

최소대역폭 선로부호화에 관한 이론적 연구

(A Theoretical Study on Minimum-Bandwidth Line Coding)

金 大 榮*, 姜 昌 求**, 裴 澈*** 吳 承 燁*

(Dae Young Kim, Chang Goo Kang, Cheol Bae, and Seung Hyeub Oh)

要 約

본 논문에서는 이론적인 규명을 통해 최소대역폭 선로부호 시스템에 관한 몇가지 새로운 결과들을 제시하였다. 첫째 DSV(digital sum variation)와 ASV(alternate sum variation)라 불리는 2개의 시스템 매개변수를 도입하여 제로(0)주파수 및 나이퀴스트(Nyquist)주파수에서 전력 분광 영점이 되기 위한 충분조건을 구하였다. 둘째 임의의 전송 신호레벨을 갖는 최소대역폭 선로부호에 대하여 ASV와 신호레벨을 변수로하여 눈(eye)의 최소 한계 함수와 눈폭(eye width)을 구하였다. 셋째, PR(partial response)시스템이라고 알려진 선형 최소대역폭 시스템에 대하여 시스템 다항식의 계수로서 DSV와 ASV 값을 구하였다. 마지막으로 DSV, ASV, 전력 분광 영점, 시스템 다항식 및 최소대역폭 특성 사이의 상호 관계에 대하여 요약 정리하였다.

Abstract

In this paper, some new results on minimum-bandwidth system are presented. First, we state sufficient condition for the existance of a power spectral null at the zero frequency and Nyquist frequency.

Second, eye boundary functions and eyewidth are obtained for minimum-bandwidth systems of arbitrary numbers of transmitted symbol levels. Third, for linear minimum-bandwidth systems usually known as PR systems, we derived formulars for evaluating DSVs and ASVs in terms of the coefficients of the system polynomials and using formulars, we obtain DSVs and ASVs of various PR systems. Last, the relations among DSV, ASV, power spectral nulls, system polynomial nulls, and the minimum-bandwidth property are summarized.

I. 서 론

디지털 데이터 전송시스템에 있어서 데이터를 전

송할때 선로부호의 선택은 중요하며 이들 선로부호의 주요한 특성중 최소대역폭 특성을 갖는 선로부호를 사용하면 전송매체를 보다 효율적으로 이용할 수 있게 된다.^{[1]-[3]} 선로부호에 대한 두 가지 매개변수 ASV(alternate sum variation)와 DSV(digital sum variation)가 도입되었으며^[4] 이들 변수들은 최소대역폭 선로부호를 개발하는데 유용한 도구로 사용할 수 있을뿐만 아니라 선로부호의 연구에 많은 도움을 주었다.^[6]

최근에는 전송신호레벨이 홀수개인 시스템에서

*正會員, 忠南大學校 電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., Choongnam Nat'l Univ.)

**正會員, 韓國電子通信研究所 符號2室
(Coding Section 2, ETRI)

***正會員, 콘트롤데이터코리아(주)기술부
(Dept. of Tech., Control Data Korea Ltd.)

接受日字: 1990年 4月 6日

ASV가 유한하면 그 선로부호는 최소대역폭 특성을 갖는다는 것이 증명되었고, 또한 DSV가 유한하면 선로부호는 무적류(DC free) 특성을 갖는다는 것이 증명되었다.^{[8][9]}

본 논문에서는 최소대역폭 선로부호와 관련하여 이론적인 규명을 통해 다음과 같은 결과들을 얻어내었다. 첫째, DSV가 유한하면 제로 주파수에서 전력 분광 영점이 존재하기에 충분하며, 아울러 ASV가 유한하면 Nyquist 주파수에서 전력 분광 영점이 존재하기에 충분하다는 것을 증명하였다. 둘째, 이미 증명된 전송 신호 레벨이 홀수개인 전송 시스템에서 ASV가 유한하면 그때의 선로부호는 최소대역폭을 갖기에 충분하다는 것을 본 논문에서는 보다 일반화하여 임의의 다중 신호 레벨을 가진 전송 시스템에도 적용 가능하다는 것을 입증하였고, 그 결과로 임의의 ASV 값과 임의의 전송 신호 레벨을 가진 최소대역폭 시스템에 대하여 최악의 눈모양에 관한 일반식과 그때의 눈의 하한 폭을 구하였다. 셋째, 흔히 PR(partial response) 시스템으로 알려진 선형 시스템에서,^[5] 시스템 다항식 $F(D)$ 에서 $F(-1)=0$ 인 시스템은 유한한 ASV를 가지고 있고, $F(1)=0$ 인 시스템은 유한한 DSV를 가지고 있다는 것을 보였다. 그리고 그것을 증명한 결과로 시스템 다항식 $F(D)$ 의 계수를 사용함으로써 PR 시스템들의 DSV와 ASV 값을 도출하는 식들을 구하였다. 또한 이 식들을 사용하여 여러가지 PR 시스템들의 DSV와 ASV를 구하였으며, 이들 PR 시스템들의 DSV와 ASV 값에 따른 눈의 하한 폭(lower-bound eyewidth)과 실제적인 눈폭을 서로 비교하였다. 마지막으로 DSV, ASV, 전력 분광 영점, 시스템 다항식 및 최소대역폭 성질 사이의 상호 관계에 관하여 요약하였다.

II. 최소대역폭 시스템 모형

최소대역폭 시스템을 그림 1 과 같이 모형화 할 수 있다.

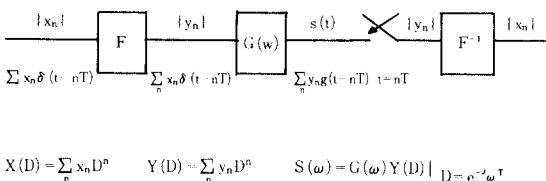


그림 1. 최소대역폭 시스템 모형
Fig. 1. Minimum-band width system model.

