cubic spline 보간법은 과거의 가장 바람직한 global interpolation 함수가 가져야 할 가정을 만족하는 한개의 함수  $g$ 가 존재한다는 가정하에서 출발하고 있다.

어떤 임의의 폐구간  $[a, b]$ 에서 일련의 보간점일(interpolating points)  $\{x_i\} (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 가 이 구간내에 순서대로 존재한다고 가정한다. 이 때 양 끝점도 보간점에 속한다.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \quad (1)$$

함수  $g$ 에 의해서, 주어진 함수  $f$ 에 접근시키려할 때, 다음의 조건을 만족시키면, 함수  $g$ 는 가장 만족한 global interpolating function이 될 것이다.

1) 모든 보간점(interpolating point)에서  $g$ 는  $f$ 를 보간한다.

$$g(x) = f, \quad i=0, 1, \dots, n \quad (2)$$

2)  $g$ 와 그것의 일차 미분치  $g'$ 는 전체구간  $[a, b]$ 에서 연속이다. 이 조건은  $g$ 의 곡선그림이 "corners"를 갖지 않음을 의미한다.

3)  $g$ 의 일차미분치 이상은 각 subinterval  $(x_i, x_{i+1}) (i=0, 1, 2, \dots, n-1)$ 에서 연속적이고, 각 subinterval에서 한쪽만의 limit를 갖는다. 그러나  $x$ 가  $x_i$ 에 접근할 때, 왼쪽으로부터 접근할 때와 오른쪽부터 접근할 때 limit가 같을 필요는 없다.

$$4) J(g) := \int_a^b (g''(x))^2 dx \quad (3)$$

로 정의되는 함수는 조건 1), 2), 3)을 만족하는 모든 함수 중에서 가장 작은 가능한 값을 갖는다.

이 조건은 보간함수  $g$ 가 가능한한 수무우드해야 한다는 요구 조건을 받게하고 있는 것이 된다.

2차 미분은 곡선의 곡률(curvature)의 척도로써 식 (3)의  $J$ 를 적게 한다는 것은 곡선의 전체곡률(total curvature)을 가능한한 작게해 준다는 의미와 같게 된다. 이 원리는 physical spline을 얇은 탄성보(elastic beam)라고 생각할 때의 Eulers 공식에 유추해서 설명할 수 있다.

$$M(x) = EI/R(x) \quad (4)$$

여기서

$M(x)$  : 굽힘 모우멘트(bending moment)

$E$  : 영계수(Young's modulus)

$I$  : 관성 모우멘트(moment of inertia)

$R(x)$  : 곡률 반경(radius of curvature)

작은 처짐(deflections)에 대해서 곡률반경  $R(x)$ 는  $1/g''$ 로 대신할 수 있으므로

$$g''(x) = \frac{M(x)}{EI} \quad (5)$$

각 데이터 점을 단순지점(simple support)으로 작용한다고 유추하면, 그 때  $M(x)$ 는 지점(support)들 사이의 선형함수(linear function)이다.

그래서

$$M(x) = A + Bx \quad (6)$$

으로 놓고 (6)식을 두번 적분하면 지점들 사이의 3차다항식(cubic polynomial)을 얻게 된다.

매개변수(parameter)를  $t$ 로한 한개의 cubic spline 소구간(segment)의 식은 다음과 같다.

$$P(t) = \sum_{i=1}^3 B_i t^{i-1}; \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (7)$$

여기서  $P(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ 로써, spline의

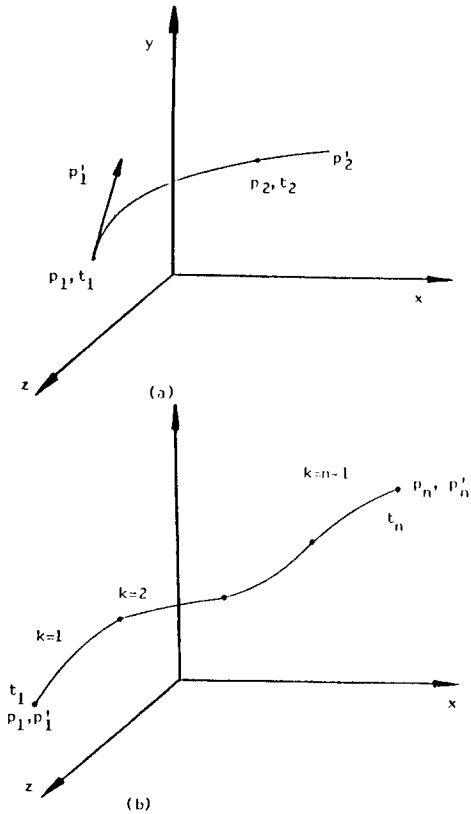


Fig. 3. Cubic spline.

임의의 점에 한 위치 벡터로 볼 수 있다(Fig. 3 참고).

(7)을 다시 쓰면

$$P(t) = B_1 + B_2t + B_3t^2 + B_4t^3 \quad (8)$$

와 같이 된다.

한 곡선소구간(curve segment)에서, 통해서 지나가는 주어진 점의 쌍을  $P_1, P_2$ 라 하면, 이들 주어진 점에서의 접선벡터(tangent vector)는 매개변수  $t$ 와 관련된 미분치인  $P'_1, P'_2$ 로 나타내어진다. 3차 소구간(cubic segment)내에서 매개변수  $t$ 는  $t_1$ 과  $t_2$ 인 두 끝점(end point) 사이에 존재하는 변수로 된다. 계산을 편리하게 하기 위해서  $t_1=0$ 로 놓을 수 있고, 각 3차 소구간에 대해 요구되는 경계조건(boundary condition)은, 두 끝점과 각 끝점에서의 접선벡터( $P'_1$  혹은  $P'_n$ )로 주어진다.

