

# 환형띠 조각면을 이용한 원형 축전기의 수치해석

## (Numerical Analysis of a Round Disk Capacitor Using Annular Patch Subdomains)

具本熙\*, 金彩英\*\*

(Bon Hee Koo and Che Young Kim)

### 要 約

원형 축전기의 전하분포 및 용량 계산을 위한 수치해석 방법을 제안하였다. 본 방법에서는 환형띠 조각면을 이용함으로써 행렬의 차수를 크게 감소시키면서도 결과해의 정확도를 향상시킬 수 있었다. 전하분포 산출을 위하여 모멘트법을 적용하였고, 계산된 전하분포로부터 축전기의 용량 및 등전위선을 구하였다. 결과해의 타당성을 보이기 위해 원형 디스크 및 유전체로 채워진 축전기에 본 방법을 적용하여 계산된 결과와 서로 비교 검토하였다.

### Abstract

A numerical method is presented for determining the static charge distribution and the capacitance of a round disk capacitor. In the employed numerical scheme annular patch subdomains are introduced to reduce the matrix size and to improve the accuracy of the numerical calculations. The method of moments is utilized to calculate the charge distribution, and the capacitance and equipotential lines are also found from the numerically computed charge distributions. To show the validity of the results the proposed method is applied to the round disk and the dielectric filled capacitor.

### I. 서 론

임의의 모양을 갖는 판상 도체에 유기되는 전하분포의 산출은 그 구조의 복잡성으로 인해 대부분 수치해석 방법에 의존하고 있다. 평행 평판 축전기의 전하분포 산출은 이러한 문제의 대표적인 것으로 볼 수 있으며, 전하분포 산출을 위해서는 축전기 표면을 직사각형이나 삼각형 형태로 조각을 낸 후 각각

의 조각면에서 전하분포가 일정하다는 가정하에 수치해석 방법을 이용해서 산출하는 방법 등이 있다.<sup>1,2</sup> 이 때 자르는 조각면의 형태에 따라서 수치해석에 이용되는 행렬의 크기나 결과해의 정확도가 달라지므로 주어진 구조물에 적합한 조각면의 형태설정이 중요함을 알 수 있다.

본 논문에서는 원형 축전기의 전하분포 및 등전위선을 수치해석 방법의 일종인 모멘트법으로 구하였다. 원형 축전기의 경우는 도체면의 형태가 원형이므로 흔히 이용되는 직사각형이나 삼각형 형태의 조각면을 사용하는 대신 축전기의 도체면을 동심축을 갖는 환형띠로 나누고 그 각각의 띠에서 전하분포

\*正會員, 慶北大學校 電子工學科  
(Dept. of Elec. Eng., Kyungpook Nat'l Univ.)  
接受日字: 1990年 4月 10日

가 일정하다고 가정하였다. 축전기 표면을 삼각형이나 사각형으로 자르게 되면 discretizing 오차가 발생하지만 환형띠로 나누게 되면 이러한 오차를 제거할 수 있으므로 직사각형이나 삼각형의 조각면을 이용하는 것보다 행렬의 차수를 크게 감소시키면서도 수치해의 정확도를 향상시키는 장점이 있다.

모멘트법에 적용될 적분방정식을 얻기 위한 축전기의 등가모델을 제시하였으며, 이 등가모델로부터 축전기 도체면의 전위가 일정하다는 도체에 관한 경계조건과, 유전체와 유전체의 경계면에서 변위벡터의 법선성분이 연속이라는 유전체의 경계조건을 이용하여 적분방정식을 얻었다. 모멘트법으로 구한 전하분포를 이용하여 축전기의 용량 계산을 위한 자유 전하밀도를 산출하였고 또한 축전기의 전하분포로부터 등전위선을 구하였다.