시간 영역에서 원천 부호열 $x(t)$ 는

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta(t-nT) \tag{1}$$

로 표시되고, 부호 변환기 F에 의해 채널 부호열로 변환(mapping)되어

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \delta(t-nT) \tag{2}$$

로 표현된다. 여기에서 부호 레벨은 1로 균등간격으로 정규화되어 0에 대해 대칭되어 있다고 가정한다. 특별한 경우로서 부호 변환기 F가 선형일 때 즉, PR 변환기일 때는 원천 부호열과 채널 부호열 사이에는

$$y_n = \sum_{m=0}^{N-1} x_{n-m} f_m \tag{3}$$

의 관계가 성립되고, 이관계는 다음과 같이 변환된다.

$$Y(D) = X(D) F(D) \tag{4}$$

여기에서

$$D = e^{-j\omega T} \tag{5}$$

이고, $F(D)$ 는 시스템 다항식으로서 다음과 같다.^[5]

$$F(D) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n D^n \quad N \geq 2, f_0 \neq 0, f_{N-1} \neq 0 \tag{6}$$

펄스 성형기 $G(\omega)$ 는 이상적인 Zero ISI(inter-symbol interference)의 최소대역폭 여파기로서 주파수 응답 $G(\omega)$ 는

$$G(\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| \leq \pi/T \\ 0, & \text{기타} \end{cases} \tag{7}$$

로 주어지고, 시간응답 $g(t)$ 는

$$g(t) = \frac{\sin \pi t/T}{\pi t/T} \tag{8}$$

로 주어진다. 그리고 $G(\omega)$ 의 출력측 선로 신호 $s(t)$ 는 $y(t)$ 와 $g(t)$ 를 곱함으로써

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \frac{\sin \pi (t-nT)/T}{\pi (t-nT)/T} \tag{9}$$

$$= \frac{T}{\pi} \sin \frac{\pi t}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n y_n}{t-nT} \tag{10}$$

로 표시할 수 있다. 한편 $S_y(\omega)$ 를 $y(t)$ 의 전력 분광 밀도라고할 때 전력 분광 밀도 $S_s(\omega)$ 는

$$S_s(\omega) = S_y(\omega) |G(\omega)|^2 \tag{11}$$

$$= \begin{cases} T^2 S_y(\omega), & 0 < |\omega| \leq \pi/T \\ 0, & \text{기타} \end{cases}$$

로 나타내어진다. 우리는 여기서 최소대역폭 시스템의 $S_s(\omega)$ 는 단지 $S_y(\omega)$ 에 의해서만 결정된다는 것을 알 수 있다. 특별히 선형 최소대역폭 시스템의 경우 $S_y(\omega)$ 는

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) |\zeta(\omega)|^2 \tag{12}$$

로 표현할 수 있다. 여기서 $\zeta(\omega)$ 는 $f(t)$ 의 Fourier 변환으로

$$\zeta(\omega) = F(D) \Big|_{D=e^{-j\omega T}} \tag{13}$$

를 의미한다.

Ⅲ. 전력 분광 영점을 위한 충분조건

채널부호열 $y(t)$ 와 관련하여 두 가지 매개변수 즉, DSV(digital sum variation)와 ASV(alternate sum variation)는 다음과 같이 정의된다.^[5]

$$DSV \triangleq \text{Max} \left| \sum_n y_n \right| \tag{14}$$

$$ASV \triangleq \text{Max} \left| \sum_n (-1)^n y_n \right| \tag{15}$$

이같은 정의를 바탕으로 다음과 같은 전력 분광 영점에 관한 정리를 세우고 이를 증명한다.

[정리 1] DSV가 유한하면 제로 주파수에서 $S_y(\omega)$ 의 스펙트럼 영점이 존재하기 위한 충분조건이 된다. 곧 DSV가 유한하면 $S_y(0) = 0$ 이다.^[6]

[증명] 식(2)로 표시된 $y(t)$ 의 중간부분만을

$$y_N(t) = \sum_{n=-N}^N y_n \delta(t-nT) \tag{16}$$

로 나타내고, $y_N(t)$ 를 Fourier 변환하면

$$Y_N(\omega) = \sum_{n=-N}^N y_n e^{-j\omega T} \tag{17}$$

가 된다. 따라서 $Y_N(\omega)$ 의 직류 성분은 DSV의 정의에 의해

$$|Y_N(0)| = \left| \sum_{n=-N}^N y_n \right| \leq DSV \tag{18}$$

이 되며, 따라서 임의의 열 $\{y_{-N}, \dots, y_N\}$ 로 구성된 $|Y_N(0)|$ 의 제곱은

$$\langle |Y_N(0)|^2 \rangle \leq DSV^2 \tag{19}$$

로 표현할 수 있다. 여기서 $\langle \cdot \rangle$ 는 random process의 ensemble average를 표시한다. 그런데 $S_y(\omega)$ 는

$Y_N(\omega)$ 으로 부터 얻을수가 있다!^[10]
곧,

$$S_y(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT} \langle |Y_N(\omega)|^2 \rangle \tag{20}$$

그러므로 DSV가 유한하면 $S_y(\omega)$ 의 직류 성분 $S_y(0)$ 는

$$S_y(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT} \langle |Y_N(0)|^2 \rangle \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT} DSV^2 = 0 \tag{21}$$

가 된다.

[정리 2] ASV가 유한하면 선로 부호가 Nyquist 주파수^[6]에서 $S_y(\omega)$ 의 스펙트럼 영점이 존재하기 위한 충분조건이 된다. 즉, $S_y(\pi/T) = 0$ 이다.