두 점에서  $t_1=0, t_2=t_2$ 의 조건으로  $P(0), P(t_2),$

$\frac{dP}{dt} \Big|_{t=0}, \frac{dP}{dt} \Big|_{t=t_2}$  을 구하고, 이렇게 구한 결과 식으로부터  $B_i$ 를 구한다. 다음  $B_i$ 를 (7)식에 대입하여 정리한 후, 두 점 사이의 공간곡선의 방정식을 임의의 인접하는 두 개의 3차 소구간  $P_k(t)$ 와  $P_{k-1}(t)$  ( $1 \leq k \leq n-2$ 이고 곡선이 지나가는데 이타점의 수)에 대해서 일반화하면

$$P_k(t) = P_k + P'_k t + \left[ \frac{3(P_{k+1} - P_k)}{t_2^2} - \frac{2P'_k}{t_2} - \frac{P'_{k+1}}{t_2} \right] t^2 + \left[ \frac{2(P_k - P_{k-1})}{t_2^3} + \frac{P'_k}{t_2^2} - \frac{P'_{k+1}}{t_2^2} \right] t^3 \quad (9)$$

$$P_{k-1}(t) = P_{k+1} + P'_{k+1} t + \left[ \frac{3(P_{k+2} - P_{k+1})}{t_3^2} - \frac{2P'_{k+1}}{t_3} - \frac{P'_{k+2}}{t_3} \right] t^2 + \left[ \frac{2(P_{k+1} - P_{k+2})}{t_3^3} + \frac{P'_{k+1}}{t_3^2} + \frac{P'_{k+2}}{t_3^2} \right] t^3 \quad (10)$$

으로 된다. 여기서 매개변수  $t$ 는 처음 소구간에 대해서는  $0 \leq t \leq t_2$ 이고 두번째 소구간에 대해서는  $0 \leq t \leq t_3$ , 세번째의 경우는  $0 \leq t \leq t_4 \dots$  등등으로 가정한다.

또 2차미분치  $P''(t)$ 가 연결점에서 연속이라는 조건하에서 (7)로부터, 처음 cubic spline 소구간 끝점( $t=t_2$ )과 둘째번 cubic spline 소구간의 시작점( $t=0$ ) 2차미분치를 같게 놓고 정리한 후,  $n$ 개의 데이터점에 대해서 일반화하면,

$$t_{k+2}P'_k + 2(t_{k+2} + t_{k+1})P'_{k+1} + t_{k+1}P'_{k+2} = \frac{3}{t_{k+1} t_{k+2}} [t_{k+1}^2(P_{k+2} - P_{k+1}) + t_{k+2}^2(P_{k+1} - P_k)], \quad 1 \leq k \leq n-2 \quad (11)$$

로 되는데, 이 식을 모든 소구간에 대해서 그에 상응하는 행렬(matrix) 방정식으로 쓰면 다음과 같다.

여기서 미지수  $P'_1, P'_2 \dots P'_n$ 는  $n$ 개이고 방정식은  $n-2$ 개임으로 끝점에서의 접선 벡터  $P'_1, P'_n$ 을 정해지면  $[P']$ 을 다음과 같이 역행렬(inverse matrix)에 의해서 구할 수 있다.

$$\begin{matrix}
 \begin{pmatrix} t^3 & 2(t_2+t_3) & t_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & t_4 & 2(t_3+t_4) & t_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & t_5 & 2(t_4+t_5) & t_4 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & t_6 & 2(t_5+t_6) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_7 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ \vdots \\ P'_n \end{pmatrix} \\
 (n-2) \times n & n \times 1 \\
 [\bar{M}] & [P']
 \end{matrix} = \begin{matrix}
 \begin{pmatrix} \bar{M}(2,1) & \bar{M}(2,2) & \vdots & \vdots & \vdots \\ & \bar{M}(3,2) & \bar{M}(3,3) & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \bar{M}(N-1,N-1) & \bar{M}(N-1,N) \end{pmatrix} \\
 \times \begin{pmatrix} P'(K,1) \\ P'(K,2) \\ \vdots \\ P'(K,N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(K,2) \\ B(K,3) \\ \vdots \\ B(K,N-1) \end{pmatrix} & (15)
 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{t_2 t_3} [t_2^2 (P_3 - P_2) + t_3^2 (P_2 - P_1)] \\ \frac{3}{t_3 t_4} [t_3^2 (P_4 - P_3) + t_4^2 (P_3 - P_2)] \\ \vdots \\ \frac{3}{t_{n-1} t_n} [t_{n-1}^2 (P_n - P_{n-1}) + t_n^2 (P_{n-1} - P_{n-2})] \end{pmatrix} \quad (12)$$

(n-2) × 1  
[B]

[M] [P'] = [B] (13)

[P'] = [B] [M]<sup>-1</sup> (14)

[P'] 값을 사용하여 일반식 (9) (10)과 관련시켜 (7)식에 B<sub>i</sub> 값을 대입하고 매개변수 t를 0 ≤ t ≤ t<sub>max</sub>의 조건으로 설정해 주면 각 spline 소구간의 방정식을 얻을 수 있게 된다.