본 방법의 유용성 및 타당성을 보이기 위하여 본 해석법을 엄밀해가 알려진 원형 디스크에 적용하여 엄밀해와 근사해의 차이를 보였고, 삼각형 조각면에 의한 결과해와 본 방법으로 구한 수치해를 각각 비교 검토하였다. 그 결과 동일한 행렬 차수에 대해 삼각형 조각면의 것보다 본 해석법에 의한 수치해가 훨씬 정확함을 확인할 수 있었다. 또한 수치 계산된 원형 축전기의 용량값을 Shen<sup>1)</sup> 등이 계산한 값과 각각 비교하여 보았다. 유전체로 채워진 축전기의 경우 경계면 부근의 등전위선이 휘게 되는데 그 이유를 제시한 등가모델로부터 물리적으로 설명하였고 휘는 정도도 계산해 낼 수 있었다.

## II. 본 론

### 1. 적분방정식 구성

그림 1은 반경이 a, 극판간격이 h이고 내부가 유전상수  $\epsilon_r$ 을 갖는 균일한 매질로 채워진 원형 축전기와 등가모델을 보이고 있다. 원형 축전기의 상단 및 하단 도체에 각각 전위  $V_1$  및  $V_2$ 를 인가하였다. 자유공간 그린함수로 표현된 적분방정식을 구성하기 위하여 축전기 상단과 하단의 도체는 등가 자유 면전하로 대체하고 축전기 내부의 유전체와 자유공간의 경계면은 등가 구속 면전하로 나타내었으며 유전체는 자유공간으로 대체하였다.

유전체 내의 전자상 성질을 규명하는 분극벡터 P는 아래식

$$P = D - \epsilon_0 E \quad (1)$$

으로 정의되며 D 및 E는 전속 및 전장을 나타내고  $\epsilon_0$ 는 자유공간의 유전율을 나타낸다. 자유전하가 존

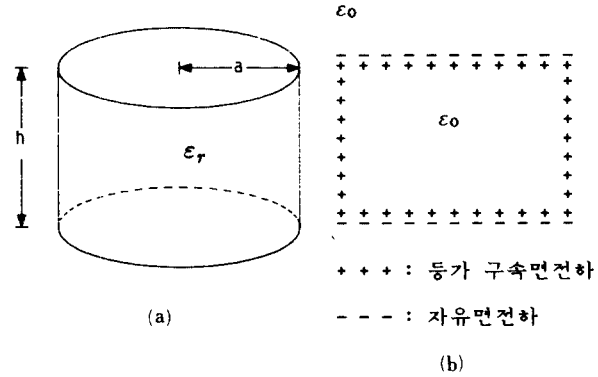


그림 1. 원형 축전기의 구조와 등가모델

- (a) 구조
- (b) 등가모델

Fig. 1. The geometry and equivalent model of a round disk capacitor.

- (a) Geometry,
- (b) Equivalent model.

재하지 않는 균질의 유전체 내에서는

$$-\nabla \cdot P = \rho' = 0 \quad (2)$$

이 됨을 식 (1)의 양변에 발산을 취하면 알 수 있고 이는 유전체 내에 존재하는 등가 구속 체적전하  $\rho'$ 가 없다는 것을 의미한다. 한편, 유전체 경계면에서 경계조건은

$$\underline{n} \cdot (D_2 - D_1) = \sigma_f \quad (3)$$

으로 주어진다. 여기서  $\underline{n}$ 은 그림 2에 표시된 단위 법선벡터이며  $\sigma_f$ 는 도체 표면에 놓인 자유 면전하밀도이다. 식 (1), (2) 및 (3)을 이용하면 아래식

$$\underline{n} \cdot (E_2 - E_1) = \frac{(\sigma_f + \sigma_b)}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0} \quad (4)$$