[증명] Nyquist 주파수에서의 $S_y(\omega)$ 를 구하기 위해 먼저 $|Y_N(\pi/T)|$ 를 구하면,

$$|Y_N(\pi/T)| = \left| \sum_{n=-N}^N (-1)^n y_n \right| \leq ASV \tag{22}$$

이 되며, 따라서

$$\langle |Y_N(\pi/T)|^2 \rangle \leq ASV^2 \tag{23}$$

로 표현될 수 있다. 그러므로 만일 ASV가 유한하면

$$S_y(\pi/T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT} \langle |Y_N(\pi/T)|^2 \rangle \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT} ASV^2 = 0 \tag{24}$$

가 되는 것이다.

Ⅳ. 최소대역폭 선로부호의 눈폭 계산

종전의 논문[6]에서는 3차 신호레벨을 가진 시스템의 경우 ASV의 유한성은 선로부호가 최소대역폭 특성을 갖기 위한 충분조건이 됨을 증명하였고, 그것을 연장 적용시켜 임의의 홀수차 신호레벨을 가진 최소대역폭 시스템에서 ASV와 신호레벨의 차수가 주어졌을 때 최악의 눈 모양(eye pattern)의 경계식과 눈의 하한폭을 구하였다.^[7] 여기에 좀더 연장하여 신호레벨이 임의의 짝수차일 때에도 같은 착상을 할 수 있을 것이다. 그리고 더 나아가 신호레벨이 짝수와 홀수차에 구분 없이 성립하는 최악의 경우 눈 형태의 경계에 관한 일반식을 유도하고, 그때의 눈의 하한폭도 구할 수 있을 것으로 예상된다. 먼저 홀수차 신호레벨을 가진 시스템의 경우를 간단히 생각해 본다.

그림 2에 홀수차(5차) 신호레벨 시스템의 눈 모양이 나타나 있고 눈 모양이 제로를 중심으로 상하로

대칭되어 있으므로 3차 신호레벨 시스템의 경우는 $-1, 0, 1$ 의 3가지 신호레벨을 갖게되며, 5차 신호레벨 시스템의 경우는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5가지 신호레벨을 갖게 된다. 그림 2을 보고 임의의 홀수차 신호레벨 시스템에서 ASV 및 눈 번호에 따라 최악의 경우 눈 형태를 이루기 위한 신호레벨의 열을 유추할 수 있는데, 5차 신호레벨 시스템에서 ASV가 4이고 눈 번호가 1인 최악의 경우 눈 형태를 이루기 위한 신호레벨의 열이 그림 4에 나타나 있다.

다음에 짝수차 신호레벨을 가진 최소대역폭 시스템을 생각해 본다. 그림 3은 짝수차(6차) 신호레벨 최소대역폭 시스템의 눈 모양을 나타내고 있다. 2차 신호레벨 시스템의 경우는 $-1/2, 1/2$ 의 두가지 신호레벨을 갖고, 6차 신호레벨 시스템의 경우는 $-5/2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2$ 의 여섯가지 신호레벨을 갖게된다. 홀수차 신호레벨 최소대역폭 시스템에서와 마찬가지로 6차 신호레벨 시스템에서 ASV가 6이고 눈 번호가 4인 최악의 경우 눈 형태를 이루기 위한 신호레벨의 열이 그림 5에 나타나있다. 여기서 엄두해들 점은 짝수차 신호레벨 시스템은 신호레벨이 0값을 가질 수 없다는 것이다. 따라서 ASV가 변하지않고, 눈의 폭에 영향을 최소로 하기위해서는 좌

우로 마지막 신호펄스와같은 방향으로 $1/2$ 의 신호레벨을 갖는 신호펄스가 $-\infty$ 및 ∞ 까지 계속 이어져야하는 것이다.

이제 임의의 차수의 신호레벨을 갖는 최소대역폭 시스템에 대하여 최악의 눈 모양의 경계에 관한 일반식을 구하기 위해 몇가지 매개 변수를 정의한다.

M ≡ 신호레벨의 차수

$$= 2p + 1 \quad \text{단, } p > 0 \quad (25)$$

A ≡ ASV 값

$$= pm + r \quad \text{단, } m > 0, 0 \leq r < p \quad (26)$$

i ≡ 눈의 번호의 절대치

$$(27)$$

여기에서 M, A, i, m은 정수이고 p, r은 홀수차일 때 정수, 짝수차 일때는 정수+1/2이 된다. 그러므로 M 값이 주어지면 p 값을 얻을 수 있고, A값이 주어지면 m과 r 값을 구할 수 있다. 예를들어 5차 신호레벨 시스템에서 ASV가 7이면 $M=5, A=7, p=2, m=3, r=1$ 이 되고 6차 신호레벨 시스템에서 ASV가 9면 $M=6, A=9, p=5/2, m=3, r=3/2$ 이 된다. 또한 매개변수 p와함께 함수 연산자 $f(a, b)$ 는 다음과 같이 정의한다.

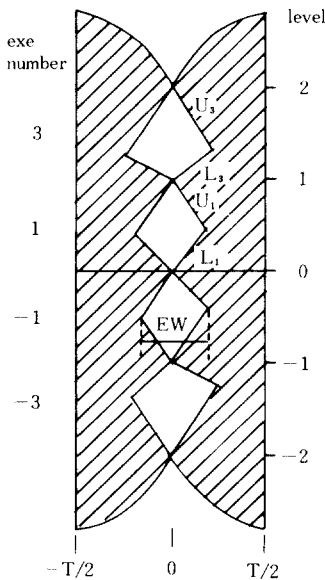


그림 2. 홀수차(5차) 신호레벨 시스템의 눈 모양
 Fig. 2. Eye pattern of odd(5th)order signal level system.

