

카타스트로피 이론과 구조 불안정 해석

김 두 기*
양 영 순**

1. 서론

구조물의 파괴양식중 좌굴(구조불안정)은 소성 파괴, 피로파괴, 취성파괴와 더불어 구조물의 강도를 결정하는 매우 중요한 파괴양식이며 구조물의 형태 및 작용하중의 종류에 따라 좌굴이 구조물에 있어 가장 치명적인 파괴양식이 될 수 있다. 구조물의 설계시는 대부분 구조물의 형태를 완전한 기하학적 치수를 갖는 것으로 모델링하여 좌굴강도를 예측하는 것이 보통이다. 그러나 모든 구조물에는 공급되는 원자재의 치수결함, 용접 및 조립 등의 제작공정에서 기하학적 초기결함이 발생되며 구조물에 따라서는 이러한 기하학적 초기결함이 심각한 좌굴강도의 감소를 초래한다는 것이 여러학자들의 이론적, 실험적 연구결과에서 입증되어 왔다. 그러므로 기하학적 초기결함에 의한 좌굴강도의 변화에 관한 연구는 구조물의 실제적인 좌굴강도 예측을 위해 필수적이다. 그러나 기하학적 초기결함을 고려한 구조물의 비선형 구조안정성 해석에는 엄청난 계산시간과 기억용량이 필요하며, 쉘구조물과 같이 기하학적 초기결함에 민감한 구조물에 대해서는 기하학적 초기결함들의 조합된 효과까지 고려한 대규모의 계산이 필요하게 된다.

기하학적 초기결함의 존재로 인한 좌굴강도의 감소정도를 초기결함 민감도(Imperfection Sen-

sitivity) 라고 부르는데 구조물의 형태, 배치 및 초기결함의 형태에 따라 변화하게 된다. Koiter의 연구 이래 초기결함 민감도는 구조물의 좌굴후 거동 및 실제 구조물의 좌굴강도 감소를 설명하는 중요한 파라메타로 활용되어 왔다. 종래에 초기결함 민감도해석을 수행하는 데에는 구조물의 형태, 초기결함의 크기가 달라지면서 그때마다 모델링, 비선형 해석을 실시하고 좌굴후 경로, 좌굴하중을 반복계산하여, 그 결과를 종합하여 초기결함 민감도의 경향을 도출하게 되므로 계산시간이 과다하게 소요되었다.

구조물의 초기결함 민감도 해석과 관련하여 등장한 방법중 하나는 좌굴점과 같은 특이점(Singularity Point) 혹은 임계점(Critical Point)에만 존재하는 어떤 위상적 특성(Topological Characteristics)을 활용하는 방법이다. 이와같은 방법은 카타스트로피 이론(Catastrophe Theory)에서 출발하고 있는데 이 이론은 1972년 프랑스의 수학자인 R. Thom이 생물학에서의 배아발생시의 분기현상(Bifurcation Phenomenon)을 위상수학적 관점에서 설명하기 위해 제창한 이래 Zeeman, Thompson & Hunt, Steward, Gaspar 등에 의해 카타스트로피로 통칭되는 자연과학, 공학, 의학 기타 사회과학 전반에 걸쳐 발생하는 제반 불연속 및 분기현상을 설명하는데 사용되어 왔다. 이 이론에 의하면 포텐셜 에너지에 의해 거동이 지배되는 구조물에서는 임계점 혹은 특이점에서의 위상적 특징을 알기만 하면 임계점 근처에서의 구조물의

* 서울대학교 대학원 조선공학과 박사과정

** 정희원, 서울대학교 조선공학과 조교수

기동이 예측된다는 것이다. 이 이론은 완전구조물과 여러 초기결함을 갖는 불완전 구조물들의 힘을 구조물군으로 생각하고 그 포텐셜 에너지들을 하나의 함수족(Function Family)으로 표현하여 그 함수족의 위상적 특징을 이용하여 아주 적은 계산량으로 임계점 근처에서의 구조불안정의 특성을 효과적으로 파악하는 방법이다.

본 고에서는 초기결함 민감도해석과 관련한 카타스트로피 이론의 연구동향, 기초이론 및 적용 가능성에 대해 살펴보기로 한다.

2. 관련연구 동향

카타스트로피이론은 본래 특이성에 관한 이론인 데 그 연구경향을 살펴보기에 앞서 종래 구조공학 분야에서의 비선형 탄성구조안정성 해석과 관련한 연구동향을 살펴본다.

1744년 Euler가 변분원리를 이용 *Elastica*에 대한 비선형해석을 수행한 것이 구조물에 관한 최초의 분기(Bifurcation)해석이다. 그러나 공학분야에서 그와같은 정교한 해석을 필요로 하게 된 것은 그후 상당한 시간이 흐른 후의 일이다. 특히 판과 셸이 구조물의 주요 요소로 등장하면서 탄성안정성에 대한 비선형 해석의 필요성이 등장하게 되었다. 즉 판의 경우에는 면내 압축시 임계하중 이후에도 하중을 견딜 수 있지만 셸의 경우에는 임계하중보다 훨씬 못미쳐 급격한 파괴가 발생하기 때문이다.