$$\sigma_b = -\underline{n} \cdot (P_2 - P_1) \quad (5)$$

을 얻을 수 있다. 식 (4)의  $\sigma_f$ 는 전 전하밀도로서 도체와 유전체의 경계면, 즉 도체면에서는 등가 구속 면전하와 등가 자유 면전하의 합이 되며 유전체와 유전체의 경계면에서는 등가 구속 면전하만으로 이루어진다. 식 (5)의  $\sigma_b$ 는 유전체 경계면 상에 존재하는 등가 구속 면전하이며 두 매질의 유전상수 상이성에 의해 발생된다. 만일 유전체 경계면에서 자유 면전하가 없다면 경계면에서는 등가 구속 면전하만 존재한다. 식 (4) 및 (5)로부터 모든 매질을 자유공간으로 대체하고 도체는 도체의 경계조건을 만족하는 자유 면전하로 대체하며 유전매질의 경계면은 등가

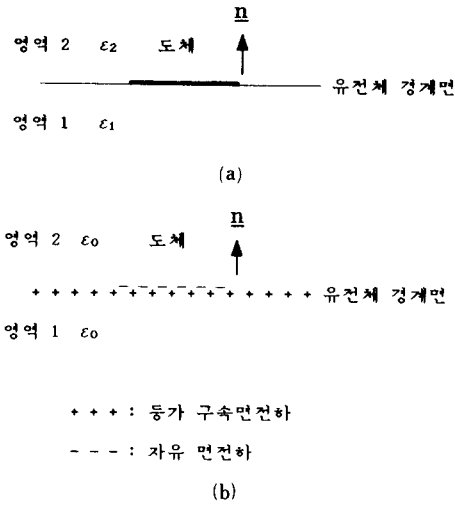


그림 2. 유전체 경계면과 등가모델

- (a) 유전체 경계면
- (b) 등가모델

Fig. 2. Dielectric boundary and equivalent model.  
 (a) Dielectric boundary,  
 (b) Equivalent model.

구속 면전하로 대체하는 등가원리에 의한 등가모델을 얻을 수 있으며 그림 1(b)의 등가모델은 이러한 원리를 이용한 것이다. 이러한 조건하에서 원형 축전기의 장점  $\underline{r}$ 에서의 전위와 전장은 자유공간 그린함수를 이용하면

$$V(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_s \frac{\sigma_T(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} ds' \quad (6)$$

$$\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla V(\underline{r}) \quad (7)$$

이다. 여기서 적분은 축전기 표면 S상에서 행하여지며 V와  $\underline{E}$ 는 각각 전위와 전장을 나타내고,  $\underline{r}$ 과  $\underline{r}'$ 은 장점과 전원점의 좌표를 나타내며,  $\nabla$ 는 공간 미분연산자이다.

식 (6)과 (7)로부터 전위와 전장은 축전기 표면상에 존재하는 등가 면전하만으로 결정 되어짐을 알 수 있다. 식 (6)에 주어진 전 전하밀도  $\sigma_T$ 를 근사적으로 수치 계산하고자 한다. 이를 위하여 축전기 표면을 동심축을 갖는 환형띠로 나누고 전개함수  $f_n$ 을 환형 펄스로 선택하면

$$f_n(\underline{r}) = \begin{cases} 1, & \text{장점이 } n\text{번째 조각상에 놓이는 경우} \\ 0, & \text{그 외의 경우} \end{cases} \quad (8)$$

식 (6)의 전 전하밀도  $\sigma_T$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma_T(\underline{r}) \cong \sum \sigma_{Tn} f_n(\underline{r}) \quad (9)$$

여기서  $\sigma_{Tn}$ 은 n번째 조각의 전 전하밀도를 나타내며 결정 되어야할 상수이다.