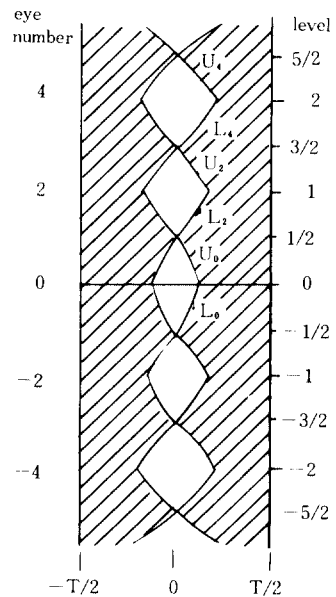
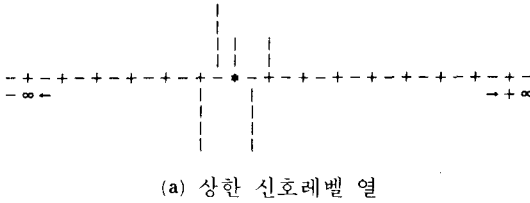


그림 3. 짝수차(6차) 신호레벨 시스템의 눈 모양
 Fig. 3. Eye pattern of even(6th) order signal level system.

*** LEVEL=5, ASV=4, EYE#=1, U1***



*** LEVEL=5, ASV=4, EYE#=1, L1***

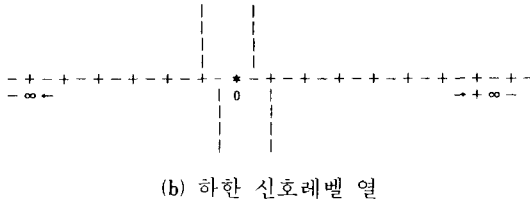
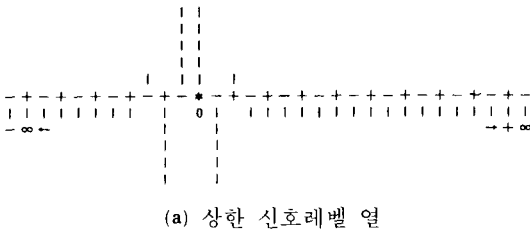


그림 4. 5차 레벨 최소대역폭 시스템의 최악 경우 신호레벨열

Fig. 4. Pulse pattern of 5th level MB system at the worst case.

*** LEVEL=6, ASV=6, EYE#=4, U4***



*** LEVEL=6, ASV=6, EYE#=4, L4***

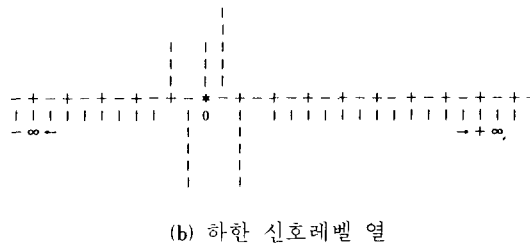


그림 5. 6차 레벨 최소대역폭 시스템의 최악 경우 신호레벨열

Fig. 6. Pulse pattern of 6th level MB system at the worst case.

f(a, b) ≜ (28)

$$\begin{cases}
 p & : b > p \\
 b & : 0 < b \leq p \text{ 이고, } p \text{ 및 } b \text{ 값이 정수 } +1/2 \\
 & \text{또는 } p \text{ 값이 정수일 때} \\
 b-1/2 & : 0 < b \leq p \text{ 이고, } p \text{ 값이 정수 } +1/2 \text{ 이고,} \\
 & b \text{ 값이 정수일 때} \\
 1/2 & : b \leq 0 \text{ 이고, } p \text{ 값이 정수 } +1/2 \text{ 이고, } a \text{ 값이} \\
 & \text{홀수일 때} \\
 -1/2 & : b \leq 0 \text{ 이고, } p \text{ 값이 정수 } +1/2 \text{ 이고, } a \text{ 값이} \\
 & \text{짝수일 때} \\
 0 & : b \leq 0 \text{ 이고, } p \text{ 값이 정수일 때}
 \end{cases}$$

이제 위와 같은 매개 변수와 함수 연산자를 사용하여 ASV가 A이고 신호레벨이 M차인 최소대역폭 시스템에 대한 최악의 경우 i번째 눈 모양에 관한 일반식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 U_i(t) &= \frac{t}{\pi} \sin \frac{\pi t}{T} \\
 & \left\{ \frac{(i+1)/2}{t} - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{p}{nT-t} - \frac{f(m, p+r-(i+1)/2)}{mT-t} \right. \\
 & \frac{f(m+1, p+r-(i+1)/2) - f(m, p+r-(i+1)/2)}{(m+1)T-t} \\
 & \frac{f(m+2, p+r-(i+1)/2) - f(m, p+r-(i+1)/2)}{(m+2)T-t} \\
 & \left. \frac{f(m+1, p+r-(i+1)/2) - f(m, p+r-(i+1)/2)}{(m+2)T-t} \right\} \\
 & - \sum_{n=m+3}^{\infty} \frac{f(n, 0)}{nT-t} - \sum_{n=1}^m \frac{p}{nT+t} - \frac{f(m, r)}{(m+1)T+t} - \frac{f(m+1, r-f(m, r))}{(m+2)T+t} \\
 & - \sum_{n=m+3}^{\infty} \frac{f(n+1, 0)}{nT+t} \quad \text{단, } i \geq 0, 0 \leq t \leq T/2 \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_i(t) &= \frac{t}{\pi} \sin \frac{\pi t}{T} \\
 & \left\{ \frac{(i-1)/2}{t} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{p}{nT+t} + \frac{f(m, p+r-(i-1)/2)}{mT+t} \right. \\
 & + \frac{f(m+1, p+r-(i-1)/2) - f(m, p+r-(i-1)/2)}{(m+1)T+t} \\
 & + \frac{f(m+2, p+r-(i-1)/2) - f(m, p+r-(i-1)/2)}{(m+2)T+t} \\
 & \left. \frac{f(m+1, p+r-(i-1)/2) - f(m, p+r-(i-1)/2)}{(m+2)T+t} \right\} \\
 & + \sum_{n=m+3}^{\infty} \frac{f(n, 0)}{nT+t} + \sum_{n=1}^m \frac{p}{nT-t} + \frac{f(m, r)}{(m+1)T-t} + \frac{f(m+1, r-f(m, r))}{(m+2)T-t} \\
 & + \sum_{n=m+3}^{\infty} \frac{f(n+1, 0)}{nT-t} \quad \text{단, } i > 1, 0 \leq t \leq T/2 \quad (30)
 \end{aligned}$$