1945년 Koiter[1]에 의해 비선형 구조안정성 해석에 대한 일반적 이론체계는 정립 되었다. 그는 포텐셜 에너지를 기본도구로 하여 보존계 연속 구조물에 변분원리를 적용하였고 비선형 좌굴후 해석 및 초기결함 민감도해석을 보, 판, 원통형 셸에 대해 수행하여 그 부재들의 좌굴거동이 근본적으로 달라지는 이유를 설명하였다. 1960년대에 들어서 미국에서는 Koiter의 일반론을 실제적인 기하학적 특징을 갖는 구조물에 적용하는 연구가 Harvard대학의 Budiansky[2], Hutchinson [3] 등에 의해 수행되었다. 1970년대 이후 1980년대까지는 Chilver, Sewell, Britvec, Thompson, Hunt[5, 6] 등에 의해 이산화 좌표계에 의한

분기이론 연구가 활발히 수행되었고 특히 Thompson & Hunt는 단일좌굴모드 및 복합좌굴모드를 갖는 구조물에 대해 음섭동법(Implicit Perturbation Technique)을 이용하여 좌굴후 기동 및 초기결함 민감도 해석을 수행하였다.

다음은 카타스트로피 이론과 관련한 연구동향을 살펴보기로 한다. 1885년 오늘날 동적계에 적용하는 위상이론의 아버지라 불리우는 Poincare는 임계점에서 해가 갈라지는 분기현상의 특성을 인식하였고 그후 특이성의 분류를 위한 기본적인 개념을 제시하였다. 1937년 Andronov, Pontriagin은 “어떤 현상이 인식되기 위해서는 그것이 미소한 교란에 대해 건전(robust)해야 한다”는 개념을 주장했고 그것이 후일 Lefschetz에 의해 구조안정성(Structural Stability)이란 용어로 정의되었다.

Andronov, Pontriagin의 개념은 Smale, Thom에 의해 계승되었고 1972년 Thom[4]은 최소화 범선함수(Minimum-seeking Gradient Function)에 의해 지배되는 계에서 발생하는 특이성(Singularity)을 분류하는데 Andronov, Pontriagin의 구조안정성개념을 이용하였고 Thom의 그러한 특이성에 관한 이론을 “초등카타스트로피 이론”이라 부른다. 초등카타스트로피 이론은 제어파라메타가 4개 이하인 공간에서의 7가지의 특이성 혹은 카타스트로피를 다루고 있다. 초등카타스트로피 이론에서 주장하는 것은 특이성이 발생하는 상태를 위상적으로 표현하므로써 특이점 근처에서의 구조물의 거동특성을 용이하게 파악할 수 있다는 것이다. Thom의 이론은 Zeeman, Poston, Steward 등에 의해 자연과학, 의학, 사회과학 전분야에 걸쳐 불연속 및 분기현상을 설명하는데 널리 채용되었다[8-13].

1979년 Golubsky & Schaeffer[14]는 카타스트로피 이론을 보존계에서 비보존 소산계에까지 적용할 수 있도록 이론을 확장시켰다. 1981년 Samuels[15]는 초등카타스트로피 영역을 넘어 고차카타스트로피에 대한 연구를 수행하였고 1983년 Gaspar[13]는 초등카타스트로피 이론에 근거하여 주요 카타스트로피에 대한 임계결함구역(Critical Imperfection Territory)을 계산하였다. 또한 Niwa[19], Watanabe[20] 등은 카타스트로피 이론을

이용한 보강판, 원통형 셀의 최종강도연구 결과를 수행하였다. 최근들어 Wicks[16]는 2개의 대칭복합 좌굴모드를 갖는 분기현상에 대한 연구결과를 발표하였고 Poiter-Ferry[18], Carpinteri[17] 등은 카타스트로피이론 관점에서 크랙전파시의 분기현상을 해석하는 연구내용을 발표하였다.

3. 카타스트로피 이론에 의한 초기결함 민감도 해석

3.1 개요

카타스트로피이론은 Mapping의 특이성에 관한 연구에서 비롯되었다. 이 이론은 복잡한 구조물의 특이점 근처에서의 거동파악을 위해 그 위상적 특성 예를 들면, Codimension, Corank 등을 유지하면서 포텐셜에너지함수를 위상수학적 좌표변환수단에 의해 Canonical한 형태로 만들고 Determinacy, Unfolding 이론을 이용해 하중, 초기결함으로 표현되는 제어파라미터를 포함하는 포텐셜에너지함수군을 구성하게 된다. 이러한 함수군의 특성을 파악하게 되면 특이점 즉 좌굴점에서의 분기특성 및 분기집합(Bifurcation Set)을 구할 수 있는데 이때 구해진 분기집합이 좌굴점에서의 초기결함 민감도 곡선/곡면(Imperfection Sensitivity Curve/Surface)을 의미한다.

3.2 카타스트로피 이론의 기본개념

카타스트로피 이론에 의한 초기결함 민감도해석의 기본적인 흐름은 그림1에 나타나 있다. 본절에서는 카타스트로피 이론의 기본적인 개념에 대해 기술한다.

(가) 포텐셜에너지함수의 국부거동 표현

카타스트로피 이론은 수학적수단으로 위상수학을 사용한다는 점에서 의미하듯이 정성적 특성을 분석하기 위해 좌굴점이라는 특이점 근처에서의 포텐셜에너지 함수족의 국부적거동(Local Behavior)의 표현에 일차적관심을 갖는다.