이 때, t<sub>max</sub> 값, 즉, t<sub>2</sub>, t<sub>3</sub>...t<sub>n</sub>을 어떻게 결정하느냐에 따라 곡선의 원활도(smoothness)가 결정되는데, 한 가지 방법으로 연속적인 데이터 점들 사이의 현(chord)의 길이와 똑 같은 t<sub>max</sub>를 설정할 수도 있고, 1로 선택하여 매개변수를 표준화(normalization)하는 방법도 있다.

(13)식에서 정방행렬(square matrix)이 아닌 [M]의 열(row)에서 0이 아닌 항들은 M(J, J-1), M(J, J), M(J, J+1), (2 ≤ J ≤ n-1)이다. 그러므로 (13)식을 확장해서 표현하면,

[P']의 유일한 해를 구하기 위해서는 [M]에 양끝 소구간의 경계조건을 추가하여 정방 행렬로 만들어야 하는데, 경계조건을 정하는데 주로 쓰이는 방법들 들면 다음과 같다.

1) Clamped end condition(혹은 encastered sp-

line) : 이 방법은 양 끝 데이터 점에서의 접선벡터 P'<sub>1</sub>, P'<sub>n</sub>가 주어져 있을 경우이다.

2) Relaxed end condition : 경계조건으로 d<sup>2</sup>P/dt<sup>2</sup> = 0를 사용하는 방법.

3) Cyclic end condition : 이 방법은 폐곡선이나 주기를 갖는 곡선의 경우에 자주 사용되는 방법으로 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{matrix}
 P'_n(0) = P'_n(t_n) \\
 P''_n(0) = P''_n(t_n)
 \end{matrix} \quad (16)$$

즉 곡선의 시작점과 끝점에서의 기울기와 곡률이 같다고 보는 것이다.

4) Anticyclic end condition : 이 경우 경계조건은,

$$\begin{matrix}
 P'_i(0) = -P'_n(t_n) \\
 P''_i(0) = -P''_n(t_n)
 \end{matrix} \quad (17)$$

으로, cyclic end condition과 부호만 다르게 설정해 주는 방법이다.

### 3. Cubic Spline에 대한 Munsell H-C 평면의 해석

#### 3.1 해석방법

분석에 쓰인 cubic spline의 프로그램 "JOHN 3. FOR"은 Munsell 명도함수의 경우와 같이 2장에서 정의하고 있는 이론을 기본으로 하여 만들어진 IMSL routine name "ICSICU"와 "ICSEVU"을 이용하였다. "ICSICU"는 임의의 2차미분의 경계조건을 갖는 cubic spline에 의해서 주어진 일련의 데이터 점에 대한 보간값들을 계산하는 프로그램으로써, (x, y)에 대한 spline 계수들을 만들어서, 풀고

있다. 또한 이 subroutine은 4개의 경계조건을 위한 매개변수 BPAR(I) (I=1, 2, 3, 4)의 입력을 요구하고 있다. 만일 곡선에 대한 이와 같은 정보가 없을 때는 이들 값들을 모두 0으로 설정하도록 하고 있는데 이의 경우에는 "natural cubic spline"이 얻어진다.

또 만일 점 X(1), X(2), X(NX-1), X(NX)에서의 곡선의 2차미분치  $F_1''$ ,  $F_2''$ ,  $F_{NX-1}''$ ,  $F_{NX}''$ , (여기서 NX는 데이터점의 수임)을 알 경우, 경계조건을 위한 매개변수는 다음식을 만족해야 한다.

$$2.0 \times F_1'' + BPAR(1) \times F_2'' = BPAR(2) \quad (18)$$

$$BPAR(3) \times F_{NX-1}'' + 2.0 \times F_{NX}'' = BPAR(4) \quad (19)$$

특히, 만약  $F_1''$ 과  $F_{NX}''$ 가 알려질 때는 경계조건을 위한 매개변수는 다음과 같이 설정하도록 하고 있다.

$$\begin{aligned} BPAR(1) &= 0 \\ BPAR(2) &= 2.0 \times F_1'' \\ BPAR(3) &= 0 \\ BPAR(4) &= 2.0 \times F_{NX}'' \end{aligned} \quad (20)$$

이 조건은, X(1)과 X(NX)에서의 cubic spline의 2차 미분치  $F_1''$ 와  $F_{NX}''$ 를 같게 해주는 조건이다. 또, 만일 X(1)과 X(NX)에서 1차 미분치인  $F_1'$ 과  $F_{NX}'$ 를 알 경우, 그 값은 다음과 같이 정의하도록 하고 있다.

$$\begin{aligned} BPAR(1) &= 1 \\ BPAR(2) &= \frac{6}{X(2) - X(1)} \left[ \frac{Y(2) - Y(1)}{X(2) - X(1)} - F_1' \right] \\ BPAR(3) &= 1 \\ BPAR(4) &= \frac{6}{X(NX) - X(NX-1)} \left[ F_{NX}' - \frac{Y(NX) - Y(NX-1)}{X(NX) - X(NX-1)} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

이 조건은 X(1)과 X(NX)에서의 1차미분치를 갖게 하는 결과가 된다. 그러나 본 프로그램 "JOHN3.FOR"에서는 여러 번의 시행착오에 의해서

$$\begin{aligned} BPAR(1) &= 1.0 \\ BPAR(2) &= \frac{-1}{X(2) - X(1)} \left[ \frac{Y(2) - Y(1)}{X(2) - X(1)} \right] \\ BPAR(3) &= 1.0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$BPAR(4) = 0.0$$

의 조건을 사용했다. 결과적으로

$$\begin{aligned} F_1' &= \frac{7}{6} \left[ \frac{Y(2) - Y(1)}{X(2) - X(1)} \right] \\ F_{NX}' &= \frac{Y(NX) - Y(NX-1)}{X(NX) - X(NX-1)} \end{aligned} \quad (23)$$

으로 준 것이 된다. (23)식의 경계조건과 비교하기 위해서 natural cubic spline의 조건을 경계조건으로 주어서 실험하였다. 사용된 IMSL routine name "ICSEVU"는 cubic spline의 평가를 위한 것으로, 오차를 점검하는 프로그램이다. 이에 대한 설명은 생략한다.