$$L_0(t) = -U_0(t) \quad \text{단, } i=0, 0 \leq t \leq T/2 \quad (31)$$

식(29)에서 $U_i(t)$ 는 i번째 눈의 우측 상한 경계식을 나타내고, 식(30)에서 $L_i(t)$ 는 i번째 눈의 우측 하한

경계식을 나타낸다. 좌측편의 경우 즉, $-T/2 \leq t \leq 0$ 의 경우는 식(29)와 식(30)에서 t 를 $-t$ 로 대치하면 된다. 또한 그림2와 그림3에서와 같이 신호레벨 0의 아래(-)방향의 눈 경계는 신호레벨의 위(+)방향의 투영된 상(mirror image)으로 나타난다. 식(29)및 식(30)을 이용하여 임의의 차수인 최소대역폭 시스템에서 임의의 ASV 및 눈 변조에 대한 최악의 눈 모양을 구할 수 있으며 또한 그때의 신호레벨의 열을 구할 수가 있다.

위의 식들을 이용하여 최악의 경우에 있어서 눈의 하한 폭(eye width)을 구했는데 그 결과는 표1과 같다. 본 논문에서는 눈의 폭이 소수점 이하 3자리까지만 고려하였으며 짝수차 신호레벨 시스템에 대해서는 눈 폭에 변동을 주지 않는 범위내에서 계산주기를 truncate 하여 (최우150T) 계산하였다. 표1에서와 같이 M과 i가 고정된 경우 ASV가 클수록 눈의 폭은 작아지고, M과 ASV가 고정된 경우 바깥쪽(i가 큰쪽)의 눈 폭이 안쪽(i가 작은쪽)의 눈 폭보다 넓은 것을 알 수 있다. 이 사실은 다른 시스템에서도 판명된 바 있다.¹⁾ 결국 우리는 신호레벨의 차수에 무관하게 일반적으로 ASV가 유한한 시스템에서는 최악의 경우 눈의 하한폭이 0이 아님을 알게 되었고 ASV의 유한성은 선로부호의 최소대역폭 특성을 갖기 위한 충분조건임을 확인하였다.

V. 선형 최소대역폭 시스템에 대한 이론적 고찰

만일 어떤 시스템이 식(6)으로 표시할 수 있는 선형부호기 F를 가지고 있으면 PR시스템이라고 한다.²⁾ 이러한 PR 시스템에 대해 다음과 같은 정리를 세울 수 있다.

[정리3] 선형 시스템에서 $F(-1)=0$ 이면 ASV는 유한하다. 그러므로 $F(-1) \neq 0$ 인 선형 시스템은 최소대역폭 시스템이다.

[증 명] 식(3)과 식(15)에 관련하여

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^J (-1)^n y_n &= \sum_{n=1}^J (-1)^n \sum_{m=0}^{N-1} x_{n-m} f_m \\ &= \sum_{k=1-N+1}^{1-1} (-1)^k x_k \sum_{m=1-k}^{N-1} (-1)^m f_m \\ &\quad + \sum_{k=1}^{J-N+1} (-1)^k x_k \sum_{m=0}^{N-1} (-1)^m f_m \\ &\quad + \sum_{k=J-N+2}^J (-1)^k x_k \sum_{m=0}^{1-k} (-1)^m f_m \end{aligned} \quad (32)$$

이고, F(D)는 식(6)으로 표시할 수 있으므로

$$F(-1) = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n f_n = 0 \quad (33)$$

가 된다. 따라서 식(32)의 중간항은 0이 되어 무시된

다. 그리고 식(32)의 첫 항의 k를 i로 치환하여

$$i = k - 1 + N - 1 \quad (34)$$

으로 바꾸고, 마지막 항의 k를 j로 치환하여

$$j = k - J + N - 2 \quad (35)$$

로 바꾸면 식(32)은

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^J (-1)^n y_n &= \sum_{i=0}^{N-2} (-1)^{i-N+1+i} x_{i-N+1+i} \sum_{i=N-1}^{N-1} (-1)^m f_m \\ &\quad + \sum_{j=0}^{N-2} (-1)^{j-N+2+j} x_{j-N+2+j} \sum_{m=0}^{N-2-j} (-1)^m f_m \end{aligned} \quad (36)$$

로 쓸 수 있다. 그런데 i, j는 모의지수(dummy indices)이므로 식(36)는 다음과 같이 재 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^J (-1)^n y_n &= \sum_{r=0}^{N-2} (-1)^{i-N+1+r} x_{i-N+1+r} \sum_{m=N-1-r}^{N-1} (-1)^m f_m \\ &\quad + \sum_{r=0}^{N-2} (-1)^{j-N+2+r} x_{j-N+2+r} \sum_{m=0}^{N-2-r} (-1)^m f_m \end{aligned} \quad (37)$$

따라서 ASV를 구하기 위해서는 식(37)을 극대화해야 한다. 그런데 여기에서 모든 $r=0, 1, \dots, N-2$ 에 대하여

$$(-1)^{i-N+1+r} x_{i-N+1+r} = (-1)^{j-N+2+r} x_{j-N+2+r} \quad (38)$$

이 성립한다고 가정하면 식(37)은

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^J (-1)^n y_n &= \sum_{r=0}^{N-2} (-1)^{j-N+2+r} x_{j-N+2+r} \sum_{m=0}^{N-1} (-1)^m f_m \\ &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