실제구조물의 포텐셜함수는 매우 많은 상태변수(실제적인 유클리드좌표 혹은 모드좌표)로 표현되는 복잡한 함수이므로 좌굴점 근처에서 모든 상태변수를 고려하여 표현하게 되면 계산식이 복잡해

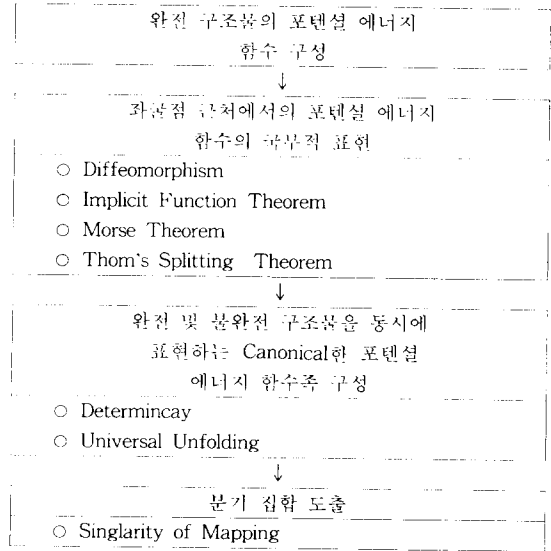


그림1. 카타스트로피 이론에 의한 초기결함 민감도해석 흐름

지며 좌굴점 근처에서의 거동파악에 어려움이 있다. 그래서 좌굴점 근처에서의 국부거동을 표현하기 위해 포텐셜함수를 간략화 할 필요가 있는데 이를 위해 음함수정리(implicit function theorem), 모스정리(Morse Theorem), Thom의 분리정리(Splitting Function Theorem) 등을 이용한다 [7].

포텐셜 함수 V 가 상태변수벡터 $[x] = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ 의 함수일때

1) $\nabla V \neq 0$ 인 경우

$$V = C(\text{임의상수})$$

여기서 ∇ 는 gradient를 의미한다. 이 경우는 음함수 정리에 근거하여 관계가 성립한다.

2) $\nabla V = 0, \|V_{ij}\| \neq 0$ 인 경우

모스의 정리에 의해 V 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$V = \sum \lambda_i V_i^2$$

여기서 $[V_{ij}] = [\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}]$, λ_i 는 안정성행렬 $[V_{ij}]$ 의 고유치이다.

3) $\nabla V=0, \quad \|\nabla^2 V\|=0$ 인 경우

Thom의 분리정리에 의해 V 는 다음의 형태를 취한다.

$$V = \text{Cat}(l, k) + \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j^2$$

여기에서 l 은 안정성지수가 0이 되는 변수의 수를 의미하며 $\text{Cat}(l, k)$ 는 상태변수가 l 개 이고 제어파라메타의 수가 k 개인 카타스트로피 함수를 의미한다.

(나) Determinacy & Unfolding

좌굴점에서의 포텐셜 함수를 국부적으로 표현하기 위해 기본적으로 포함될 Taylor 급수항을 구하기 위해 Determinacy의 개념이 필요하다.

위상사상(Diffeomorphism) $[x'] = [x'(x)]$ 에 의해 함수 V 의 변환된 형태인 V' 가 $V'([x']) = V([x])$ 로 표현될 수 있을 때 "정상적으로 등가이다"라고 할 수 있다. 여기서 $[x]$ 는 상태변수벡터를 의미하고 $[x']$ 는 변환된 상태변수벡터이다. 그러므로 적절한 위상사상에 의해 V 와 등가이면서 차수가 낮은 Canonical한 형태의 함수 V' 를 이용하는 것이 매우 효과적이다.

함수 V 의 Determinacy는 다음과 같이 결정한다 [12].

1) $V([x])$ 가 p -determinate하다고 가정한다. 일반적으로 함수 $V([x])$ 의 Taylor 급수의 p -jet를 위상사상 $[x'] = [x'(x)]$ 에 의해 표현한 V' 가 $V([x]) = V'([x'([x]))$ 의 관계를 유지할 수 있으면 함수 V 는 p -determinate하다.

2) $m_k([x])$ 를 x_1, x_2, \dots, x_l 의 1, 2, ...차 단항식의 순열로 표현한다.

$$m_k([x]) = x_1, \dots, x_n; x_1^2, x_1x_2, \dots, x_l^2; \dots$$

3) 다음과 같이 정의되는 다항식 R_{ij} 의 집합을 구해본다.

$$R_{ij}([x]) = j^{p+1} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_i} m_j([x]) \right\}$$

4) $(p+1)$ 차의 모든 단항식이 상수계수를 갖는 R_{ij} 의 선형결합으로 표현될 수 있을 때 p 를 $V([x])$ 의 Determinacy라고 한다.

실제적인 세계에서 볼 수 있는 카타스트로피는

그것이 특정경로에 의지하지 않는 대표성(Typicality)을 갖기 위한 충분한 수의 제어파라메타(하중, 초기결함 등)를 고려하여 그 거동이 파악되어야 한다.

Unfolding 법칙은 i) 얼마나 많은 수의 제어파라메타가 필요하고 ii) 그 파라메타들이 포텐셜 함수에 어떤모양으로 포함되어야 하는지를 결정한다. 결과적으로 Unfolding법칙에 의해 결정된 특정한 수 이상의 제어파라메타는 카타스트로피의 위상적특성에 영향이 없음을 의미한다.

함수 $V([x])$ 의 Universal Unfolding은 다음과 같이 결정한다[12].

1) $V([x])$ 의 Determinacy p 를 구한다. 그 이후에는 $V[x] = j^p V([x])$ 를 가지고 계산을 수행하는 것이 편리하다.