식(9)를 (6)에 대입한 후 축전기 도체면의 전위가 일정하다는 도체의 경계조건을 이용하면 축전기 도체면에서의 전위는 다음과 같다.

$$V_i = \sum_{n=1}^M \frac{\sigma_{Tn}}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Delta S_n} \frac{dS}{|\underline{r}-\underline{r}'|}, \quad i=1, 2 \quad (10)$$

여기서  $M=N_c+N_d$ 로서 축전기의 총 조각수이며  $N_c$ 는 상하 도체면의 조각수,  $N_d$ 는 축전기 측면 부분의 조각수이다. 식 (10)은 M개의 미지수  $\sigma_{Tn}$ 을 포함하는 선형 방정식이 되며 축전기 도체면의 각각의 조각에서 전위가 연속이라는 경계조건을 이용하면  $N_c$ 개의 선형 독립 방정식을 얻을 수 있다. M개의 미지수  $\sigma_{Tn}$ 을 구하기 위해서는  $N_d$ 개의 또다른 선형 독립 방정식이 필요하며 이는 축전기 측면의 유전체 경계면에서 변위벡터가 연속이라는 조건을 이용하면 얻을 수 있다. 축전기 측면의 유전체 경계면에서는

$$\left. \begin{aligned} \underline{D}^- \cdot \underline{n} &= \underline{D}^+ \cdot \underline{n} \\ \underline{E}^+ \cdot \underline{n} &= \frac{\epsilon^-}{\epsilon^+} \underline{E}^- \cdot \underline{n} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

이다. 여기서  $\underline{n}$ 은 축전기 경계면 밖으로 향하는 단위 법선벡터이며  $\epsilon^+$ 와  $\epsilon^-$ 는 각각 축전기 외부와 내부의 유전율이다. 즉  $\epsilon^+ = \epsilon_0$ ,  $\epsilon^- = \epsilon_r \epsilon_0$ 이다. 또한 같은 경계면상에서의 구속 전하밀도  $\sigma_b$ 는 식 (5)를 이용하면

$$\sigma_b = -\underline{n} \cdot (\underline{P}^+ - \underline{P}^-) = \underline{n} \cdot \underline{P}^- \quad (12)$$

이다. 식(12)는 영역(+)의 매질이 진공이므로  $\underline{P}^+ = 0$ 이기 때문이다. 식 (11)과 (12)로부터 유전체 경계면에 존재하는 구속전하밀도  $\sigma_b$ 는

$$\sigma_b = \left[ \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right] \epsilon_0 \underline{E}^+ \cdot \underline{n} \quad (13)$$

가 된다. 식 (11)의  $\underline{E}^+ \cdot \underline{n}$ 는 축전기 표면에 존재하는 모든 전하를 고려해야하므로 식 (7)을 이용하면 다음식을 얻는다.

$$\underline{E}^+ \cdot \underline{n} = \sum_{n=1}^M \frac{\sigma_{Tn}}{4\pi\epsilon_0} P \iint_{\Delta S_n} \frac{(\underline{r}-\underline{r}') \cdot \underline{n}}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} dS \pm \frac{\sigma_T(\underline{r})}{2\epsilon_0} \quad (14)$$

여기서  $P \iint$ 는 장점  $\underline{r}$ 을 포함하는 조각면에서 특이점을 제외한 영역의 적분을 의미하는 Cauchy Principal Value 적분이다. 식 (14)의 두번째 항은 특이점을 포함하는 영역에 의한 값이며 그 영역의 전하분포가 균일하다는 가정하에 계산된 값이다.<sup>11)</sup> 식 (11)과 (14)로부터 축전기 측면의 유전체 경계면에서는 다음 식

$$(\mathbb{D}^+ - \mathbb{D}^-) \cdot \underline{n} = \sum_{n=1}^M \frac{(1 - \epsilon_r) \sigma_{rn}}{4\pi} P \iint_{\Delta S_n} \frac{(\underline{r} - \underline{r}') \cdot \underline{n}}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} dS + \frac{1 + \epsilon_r}{2} \sigma_r(\underline{r}) = 0 \quad (15)$$

을 얻는다. 축전기 측면의 각 조각에 식 (15)를 적용하면  $N_d$ 개의 선형 독립 방정식을 얻을 수 있으며, 식(10)과 (15)로부터 미정계수  $\sigma_{rn}$ 을 구할 수 있다.