가 된다. 그러므로 식(37)의 극대값은 식(38)과 대비하여 다음의 경우에 구할 수 있음을 알 수 있다. 즉,

$$(-1)^{i-N+1+r} x_{i-N+1+r} = -(-1)^{j-N+2+r} x_{j-N+2+r} \quad (40)$$

식(40)를 식(37)에 대입하여 ASV를 구하면

$$\begin{aligned} ASV &= \max_{\{y_n\}} \left| \sum_{n=1}^J (-1)^n y_n \right| \\ &= \max_{\{x_r\}} \left| 2 \sum_{r=0}^{N-2} (-1)^{j-N+2+r} x_{j-N+2+r} \sum_{m=0}^{N-2-r} (-1)^m f_m \right| \end{aligned} \quad (41)$$

$\{x_r\}$ 에 걸친 극대값은 $J-N+2$ 항과는 무관하므로 식(41)은

$$\begin{aligned} ASV &= \max_{\{x_n\}} \left| 2 \sum_{n=0}^{N-2} (-1)^n x_n \sum_{m=0}^{N-2-n} (-1)^m f_m \right| \\ &= 2 \max_{\{x_n\}} \left| x_n \sum_{n=0}^{N-2} \left| \sum_{m=0}^{N-2-n} (-1)^m f_m \right| \right| \end{aligned} \quad (42)$$

표 1. 최소대역폭 시스템의 눈의 하한 폭
Table 1. Eye width for minimum-bandwidth system.

M : 신호레벨 차수

M	ASV (A)	eye# (i)	eye width (T)	M	ASV (A)	eye# (i)	eye width (T)
2	1	0	0.813	3	1	1	0.667
	2	0	0.506		2	1	0.357
	3	0	0.418		3	1	0.283
	4	0	0.373		4	1	0.245
	5	0	0.345		5	1	0.223
	6	0	0.324		6	1	0.207
	7	0	0.309		7	1	0.195
	8	0	0.297		8	1	0.135
	9	0	0.287		9	1	0.173
	10	0	0.278		10	1	0.172
	11	0	0.271		11	1	0.166
	12	0	0.265		12	1	0.162
	13	0	0.260		13	1	0.158
	14	0	0.255		14	1	0.154
	15	0	0.250		15	1	0.151
4	2	0	0.343	5	2	1	0.286
	2	2	0.400		2	3	0.400
	3	0	0.242		3	1	0.209
	3	2	0.264		3	3	0.250
	4	0	0.201		4	1	0.173
	4	2	0.217		4	3	0.189
	5	0	0.184		5	1	0.153
	5	2	0.187		5	3	0.164
	6	0	0.164		6	1	0.139
	6	2	0.170		6	3	0.146
	7	0	0.153		7	1	0.129
	7	2	0.158		7	3	0.135
	8	0	0.147		8	1	0.122
	8	2	0.148		8	3	0.125
	9	0	0.138		9	1	0.116
9	2	0.141	9	3	0.119		
10	0	0.132	10	1	0.111		
10	2	0.135	10	3	0.113		
11	0	0.129	11	1	0.106		
11	2	0.130	11	3	0.109		
12	0	0.124	12	1	0.103		
12	2	0.125	12	3	0.105		
13	0	0.120	13	1	0.100		
13	2	0.122	13	3	0.101		
14	0	0.118	14	1	0.097		
14	2	0.118	14	3	0.098		
15	0	0.114	15	1	0.095		
15	2	0.116	15	3	0.096		
6	3	0	0.204	7	3	1	0.182
	3	2	0.222		3	3	0.222
	3	4	0.286		3	5	0.286
	4	0	0.170		4	1	0.148
4	2	0.173	4	3	0.167		

M	ASV (A)	eye# (i)	exe width (T)	M	ASV (A)	eye# (i)	eye width (T)
6	4	4	0.200	7	4	5	0.200
	5	0	0.140		5	1	0.129
	5	2	0.148		5	3	0.138
	5	4	0.159		5	5	0.154
	6	0	0.126		6	1	0.114
	6	2	0.132		6	3	0.121
	6	4	0.141		6	5	0.129
	7	0	0.116		7	1	0.105
	7	2	0.110		7	3	0.110
	7	4	0.126		7	5	0.116
	8	0	0.110		8	1	0.098
	8	2	0.111		8	3	0.102
	8	4	0.115		8	5	0.106
	9	0	0.104		9	1	0.092
	9	2	0.105		9	3	0.095
9	4	0.108	9	5	0.098		
10	0	0.098	10	1	0.088		
10	2	0.099	10	3	0.090		
10	4	0.102	10	5	0.093		
8	4	0	0.145	9	4	1	0.133
	4	2	0.154		4	3	0.154
	4	4	0.182		4	5	0.182
	4	6	0.222		4	7	0.222
	5	0	0.127		5	1	0.114
	5	2	0.129		5	3	0.125
	5	4	0.143		5	5	0.143
	5	6	0.167		5	7	0.167
	6	0	0.113		6	1	0.102
	6	2	0.114		6	3	0.108
	6	4	0.121		6	5	0.118
	6	6	0.133		6	7	0.133
	7	0	0.099		7	1	0.093
	7	2	0.102		7	3	0.097
	7	4	0.108		7	5	0.102
7	6	0.114	7	7	0.111		

그런데 L을 입력 신호레벨의 차수라고 하면, x_n의 극대값은 (L-1)/2 이므로 식 (42)은

$$ASV = (L-1) \sum_{n=0}^{N-2} \left| \sum_{m=0}^{N-2-n} (-1)^m f_m \right| \quad (43)$$

가 되어 유한하고, 시스템 다항식 F(D)의 계수로 나타낼 수 있음을 알 수 있다.

[정리 4] 선형 시스템에서 F(1)=0이면 DSV는 유한하다.

[증명] F(1)=0로 놓고 식(3)을 식(4)에 대입하여

[정리 3]을 증명할 때와 같은 방법으로 임증이 가능하다.