2) $n_k([x])$ 는 변수 x_1, \dots, x_n 의 0, 1, 2, ...차 단항식의 순열이다.

$$n_k([x]) : 1; x_1, x_2, \dots; x_1^2, x_1x_2, \dots,$$

3) $F([x]; [a])$ 를 $V([x])$ 의 r -차원 unfolding으로 가정하고 다음과 같은 정의를 한다.

$$T_j(x) = \frac{\partial}{\partial a_j} j^{p+1} F([x]; [a]) \Big|_{|a|=0}$$

여기서 $[a]$ 는 파라메타행렬이다.

4) 다음관계를 만족하는 모든 다항식을 기록한다.

$$S_{ij}([x]) = j^p \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_i} n_j([x]) \right\}$$

5) 차수가 p 이하인 모든 단항식이 다음과 같은 형태로 표현될 수 있는지를 점검한다. 단 s_{ij}, t_j 는 실수이다.

$$\sum s_{ij} S_{ij}([x]) + \sum t_j T_j([x])$$

만약 위의 관계가 성립하면 그때의 $F([x]; [a])$ 는 $V([x])$ 의 versal unfolding이다.

6) 만약 $T_j([x])$ 가 최소의 집합이면 $F([x]; [a])$ 는 $V([x])$ 의 universal unfolding이 된다.

(다) 위상적 불변량

함수의 위상적 불변량중 가장 중요한 것으로는 Corank와 Codimension을 들 수 있다. Corank는

포텐셜 에너지함수의 안정성 지수가 0이 되는 좌표의 수를 의미하며 1개의 좌굴모드가 존재할 때는 1, 2개의 좌굴모드가 존재할 때는 2가 된다. 이 값은 위상사상에 의해서 변화하지 않는 가장 간단한 양이다.

Codimension은 일반적으로 평형상태를 표시하는 포텐셜에너지의 1차변분인 카타스토로피 매니폴드의 차원과 그 매니폴드를 포함하는 공간과의 차원차이를 표시하며 이것은 카타스토로피 매니폴드를 표현하는데 필요한 방정식의 수를 의미하게 된다. 실제적으로 Limit Point나 비대칭 분기점(Asymmetric Bifurcation Point)과 같이 $V_{xx}=0$ 이고 $V_{xxx} \neq 0$ 인 경우에는 Codimension이 1이고, 대칭분기점(Symmetric Bifurcation Point)과 같이 $V_{xx}=V_{xxx}=0$ 이고 $V_{xxxx} \neq 0$ 인 경우에는 Codimension이 2이다. 여기서 x 는 좌굴이 발생하는 주좌표를 의미한다.

(라) 사상의 특이성(Singularity of Mapping)

n 차원 매니폴드는 모든 점에서의 접공간(Tangent Space)이 n 차원 유클리드공간인 순정한 곡면(Smooth Surface)인데 예를 들면 구면 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 인 2차원 매니폴드이다. 어떤 n 차원 매니폴드 P 의 다른 n 차원 매니폴드 L 로의 사상(Mapping) f 가 $p \in P$ 에서 국부적으로 가역적(invertible)일 때는 비특이(nonsingular)하다고 하고 비가역적일 때는 특이(Singular)하다고 한다. 카타스토로피 이론에서는 초기결함 민감도를 의미하는 분기집합을 구하기 위해 사상 f 의 특이성을 이용한다. 만약 x_1, x_2, \dots, x_n 이 $p \in P$ 주위의 좌표계이고 f_1, \dots, f_n 이 $f(p) \in L$ 주위의 사상 시스템이라면 f 는 다음과 같은 조건이 성립하면 특이성을 갖게된다[7][12].

$$\det \parallel \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \parallel_p = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (1)$$

P 는 n 차원 매니폴드이므로 그것은 점 p 에서는 n 차원 유클리드 공간 R^n 처럼 보인다. 마찬가지로 L 은 $f(p)$ 에서 R^n 이다. 그러므로 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 를 나타내는 $n \times n$ 행렬은 국부적으로는 p 에서의 접공간인 R^n 의 $f(p)$ 에서의 접공간인 R^n 에로의 선형사상(Linear Mapping)을 의미한다.

(마) 적용 예

카타스토로피 이론에서 Cusp 카타스토로피로 분류되는 불안정 대칭 분기점(Unstable Symmetric Bifurcation Point)과 같이 Corank 1, Codimension 2인 구조불안정이 발생하는 구조물의 포텐셜에너지의 Taylor급수를 위상사상에 의해 좌표변환하고 Determinacy, Unfolding 법칙에 의해 정리하면 다음과 같다.

$$V = 1/4x_1^4 + 1/2a x_1^2 + b x_1 \quad (2)$$

여기서 a, b 는 제어파라메타, x_1 은 좌굴이 발생하는 주좌표를 의미한다. 카타스토로피 매니폴드는 $x_1^3 + a x_1 + b = 0$ 으로 표현되는 2차원 매니폴드로서 그 형태는 그림2의 상부에 표시된다. 3차원 공간내에 포함된 카타스토로피 매니폴드상의 임의 점의 좌표는 파라메타 λ_1, λ_2 를 이용하면

$$(x_1; a, b) = (\lambda_1; \lambda_2; -\lambda_1^3 - \lambda_1 \lambda_2) \quad (3)$$

이제 2차원 카타스토로피 매니폴드를 제어파라메타 평면 R^2 로 다음과 같이 투영시킨다.

$$(x_1; a, b) \text{ projection} \rightarrow (a, b)$$

여기서 $a = \lambda_2, b = -\lambda_1^3 - \lambda_1 \lambda_2$
사상의 특이성 조건(1)로부터

$$\frac{\partial a}{\partial \lambda_1} \times \frac{\partial b}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial a}{\partial \lambda_2} \times \frac{\partial b}{\partial \lambda_1} = 0 \quad (4)$$