컴퓨터는 model DEC-20의 단말을 이용했고 언어는 FORTRAN을 사용했다.

입력된 데이터는, Schleter 등<sup>8)</sup>에 의해서 만든 5,000개 이상의 데이터를, 10RP로부터 R, YR, Y, GY, G, BG, B, PB, P, RP 등의 순으로 2.5간격씩, 40개의 색상값에 0, 2.5, 5.0, …… 97.5의 일련번호를 붙여서 프로그램 수행에 용이하도록 배열하고, 각각의 색상값에 대한 채도 값을 2, 4, 6, 8…의 순으로 배열해서 각 채도 값에 따른 CIE, x, y값을 할당하는 식으로, 데이터 파일로 만들어졌다.

### 3.2 알고리즘 및 해석결과

Cubic spline에 의한 Munsell H-C 평면의 해석을 위한 프로그램의 순서도(flow chart)는 Fig. 4, 5와 같다.

프로그램 수행 결과는 Munsell 채도값의 어떤 간격으로든지 보간값들을 프린트할 수 있도록 되어 있다.

Fig. 6는 경계조건을 위한 매개변수 BPAR(I)=0으로 놓고 보간을 시행한 결과를 그림으로 그린 것이다. 여기서는 본래 주어진 원활도(smoothness)에 대해서, physical spline에 의해서 그린 곡선과 서로 비교하고 있는데 natural cubic spline을 사용했을 때 10Y와 5G 사이, 10R와 10YR 사이에서 Munsell 채도케적의 찌그러짐(distortion)이 생긴다는 것을 발견하였다. 그래서 본 저자는 이 문제를 해결하기 위해서 경계조건을 위한 매개변수를 여러 가지로 변경하여 사용하였다. 여러 번의 시행착오에

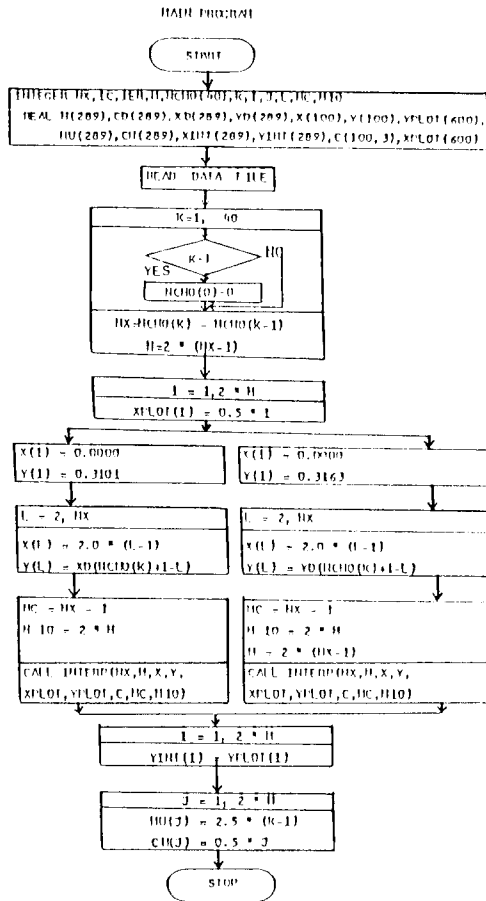


Fig. 4. Main routine flow chart of program "JOHN 3. FOR".

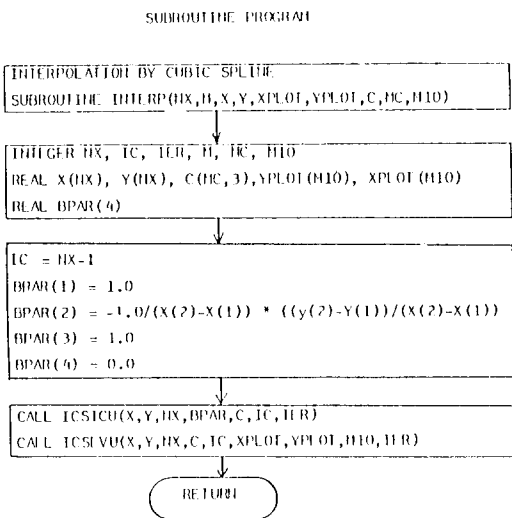


Fig. 5. Flow chart of subroutine "INTERP".