[정리 4]의 증명의 결과

$$DSV = (L-1) \sum_{n=0}^{N-2} \left| \sum_{m=0}^{N-2-n} f_m \right| \quad (44)$$

을 얻어낼 수 있고, 식 (43)과 식(44)을 이용하여 입력 신호레벨의 차수가 임의인 L값을 갖는 경우 PR 시스템의 ASV값과 DSV값을 추출할 수 있게 된다. L=2인 경우의 결과가 표 2에 나와있다. F(1)=0일 때 DSV가 유한하고 F(-1)=0일 때 ASV가 유한함을 알 수 있다. 또한 표 2에는 표 1에서 얻어진 눈하한 폭의 값과 다른 논문 [5]에 보고된 실제의 눈폭이 비교되었다. 이미 언급된 것처럼 실제의 눈 폭은 눈의 하한 폭보다 항상 크거나 같음을 알 수 있다. 실제 눈 폭과 눈의 하한 폭이 같은 경우는 System #2(Duobinary)와 System #3(Modified Duobinary)인데,^[7] 이것은 Duobinary가 ASV=1인 최소대역폭 부호들 중에서 가장 좁은 눈 폭을 가짐을 뜻하고, Modified Duobinary는 ASV=2인 최소대역폭 부호들 중에서 가장 좁은 눈 폭을 가짐을 의미한다.

표 2. PR 시스템
Table 2. PR System.

System#	F(D)	DSV	ASV	M	1bEW	aEW
1	1-D	1	∞	3	.0	.0
2	1+D	∞	1	3	.667	.667
3	1-D ² = (1-D)(1+D)	2	2	3	.357	.357
4	1+D ² = (1+D)(1-D+D ²)	∞	3	3	.288	-
5	1-D ⁴ = (1-D)(1+D)(1+D ²)	4	4	3	.245	-
6	1+2D+D ² = (1+D) ²	∞	2	5	.286	.689
7	1+D-D ² -D ³ = (1-D)(1+D) ²	4	2	5	.286	.363
8	1-D-D ² +D ³ = (1-D) ² (1+D)	2	4	5	.173	.200
9	1-2D ² +D ⁴ = (1-D) ² (1+D) ²	4	4	5	.173	.249
10	2+D-D ² = (1+D)(2-D)	∞	3	5	.209	.243
11	2-D ² -D ⁴ = (1-D)(1+D)(2+D ²)	6	6	5	.139	.164

M : 2진 입력에 대한 출력의 레벨 차수
1bEW : 눈의 하한폭 (단위 T)
aEW : 실제 눈의 폭 (단위 T)
- : Not Available

VI. 검 토

지금까지 DSV, ASV, S_y(ω), 최소대역폭 성질, 그리고 선형 시스템의 F(D)에 관련된 몇가지 이론들에 관하여 고찰해 보았다. 이들중 [정리1],[정리 2]는 일반적인 경우이고 [정리 3]과 [정리 4]는 오직 선형 시스템에 관한 것이다.

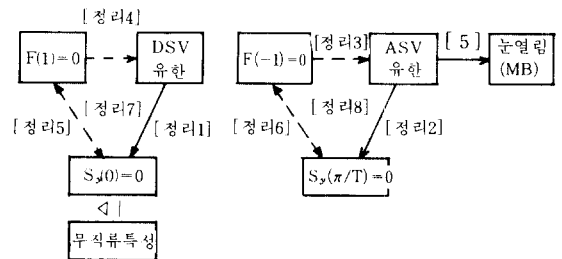
여기에서 선형 최소대역폭 시스템의 경우에 대해 좀더 자세히 살펴보자. 식(12)및 식(13)으로부터 F(1)=0이면 S_y(0)=0이고, F(-1)=0이면 S_y(π/T)=0 라

는 것을 알 수 있다. 반면 식(12)에서 S_y(ω)는 임의의 함수이므로 S_y(0)=0이 되려면 F(1)=0 이어야 하며, S_y(π/T)=0이 되려면 F(-1)=0이어야 한다. 그러므로 다음과 같은 정리가 성립되게 된다.

[정리5] F(1)=0과 S_y(0)=0는 동치이다.

[정리6] F(-1)=0과 S_y(π/T)=0는 동치이다.

[정리 1]에서 [정리 6]까지의 관계를 그림으로 나타낸 것이 그림6이다. 선형 시스템에서만 성립하는 것은 점선으로 나타내었으며, 화살표 방향의 번호는 성립하는 정리의 번호를 뜻한다. 그림 6에서 선형시스템의 경우 F(1)=0→DSV 유한→S_y(0)=0→F(1)=0임을 발견할 수 있고, F(-1)=0→ASV 유한→S_y(π/T)=0→F(-1)=0임을 알 수 있다.



(a) ω=0 일때 (b) ω=π/T일 때

그림 6. ASV, DSV, F(D), 최소대역폭, 스펙트럼 영점간의 상호관계

Fig. 6. Relationship among ASV, DSV, F(D), minimum-bandwidth, and spectral nulls.

따라서 다음과 같은 정리가 성립된다.

[정리7] 선형 시스템에서 DSV 유한, S_y(0)=0(무직류특성), F(1)=0는 모두 동치이다.

[정리8] 선형 시스템에서 ASV 유한, S_y(π/T)=0, F(-1)=0는 모두 동치이다.

금후의 연구과제로서 그림 6에서 보는 바와같이 다음과 같은 논리가 비선형 시스템을 포함한 일반적인 최소대역폭 시스템에서 성립할 수 있느냐 하는 것이 남아있다. 즉,

첫째, S_y(0)=0면 DSV 유한하다. ([정리1]의 역정리)

둘째, S_y(π/T)=0면 ASV 유한하다. ([정리2]의 역정리)

셋째, ASV의 유한성은 최소대역폭 특성을 갖기 위한 필요조건이다. ([정리 5]의 역정리)

만일 위의 논리가 사실로 입증되면 모든 일반적인

최소대역폭 시스템은 다음과 같이 요약될 수 있을 것이다.