식(4)는 매니폴드에서 접평면이 연직면이 되는

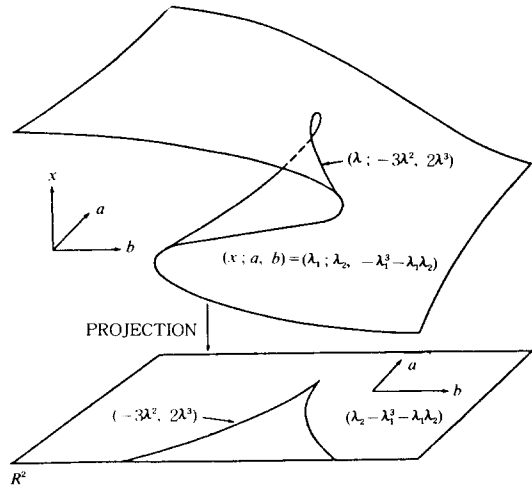


그림2. Cusp 카타스토로피에서의 사상의 특이성

침의 집합을 의미하는데 식(4)를 이용, 곡선식(3)을 제어파라메타 평면에 투영시키면 cusp형의 kink를 얻게된다.

$$(\lambda_1; -3\lambda_1^2; 2\lambda_1^3) \text{ projection} \rightarrow (a = -3\lambda_1^2; b = 2\lambda_1^3)$$

이 cusp형의 곡선을 λ_1 을 매개로 하여 구해보면

$$a = -3(b/2)^{2/3} \quad (5)$$

불안정 대칭분기점(Unstable Symmetric Bifurcation Point)을 갖는 구조물의 포텐셜 에너지식은 Thompson & Hunt의 유섭동법에 의하면[6]

$$V = \frac{1}{4!} V_{\text{unc}} x_1^4 + \frac{1}{2!} V'_{\text{uc}} p x_1^2 + V_{\text{ic}} \epsilon x_1 \quad (6)$$

위 식에서

$$V_{\text{unc}} : \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} \Big|_c$$

$$V'_{\text{uc}} : \frac{\partial^3 V}{\partial p \partial x_1^2} \Big|_c$$

$$p : P - P_c$$

P : load parameter

P_c : critical load parameter

ϵ : imperfection parameter

여기서 x_1 은 좌굴이 일어나는 주좌표를 의미하고 하부침차 c 는 도함수값을 임계점에서 계산한다는 것을 의미한다. 식(2)와 (6)의 카타스트로피 매니폴드를 비교하여 a, b 를 구한 후 이를 식(5)에 대입하면

$$P = P_c - \frac{1}{2} \times \frac{V_{\text{unc}}^{1/3}}{V'_{\text{uc}}} \times \{3V_{\text{ic}} \epsilon\}^{2/3} \quad (7)$$

식(7)은 Koiter, Thompson의 연구결과와 동일한 경향을 주고 있음을 확인할 수 있으며[5] 이와같이 카타스트로피이론을 이용하면 간단한 과정으로 구조물의 초기결함 민감도곡선을 구할 수 있음을 알 수 있다.

3.3 카타스트로피 이론에 의한 불안정현상의 분류

카타스트로피이론에서는 구조불안정현상을 일차

적 의미의 카타스트로피로 분류한다. 카타스트로피를 그 위상적 특징에 따라 분류한 것이 표1이다. 이중 Corank가 1인 카타스트로피들은 Cuspoid로 통칭하고 Corank가 2인 카타스트로피들은 Umbilics로 통칭한다.

표2에는 Thompson에 의한 구조불안정현상의 분류와 카타스트로피 이론에 의한 분류를 해당되는 현상별로 포텐셜에너지형태를 이용하여 비교하였다[6, 7]. 두 종류의 함수를 비교하면 카타스트로피이론에 의한 분류가 좀 더 일반적임을 알 수 있다.

표1. 카타스트로피의 위상적 특징에 따른 분류

카타스트로피	Corank	Codimension
Fold	1	1
Cusp	1	2
Swallowtail	1	3
Butterfly	1	4
Hyperbolic Umbilic	2	3
Elliptic Umbilic	2	3
Parabolic Umbilic	2	4

(가) Fold 카타스트로피

1차원 제어파라메타 공간에서 발생하는 가장 일반적인 카타스트로피로서 실제적인 물리계에서는 fold 카타스트로피가 가장 빈번히 발생한다. Limit Point나 비대칭 분기점과 같은 성질을 보이며 Tied Arch의 snap좌굴 또는 비대칭프레임의 좌굴현상을 설명하는 정성적 모델로 이용할 수 있다. 그 분기집합은 그림3에 나타나 있다.

(나) Cusp 카타스트로피

고차 카타스트로피의 기저를 이루는 Corank 1, Codimension 2인 카타스트로피이다. 평형곡면은 3차원 내에서 그림2와 같이 2차원 매니폴드를 형성하는데 2개의 fold line이 cusp를 형성한다. 그단면은 전면에서는 S형, 후면에서는 단순한 형태로 전이를 나타내는 고차의 임계상태를 나타내는 cusp점을 fold line의 교점에서 갖는다. 이 카타스트로피는 안정대칭분기점과 같은 특징을 가지며 보의 Euler좌굴, 평판의 좌굴현상을 설명하는 정성적모델로 이용할 수 있다. 그림4에는 그 평형곡면 및 분기집합이 표시되어 있다. Cusp