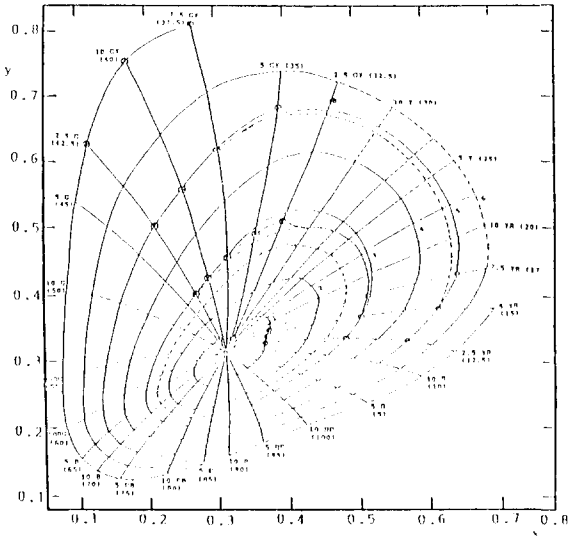


Fig. 6. Extension of data points of the Munsell renotaion system by national cubic spline: In this case four boundary parameters are zero.  
( ——— Applied data points, - - - - - Data points by physical spline method, ⊗-⊗ Data points by cubic spline method).

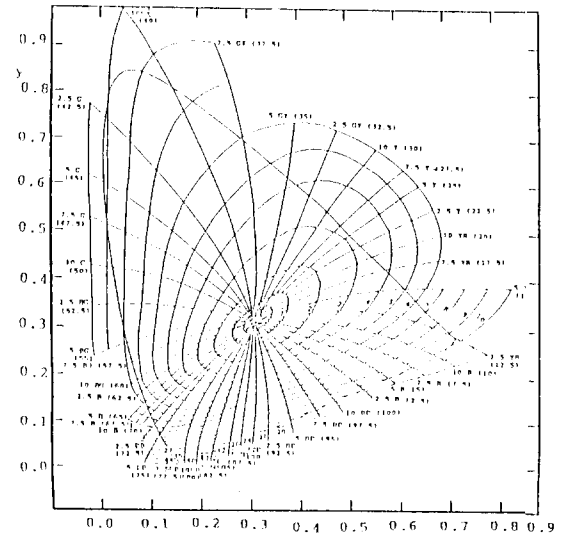


Fig. 7. Munsell value 1-extension of data points of the Munsell renotaion system by cubic spline method.

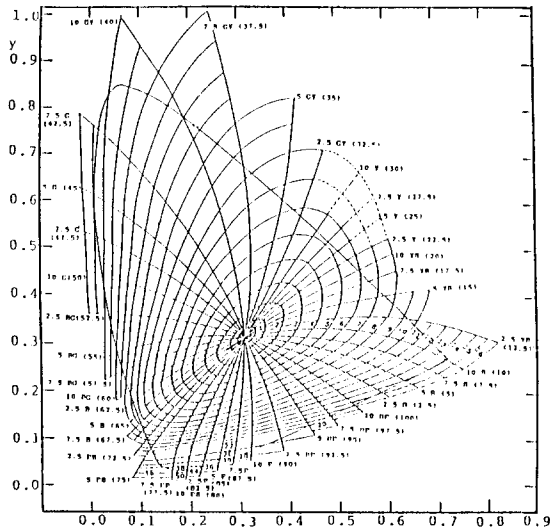


Fig. 8. Munsell value 2-extension of data points of the Munsell renotation system by cubic spline method.

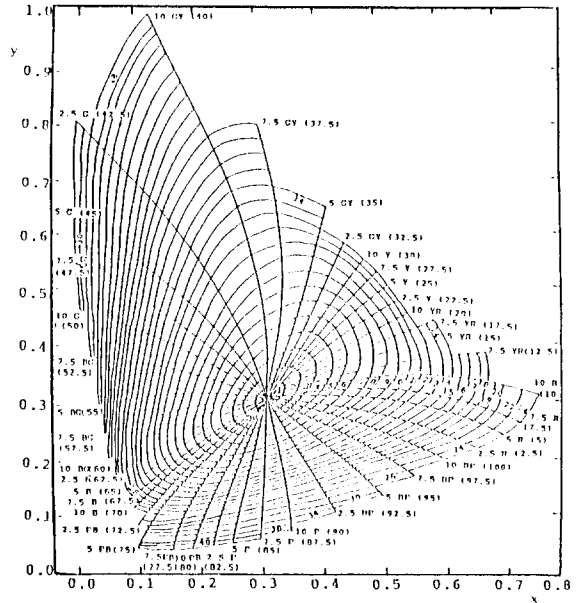


Fig. 10 Munsell value 4-extension of data points of the Munsell renotation system by cubic spline method.

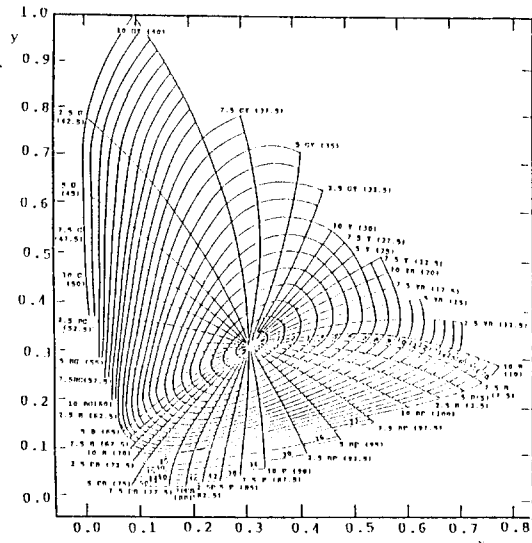


Fig. 9. Munsell value 3-extension of data points of the Munsell renotation system by cubic spline method.