2. 모멘트법의 적용

식(9)의 미정계수  $\sigma_{rn}$ 을 결정하기 위해서 환형 시험함수

$$\omega_m = \delta^a(\underline{r} - \underline{r}_m) = \begin{cases} 1, & \underline{r} = \underline{r}_m \\ 0, & \underline{r} \neq \underline{r}_m \end{cases} \quad (16)$$

을 선택해서 각띠의 중앙점에서 시험하면 다음 행렬식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \Phi_m(f_n) \\ \Delta D_m(f_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{rn} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_m \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

식 (16)에서  $\underline{r}_m$ 은 좌표계의 원점과 각 띠의 중앙점 사이의 거리벡터를 나타낸다. 축전기 상단과 하단의 첫번째 조각은 다른 조각과는 다른 디스크로 생각하여 시험좌표를 디스크의 중앙으로 택하였다. 식 (17)의 모멘트 행렬요소  $\Phi_m(f_n)$ 과  $\Delta D_m(f_n)$ 은 단위 전하분포를 갖는  $n$ 번째 환형띠에 의한  $m$ 번째 환형띠의 시험좌표  $\underline{r}_m$ 에서 전위와 변위벡터 법선성분의 차를 나타내며 아래식

$$\Phi_m(f_n) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Delta S_n} \frac{dS}{|\underline{r}_m - \underline{r}'|}, \quad \begin{matrix} m=1, 2, \dots, N_c \\ n=1, 2, \dots, M \end{matrix} \quad (18)$$

$$\Delta D_m(f_n) = \frac{(1 - \epsilon_r)}{4\pi} \iint_{\Delta S_n} \frac{(\underline{r}_m - \underline{r}') \cdot \underline{n}_m}{|\underline{r}_m - \underline{r}'|^3} dS, \quad \begin{matrix} m=N_c+1, \dots, M \end{matrix} \quad (19)$$

으로 표현된다. 식 (19)의  $n_m$ 은  $m$ 번째 환형띠의 경계면 밖으로 향하는 단위 법선벡터이다. 또한 식 (17)에서  $\psi_m$ 은

$$\psi_m = \begin{cases} V_1, & m=1, 2, \dots, N_c \\ V_2, & m=N_c+1, \dots, N_c^t+N_c^b=N_c \end{cases} \quad (20)$$

이며 식 (20)의  $N_c^t$ 와  $N_c^b$ 는 각각 축전기 상단과 하단 도체의 조각수를 나타낸다. 식 (17)은  $M$ 개의 미지수  $\sigma_{rn}$ 을 포함하는  $M$ 개의 선형 1차 방정식이므로 역행렬을 양변에 곱하면 미정계수  $\sigma_{rn}$ 을 구할 수 있다.

축전기의 용량을 계산하기 위해서는 도체판에 유기된 자유 면전하밀도  $\sigma_{rm}[C/m^2]$ 가 필요하며 이 양은 식 (3)과 (15)를 이용하면

$$\begin{aligned} \sigma_{rm} &= (\mathbb{D}^+ - \mathbb{D}^-) \cdot \underline{n} \\ &= \sum_{n=1}^M \frac{(1 - \epsilon_r) \sigma_{rn}}{4\pi} P \iint_{\Delta S_n} \frac{(\underline{r}_m - \underline{r}') \cdot \underline{n}_m}{|\underline{r}_m - \underline{r}'|^3} dS + \frac{1 + \epsilon_r}{2} \sigma_{rn} \end{aligned} \quad (21)$$

$m=1, 2, \dots, N_c, \quad n=1, 2, \dots, M$

으로 주어진다. 식 (21)의 자유 면전하밀도  $\sigma_{rm}$ 으로부터 축전기의 용량은

$$C = \frac{Q}{V} = \left| \frac{\sum_{n=1}^{N_c} \sigma_{rn} \Delta S_n}{V_2 - V_1} \right| = \left| \frac{\sum_{n=N_c+1}^{N_c} \sigma_{rn} \Delta S_n}{V_2 - V_1} \right| \quad (22)$$

로 주어진다. 식 (22)로부터 환형띠로 나눈 축전기의 상하단 도체 조각면위의 자유 전하밀도가 구해지면 이 양으로부터 축전기의 용량이 계산됨을 알 수 있다.