표 2. Thompson의 구조불안정 현상분류와의 비교

카타스트로피이론에 의한 분류		Thompson의 음섭동법에 의한 분류	
카타스트로피	포텐셜 함수족	구조불안정 현상	포텐셜 함수 형태
Fold	$\frac{1}{3}x^3 + ux$	Limit Point	$\frac{1}{6}V_{xxx}x^3 + pV'_{xc}x$
Cusp	$\pm \frac{1}{4}x^4 + \frac{u}{2}x^2 + vx$	비대칭 분기점	$\frac{1}{6}V_{xxx}x^3 + \frac{1}{2}pV'_{xc}x^2 + \epsilon\dot{V}_{cc}x$
		안정대칭 분기점	$\frac{1}{24}V_{xxxx}x^4 + \frac{1}{2}pV'_{xc}x^2 + \epsilon\dot{V}_{cc}$
		불안정 대칭 분기점	$-\frac{1}{24}V_{xxxx}x^4 + \frac{1}{2}pV'_{xc}x^2 + \epsilon\dot{V}_{cc}$
Swallowtail	$\frac{1}{5}x^5 + \frac{u}{3}x^3 + \frac{v}{2}x^2 + wx$	-	-
Butterfly	$\pm \frac{1}{6}x^6 + \frac{t}{4}x^4 + \frac{u}{3}x^3 + \frac{v}{2}x^2 + wx$	-	-
Hyperbolic Umbic	$x^3 + y^3 + wxy - ux - vy$	Homeoclinical Bifurcation Point	$\frac{1}{6}V_{yyy}y^3 - \frac{1}{2}V_{xyy}x^2y + \frac{1}{2}p(V'_{xc}x^2 + V'_{yc}y^2)$
		Monoclinical Bifurcation Point	$+V'_2\epsilon_1x + V'_3\epsilon_2y$
Elliptic Umbic	$\frac{1}{3}x^3 - xy^3 + w(x^2 + y^2) - ux + vy$	Anticlinical Bifurcation Point	$\frac{1}{6}V_{yyy}y^3 + \frac{1}{2}V_{xyy}x^2y + \frac{1}{2}p(V'_{xc}x^2 + V'_{yc}y^2)$
Parabolic Umbic	$Umbilicy^4 + x^2y + wx^2 + ty^2 - ux - vy$	-	-

$p: P - P_c$, $\epsilon_1, 2$: Imperfection Parameters, t, u, v, w : Unfolding Parameters

$$V_x: \frac{\partial V}{\partial x}, V'_x: \frac{\partial V}{\partial p}, V: \frac{\partial V}{\partial \epsilon} \quad V^1: \frac{\partial V}{\partial \epsilon_1}, V^2: \frac{\partial V}{\partial \epsilon_2}$$

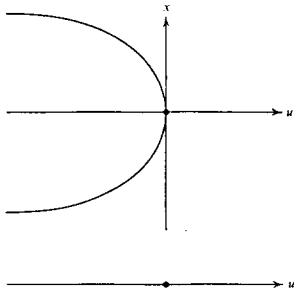


그림3. Fold 카타스트로피의 분기집합

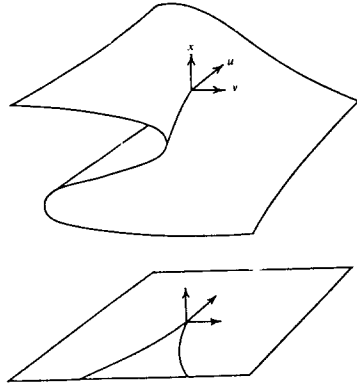


그림4. Cusp 카타스트로피의 평형곡면 및 분기집합

카타스트로피를 1개의 파라메타의 방향을 반대로 하므로써 불안정 대칭분기점과 같은 특징을 보게 되는데 이것은 clamped arch등의 좌굴현상을 설명하는 정성적 모델로 이용할 수 있다.

(다) Swallowtail 카타스트로피

Corank 1, Codimension 3로서 제어파라메타가 3개인 고차의 카타스트로피로서 Parabolic Umbilic, Double Cusp 등과 같은 Corank 2인 카타스트로피의 기저를 형성하며 구조불안정의 관점에서 비선형 탄성지반위의 보의 불안정 현상을

설명하는 모델로서 이용할 수 있다. 그림5에는 Swallowtail 카타스트로피의 분기집합이 표시되어 있다.

(라) Butterfly 카타스트로피

Corank 1, Codimension 4로서 제어파라메타를 4개 가지며 비선형지반위의 Spring의 좌굴을 설명하는 모델로서 이용 가능하다. 또한 이것은 보강된 셸 구조물의 복잡한 좌굴현상의 기저를 이루며