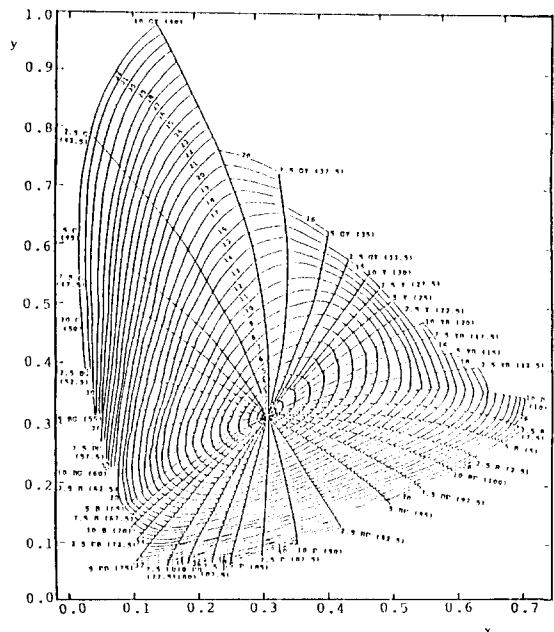


Fig. 11. Munsell value 5-extension of data points of the Munsell renotation system by cubic spline method.



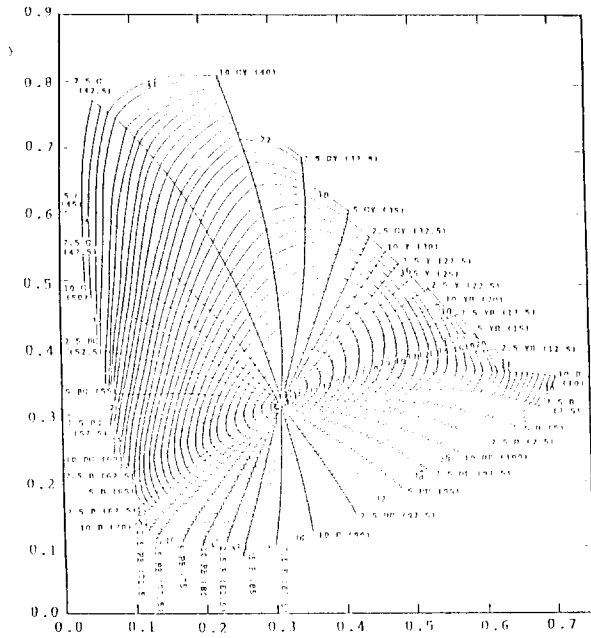


Fig. 12. Munsell value 6-extension of data points of the Munsell renotation system by cubic spline method.

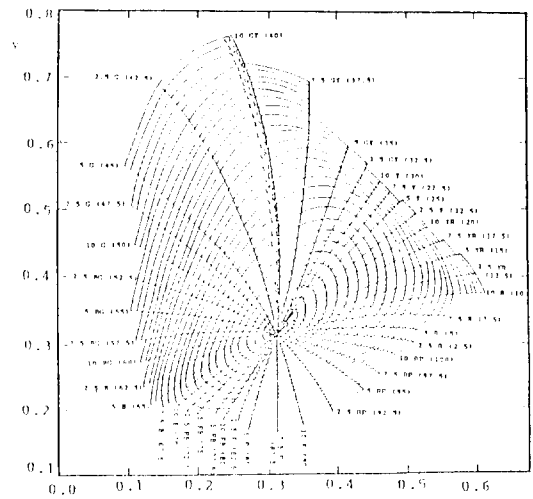


Fig. 14. Munsell value 8-extension of data points of the Munsell renotation system by cubic spline method.

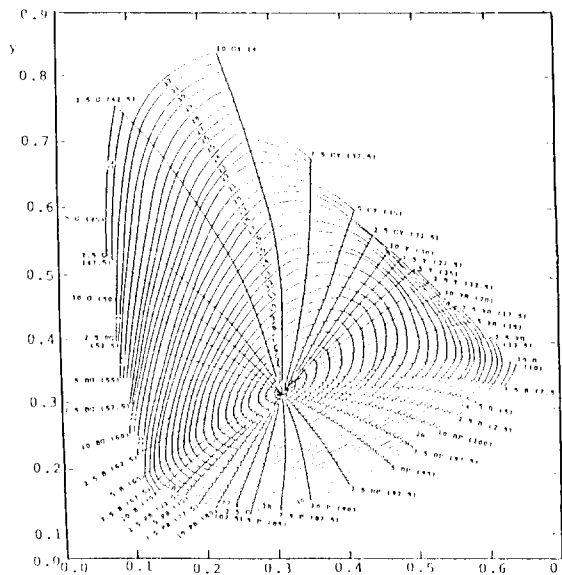


Fig. 13. Munsell value 7-extension of data points of the Munsell renotation system by cubic spline method.

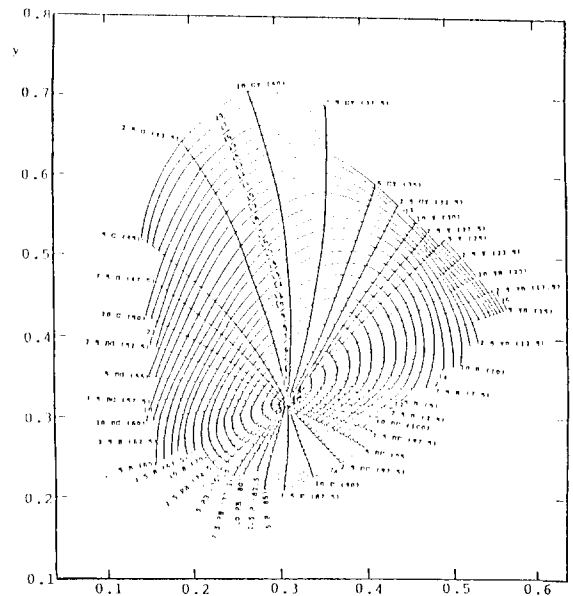


Fig. 15. Munsell value 9-extension of data points of the Munsell renotation system by cubic spline method.