가. DSV 유한과 $S_y(0)=0$ (무직류특성)는 모두 동치이다.

나. ASV 유한과 $S_y(\pi/T)=0$ 그리고 최소대역폭 특성은 모두 동치이다.

무직류 특성에 관한 정확한 의미에 관해서 좀 더 설명하여보면, 보통 두가지 측면에서 생각할 수 있는데 하나는 $S_y(0)=0$ 라는 것이고, 다른 하나는 저주파 전력 성분이 작아 $S_y(\omega)$ 가 $\omega=0$ 에서 유한한 기울기 $(dS_y(0)/d\omega=유한)$ 를 가지는 것이다. 엄밀한 증명은 할 수 없지만 $S_y(0)=0$ 는 $dS_y(0)/d\omega=유한$ 함을 뜻한다는 것을 우리는 추측할 수 있다. 마찬가지로 $S_y(\pi/T)=0$ 는 $dS_y(\pi/T)/d\omega$ 가 유한함을 뜻한다고 볼 수 있다. 이러한 추측에 대한 타당성은 아직도 확인되지 않고 있다.

Ⅶ. 결 론

이 논문에서 우리는 이론적인 규명을 통해 최소대역폭 시스템에 관한 몇가지 중요한 정리를 증명함으로써 DSV, ASV, 전력 분광 영점 그리고 시스템 다항식간에 밀접한 관계가 있음을 보였다. 또한 우리는 임의의 ASV 값과 임의의 차수의 신호레벨을 가진 최소대역폭 시스템에 대해 최악의 경우 눈 형태의 경계에 관한 일반식과 그때의 눈 하한폭을 구하였다. 그외에 선형 최소대역폭 시스템에서 DSV와 ASV를 구하기 위한 간단한 식을 얻어냈다. 마지막으로 아직은 답이 나오지 않았지만 금후의 연구과제로서 가치 있는 몇가지 이론적인 의문점들을 제시하였다.

參 考 文 獻

[1] C. Croisier, "Introduction to pseudoternary transmission codes," *IBM J. Res. Dev.*, vol. 14, pp. 354-467, July 1970.

[2] H. Kobayashi, "A survey of coding schemes for transmission or recording of digital data," *IEEE Trans. on Commun. Technol.*, vol. COM-9, pp. 1089-1100, Dec. 1971.

[3] N.Q. Duc and B.M. Smith, "Lone coding for digital data transmission," *Australian Telecommun. Res.*, vol. 11, pp. 14-27, Feb. 1977.

[4] A. Lender "The duobinary technique for high-speed data transmission," *IEEE Trans. on Commun. Electron.*, vol. 82, pp. 214-218, May 1963.

[5] P. Kabal and S. Pasupathy, "Partial-response signaling," *IEEE Trans. on Commun.*, vol. COM-23, pp. 921-934, Sept. 1975.

[6] D.Y. Kim and J.K. Kim, "A condition for stable minimum-bandwidth line codes," *IEEE Trans. on Commun.*, vol. COM-33, pp. 152-157, Feb. 1985.

[7] D.Y. Kim, J.I. Beak · J.K. Kim, S.K. Hyun. and Y.K. Park, "Runlength limited variants of duobinary and modified duobinary," *IEEE Trans. on Commun.*, vol. COM-35, no. 3, pp. 140-147, Feb. 1987.

[8] D.Y. Kim and K. Feher, "Power suppression at the Nyquist frequency for pilot-aided PAM and QAM systems," *IEEE Trans. on Commun.*, vol. 37, no. 9, pp. 984-986, Sept. 1989.

[9] 강창구, 김대영, "최소대역폭 선로부호 VMDB5의 성능 측정에 관한 연구" 전자공학회 논문지, 제23권 제4호, pp. 1-10, July 1986.

[10] W.R. Bennett and J.R. Davey, *Data Transmission*, New York: McGraw-Hill, 1965.

著 者 紹 介



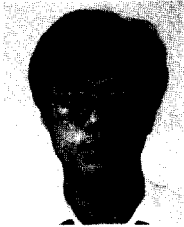
金 大 榮 (正會員)

1952年 5月 28日生. 1975年 서울 공대 전자공학과(학사). 1977年 KAIST 전기 및 전자공학과 (석사). 1983年 KAIST 전기 및 전자공학과(박사). 1978年~1981年 서독 RWTH Aachen, UNI Hannover. 1987年~1988年 미국 University of California Davis 분교. 1983年~1987年 충남대학교 전자공학과 조교수. 1987年~현재 충남대학교 전자공학과 부교수



吳 承 燾 (正會員)

1945年 12月 25日生. 1971年 연세대학교 전기공학과 졸업. 1973年 연세대학교 대학원 전기공학과(석사). 1983年 연세대학교 대학원 전기공학과(박사). 1980年 8月~1981年 8月 일본동북대학 전기통신연구소 객원 연구원. 1985年 5月~1986年 5月 미국 펜실바니아 주립대학 전기과 객원연구원. 1974年 10月~1988年 3月 충남대학교 공과대학 전기과 부교수. 1988年 4月~1990年 5月 충남대학교 전자공학과 교수.



姜 昌 求 (正會員)

1957年 3月 1日生. 1979年 한국항공대학 항공전자공학과(학사). 1986年 충남대학교 전자공학과(석사). 1979年~1982年 한국공군 기술장교. 1990年 충남대학교 전자공학과 박사과정 재학중. 현재 한국전자통신연구소 선임연구원.



裴 澈 (正會員)

1973年 인하대학교 전자과(학사) 1990年 충남대학교 전자과(석사) 1977年~현재 Control Data Korea (주) 근무, 기술부장.