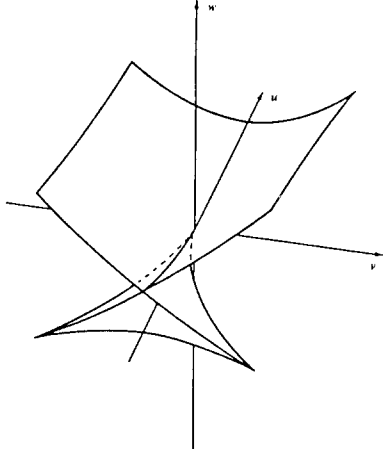


그림5. Swallowtail 카타스트로피의 분기집합

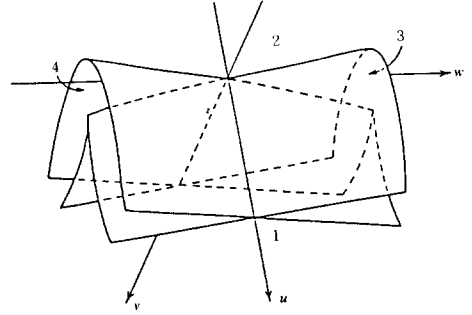


그림7. Hyperbolic Umbilic 카타스트로피의 분기집합

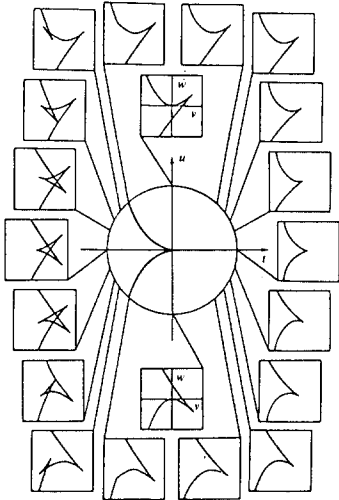


그림6. Butterfly 카타스트로피의 분기집합

Zeeman에 의하면 유체정력학적 불안정현상을 설명하는데 이것을 이용할 수 있으며 또한 사회과학 분야에서의 불안정현상의 설명에 이용할 수 있다. 그림6에는 Butterfly의 분기집합이 표시되어 있다.

(마) Hyperbolic Umbilic 카타스트로피

Corank 2, Codimension 3인 카타스트로피로서 2개의 좌굴모드가 동시에 발생하게 된다. 초기결함 민감도를 나타내는 분기집합은 그림7에 나타나 있다. 보강판 및 구형 쉘의 Interactive Buckling을 설명하는 정성적모델로 이용할 수 있으며 Thompson, Tvergaard가 강력한 종보강재를 갖는

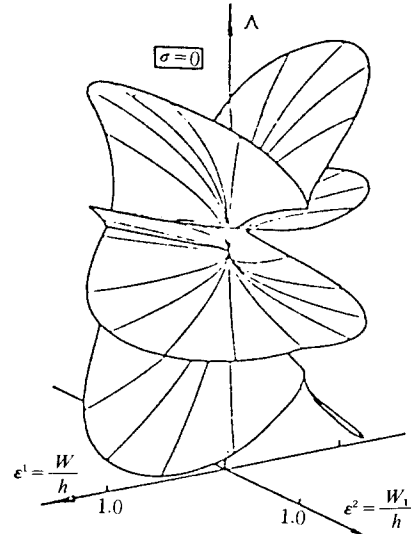


그림8. 최적화 광폭보강판에 대한 초기결함 민감도곡면 (by Tvergaard & Thompson)

최적화 광폭판에 대해 수행한 초기결함 민감도해석 결과인 그림8과 일치함을 알 수 있다[10].

(바) Elliptic Umbilic 카타스트로피

Corank 2, Codimension 3인 카타스트로피로서, Guyed Strut에서의 2개의 모드가 동시에 발생하는 불안정 현상을 설명하는 정성적 모델로 이용할 수 있으며 그 분기집합은 그림9에 표시된다.

(사) Parabolic Umbilic 카타스트로피

Corank 2, Codimension 4인 카타스트로피로서 Guided Cantilever, 원통형 쉘의 구조불안정형상 [21]을 설명하는 정성적 모델로 이용할 수 있으며 그림10에는 그 분기집합이 표시되어 있다.

4. 고찰

구조공학 분야에서는 카타스트로피 이론이 대두

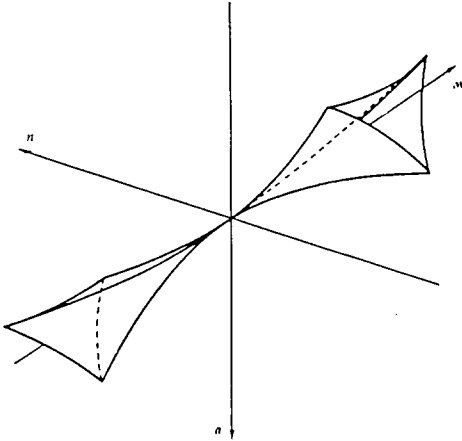


그림9. Elliptic Umbilic 카타스트로피의 분기집합

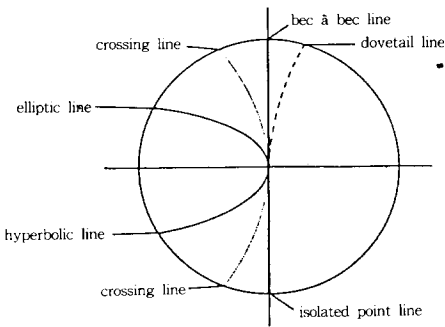
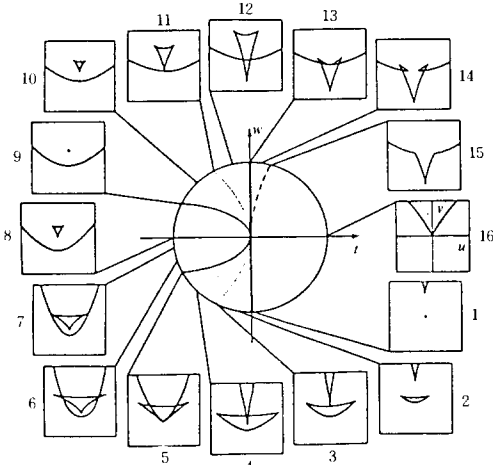