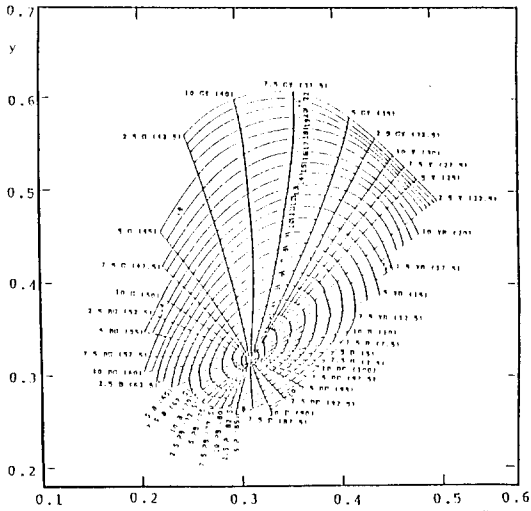


Fig. 16. Munsell value 10-extension of data points of the Munsell renotation system by cubic spline method.

의해서 식 (23)과 같이 끝점에서의 일차 미분 값  $F_1'$ ,  $F_{NX}'$ 를 정하고, 이를 식 (21)에 대입하여 식 (22)을 얻어서 사용하였다.

Fig. 7부터 Fig. 16까지는 식 (22)와 같은 경제조건을 위한 매개변수에 의해서 얻어진 결과들을 50×50 cm의 모눈종이에 그린 후, 축소하여 다시 그린 것이다. 여기에 Munsell 명도 1/에서 Munsell 명도 10/까지의 모든 H-C 평면을 Munsell 체도 간격 1로 한 그림으로 제시하고 있다. 이 그림은 Munsell Renotation(1943)<sup>6)</sup>이 후, 처음의 것이고, 특히 Munsell 명도 10/의 것은 여기에서 처음 제작 공개한 것이다.

Table 2는 Munsell 색채공간의 H-C 평면의 데이터 점의 확장에 대한 역사적 진행과정들, 각 명도층(Value level)에 따라 데이터 점의 수로 나타내고 있는데, 발표된 문헌과, Billmeyer, Hemmendinger,

Table 2. Extension of Data Points of Munsell Notations.

Extension History Munsell Value Function	Munsell Book of Color Notation (20 Hues)	Munsell Book of Color Notation (40 Hues)	Newhall <i>et al.</i> notation 1943	Judd-Wyszeki 1956	Schleter-Judd -Keegan Extension	Splin Extension 1985
Muns 02				106	174	>388
Muns 04				151	245	>530
Muns 06				176	284	>608
Muns 08				193	332	>704
Muns 1		1	195	195	297	>634
Muns 2	25	63	274	274	379	>798
Muns 3	52	113	331	331	449	>938
Muns 4	70	156	373	373	493	>1026
Muns 5	71	166	390	390	525	>1090
Muns 6	71	164	370	370	529	>1098
Muns 7	62	145	342	342	492	>1024
Muns 8	37	100	283	283	450	>940
Muns 9		25	174	174	366	>772
Muns 10					249	>538
Total	388	933	2732	3358	5264	>11088

Christie 등과 개인적인 연락에 의해서<sup>19)</sup> 입수한 자료를 참고해서 만든 것이다.

Table 2에서 보는 바와 같이 본 보문에서, 종전에 사용한 그림 및 표에 의해서 얻을 수 있었던 모든 데이터 점들을 본 보문에서 제시한 cubic spline 이론을 사용함으로써, 얼마든지 그 수를 확장할 수 있을 뿐만 아니라, 데이터 파일을 조금만 바꾸어 제공하면 Munsell 체도 궤적의 보간도 가능하고, 이로써 새로운 색상선(Hue line)도 만들어 낼 수 있으리라 믿는다.

또한 이 방법을 잘 이용하여 연구를 확장해 감으로써, 지금까지의 모든 색채공간들 간의 상호변화도 가능하리라 믿는다.

Cubic spline 이론은 1943년 OSA의 궁극적인 목표인, Munsell 색채 공간의 스무우싱(smoothing)에 대한 “일반적인 방법”을 제시할 수 있기 때문에, 이 방법의 이용으로, Munsell의 두 가지 이상인 “심리적인 등간격(psychological equispacing)과 정확한 그것의 적용(precise applicability)이라는 본래의 목표에 보다 가깝게 접근한 결과를 가져왔다고 보겠다.

또한 전면적으로 “Munsell Renotation”을 심리적 감각량과 비교하여 재검토할 때도, 여기서 제시한 cubic spline 방법을 사용한다면, 보다 정확한 결과를 가져다 주리라 믿는다.

#### 4. 결 론

이상에서 저자는 Munsell 색채공간의 데이터점들의 확장에, 종래에 사용한 Adams의 그래프에 의한 방법을 지양하여 하나의 Cubic Spline Algorithm에 의해서 Interpolation하는 방법을 논하고 있다. 이로써 Munsell 색채공간의 데이터점들은 연구자 및 사용자의 의도에 따라 얼마든지 확장될 수 있게되고, 만일 지금까지의 데이터점들의 밖으로 더 많은 확장이 요구될 때는 Adams의 그래프에 의한 방법을 사용하여 각 색상선마다 1-2 점씩만 더 구한다음 본 프로그램의 데이터파일에 부가해 주면 충분하리라 본다. 또한 Munsell x-y 평면에 관한 Algorithm과 데이터 파일의 일부를 수정하면 Munsell Color Solid를 smooth하게 입체적으로 그릴 수 있는 Algorithm도 개발할 수 있겠고, 이와 같은 연구를 좀 더

확장해 감으로써 지금까지 나와 있는 색채공간들간의 상호변화도 가능하리라 본다.

또 여기에 제시된 Fig. 7-16까지의 x-y 평면에 대한 그림은 실용의 목적 뿐 아니라 이 분야의 연구자들을 위해서 도움을 주리라 믿는다. 보다 정밀한 그림 제작을 위한 프로그램은 저자에 의해서 계속 개발 중이다.

Cubic Spline 이론은 1943년 OSA의 궁극적인 목표인 Munsell 색채공간의 스무우싱에 대한 일반적인 방법을 제시할 수 있기 때문에, 이 방법의 이용으로 Munsell의 두 가지 이상인 “심리적인 등간격(Psychological equispacing)과 정확한 그것의 적용(Precise applicability)”이라는 본래의 목표에 보다 가깝게 접근한 결과를 가져왔다고 보겠다.

전면적으로 “Munsell Renotation”을 심리적 감각량과 비교하여 재검토할 때도 여기서 제시한 Cubic Spline 방법을 사용한다면, 보다 정확한 결과를 가져다 주리라 믿는다.

#### 참고문헌

1. A.E.O. Munsell, L.L. Sloan and I.H. Godlove, “Neutral Value Scales (I), Munsell Neutral Value Scale,” *J. Opt. Soc. Am.*, **23**, 394-411 (1933).
2. I.H. Godlove, “Neutral Value Scales (II),” *J. Opt. Soc. Am.*, **23**, 419-425 (1933).
3. J.T. Glenn and J.T. Killian, “Trichromatic Analysis of the Munsell Book of Color,” *J. Opt. Soc. Am.*, **30**, 609-616 (1940).
4. K.L. Kelly, K.S. Gibson and D. Nickerson, “Tristimulus Specification of the Munsell Book of Color from Spectrophotometric Measurements,” *J. Opt. Soc. Am.*, **33**, 355-376 (1943).
5. S.M. Newhall, “Preliminary Report of the O.S.A. Subcommittee on the Munsell Colors,” *J. Opt. Soc. Am.*, **30**, 617-645 (1940).
6. S.N. Newhall, D. Nickerson and B. Judd, “Final Report of the O.S.A. Subcommittee on the Spacing of the Munsell Color,” *J. Opt. Soc. Am.*, **33**(7), 385-418 (1943).
7. D.B. Judd and G. Wyszecki, “Extension of the Munsell Renotation System to very Dark Colors,” *J. Opt. Soc. Am.*, **46**, 281-284 (1956).
8. J.C. Schleiter, D.B. Judd and H.J. Keegan, “Extension of the Munsell Renotation System,” *J. Opt. Soc.*

- Am.*, **48**, 863-864 (1958).
9. D.L. MacAdam, "Maximum Visual Efficiency of Colored Matereals," *J. Opt. Soc. Am.*, **25**, 361-367 (1935).
  10. H.J. Keegan, E.C. Rheinboldt, J.C. Schleter, J.P. Menard and D.B. Judd, "Digital Reduction of Spectrophotometric Data to Munsell Renotations," *J. Opt. Soc. Am.*, **48**, 863 (1958).
  11. W.C. Rheinboldt and J.P. Menard, "Mechanized Conversion of Colorimetric Data to Munsell Renotations," *J. Opt. Soc. Am.*, **50**, 802-807 (1960).
  12. D. Nickerson, "Munsell Renotations used to study Color Space of Hunter and Adams," *J. Opt. Soc. Am.*, **40**, 85 (1950).
  13. p. Henrici, "Essentials of Numerical Analysis with Pocket Calculator Demonstrations," John Wiley & Sons, 1982.
  14. D. Nickerson, "History of the Munsell Color System and its Scientific Application," *J. Opt. Soc. Am.*, **30**, 575-586 (1940).
  15. G.L. Gibson and D. Nickerson, "An Analysis of the Munsell Color System based on Measurements made in 1919 and 1926," *J. Opt. Soc. Am.*, **30**, 591-608 (1940).
  16. W.C. Granville, D. Nickerson and C.E. Foss, "Tristimulus Specifications for Intermediate and Special Colors of the Munsell System," *J. Opt. Soc. Am.*, **33**, 376-385 (1943).
  17. J.H. Ahlberg, E.N. Nilson and J.L. Walsh, "The Theory of Splines and Their Applications," Academic Press, (1967).
  18. D.F. Rogers and J.A. Adams, "Mathematical Elements for Computer Graphics," McGraw-Hill, Chap. 5, (1976).
  19. F.W. Billmeyer, Jr., F. Grum, H. Hemmendinger, J.S. Christie, Personal Communication (1984).
  20. 이종문, "수치해석에 의한 Munsell 색채공간의 해석," 박사학위논문(경희대학교), 1985.