그림10. Parabolic Umbilic 카타스트로피의 분기집합

되기 이전에도 Koiter, Thompson 등에 의해 독자적인 방법으로 정적 불안정현상인 좌굴특성에 대한 정량적 해석이 수행되었으며 카타스트로피 이론의 등장으로 인해 복잡한 구조물의 불안정 현상

을 몇개의 카타스트로피의 혼합된 형태로 해석할 수 있는 수학적 근거가 보강되었다고 할 수 있다. 또한 정량적인 방법론에 의해서는 복잡한 구조물의 초기결함민감도 해석에 매우 많은 계산량이 소요되나 카타스트로피 이론에 의하면 구조물의 위상적 특성을 유지하면서 그 포텐셜 함수를 위상사상, Determinacy, Unfolding에 의해 필수적인 최소의 파라메타만을 포함하는 Canonical 형태의 함수로 만들고 이러한 변형된 함수를 사상의 특이성을 이용하여 제어파라메타 평면에 투영하면 초기결함 민감도를 의미하는 분기집합을 용이하게 얻을 수 있다. 물론 카타스트로피 이론은 포텐셜에너지에 지배되는 계에만 적용할 수 있다는 단점이 있으나 최근 이러한 단점을 보완, 비보존 소산계에 적용가능한 이론을 Golubitsky & Schaeffer가 발표한 이래 파괴역학 및 탄소성 영역에서의 불안정 현상의 규명에 카타스트로피 이론을 적용하고자 하는 연구가 이루어지고 있다.

결론적으로 구조물의 초기결함 민감도해석과 관련하여 카타스트로피 이론을 적용할 수 있는 가능성을 다음과 같이 요약할 수 있을 것으로 사료된다.

첫째, 카타스트로피 이론은 현재까지 수행된 구조불안정현상의 분류에 대한 일반화된 수학적근거를 제공해 준다.

둘째, 카타스트로피 이론에 의하면 구조물에서의 초기결함 민감도특성을 위상수학적인 방법론에 의해 적은 계산량으로 구할 수 있다.

셋째, 복잡한 좌굴현상 예를 들면 Modal Interaction, Compound Buckling의 현상이 발생하는 경우 좌굴점근처에서의 분기특성, 초기결함 민감도특성을 효과적으로 규명하는 모델로서 고차 카타스트로피를 이용할 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] W.T. Koiter, "On the Stability of Elastic Equilibrium", Dissertation, Delft Holland, 1945.
- [2] B. Budiansky, "Theory of Buckling and Post-buckling Behavior of Elastic Structure", Advances in Applied Mechanics vol.14, Academic

- press, 1974.
- [3] J.W. Hutchinson & W.T. Koiter, "Postbuckling Theory", Applied Mechanics Review 23, pp1 353–1366, 1970.
- [4] R. Thom, "Stabilite Structurale et Morphogenese", Benjamin, N.York, 1972.
- [5] J.M.T. Thompson & G.W. Hunt "A General Theory of Elastic Stability", John Wiley & Sons, 1974.
- [6] J.M.T. Thompson & G.W.Hunt "Elastic Instability Phenomena", John Wiley & Sons, 1983.
- [7] R. Gilmore, "Catastrophe Theory for Scientists and Engineers", Wiley–Interscience, 1981.
- [8] G.W. Hunt, "Imperfection Sensitivity of Semi–symmetric Branching", Proc. R. Soc. London A357, 1977.
- [9] J.M.T. Thompson & Z. Gaspar, "A Buckling Model for the Set of Umbilic Catastrophe", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. V82, 1977.
- [10] G.W. Hunt, "An Algorithm for the Nonlinear Analysis of Compound Bifurcation", Phil. Trans. R. Soc. London vol.300, A1455, 1981.
- [11] E.C. Zeeman, "Catastrophe Theory", Addison Wesley, 1977.
- [12] T. Poston & Ian Stewart, "Catastrophe Theory and Its Applications", Pitman, 1981.
- [13] Z. Gaspar, "Critical Imperfection Territory", J. of Structural Mechanics, 11(3), pp297–325, 1983.
- [14] M. Golubitsky & D. Schaeffer, "A Theory for Imperfect Bifurcation via Singularity Theory", Comm. on Pure and Applied Mathematics Vol. XXII, pp21–98, 1979.
- [15] P. Samuels, "Bifurcation and Limit Point Instability of Dual Eigenvalue 3rd Order Systems", Int. J. Solids Structures, Vol.16, pp7 43–756, 1980.
- [16] P.J. Wicks, "A Classification of Behavior in Doubly–symmetric Compound Branching", Int. J. Mech. Science, Vol.30, No.11, pp821–833, 1988.
- [17] Alberto Carpinteri, "A Catastrophe Theory Approach to Fracture Mechanics", Int. J. Fract. Mech., Vol.44, pp57–69, 1990.
- [18] M. Potier Ferry, "Towards a Catastrophe Theory for the Mechanics of Plasticity and Fracture", Int. J. Eng. Science, Vol.23, No. 8, pp821–837, 1985.
- [19] Y. Niwa & Watanabe, "A New Approach to Predict the Strength of Compressed Stiffened Plates", Proc. JSCE Vol.2, No.2, pp35–44, 1985.
- [20] E. Watanabe & H. Isami, "A Unified Approach to Elasto–plastic Strength of Compressed Cylindrical Shells", Proc. JSCE Vol4, No.2, pp131–139, 1987.
- [21] D. Hui, J.S. Hansen, "The Parabolic Umbilic Catastrophe and Its Application in the Theory of Elastic Stability", Quart. Appl. Math., pp2 01–220, July, 1981.