3. 원형 축전기의 행렬요소 계산

식 (17)로 주어진 행렬요소  $\Phi_m(f_n)$  및  $\Delta D_m(f_n)$  계산을 위한 좌표계를 그림 3에 나타내었다. 이 그림에서  $\Delta S_n$ 은 환형띠 조각면의 면적을 나타낸다. 식 (17)의 행렬요소는 축전기 표면을 환형띠로 조각을 내었기 때문에 방위각의 함수가 아니다.

식 (17)의 행렬요소 계산을 위하여 전원점의 좌표  $\underline{r}'$ 을 각 띠의 중앙점 좌표  $\underline{r}_n$ 과 같게 두면 식 (18)은 반경이  $\rho_n$ 이고 선전하밀도  $\Delta W_n$ 을 갖는 환형 선전하에 의한 장점  $\underline{r}_m$ 에서의 전위가 되며 방위각에 대한 대칭성을 이용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\Phi_m(f_n) = \frac{\rho_n \Delta W_n}{2\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{d\phi'}{\sqrt{\rho_m^2 + \rho_n^2 + (h_m - h_n)^2 - 2\rho_m \rho_n \cos\phi'}} \quad (23)$$

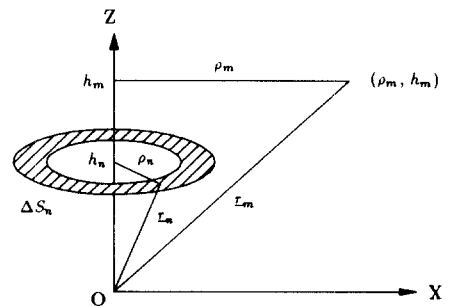


그림 3. 행렬요소 계산을 위한 좌표계  
Fig. 3. The coordinates for evaluating the matrix elements.

여기서,  $\Delta W_n$ 은 각 띠의 폭을 나타내며  $\rho_m$  및  $\rho_n$ 은 z축에서 거리벡터  $r_m$  및  $r_n$ 까지의 거리이다. 식 (23)에 새로운 적분변수  $\phi = (\pi - \phi')/2$ 를 도입한 후 정리하면 아래식

$$\Phi_m(f_n) = \frac{\rho_n \Delta W_n}{\pi \epsilon_0 A_{mn}} K(k_{mn}) \tag{24}$$

을 얻는다. 여기서,

$$A_{mn}^2 = (\rho_m + \rho_n)^2 + (h_m - h_n)^2 \tag{25}$$

$$k_{mn}^2 = \frac{4\rho_m\rho_n}{A_{mn}^2} < 1 \tag{26}$$

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\phi}} \tag{27}$$

이며  $K(x)$ 는 제 1종 완전 타원 적분이다. 식 (24)의  $K(k_{mn})$ 은  $0 \leq k_{mn} < 1$ 인  $k_{mn}(r_m \neq r_n)$ 에 대해서는 적분값이 존재하며  $k_{mn} = 1(r_m = r_n)$ 일 경우,  $K(k_{mn})$ 은 특이점을 갖게되므로 해석적인 방법으로 그 값을 계산해야 한다. 이 때에는 적분영역을 특이점을 포함하는 부분과 포함되지 않는 부분으로 나누어 적분을 시행하였으며 그 결과식은 다음과 같다.

$$\Phi_m(f_n) = \frac{\Delta W_n}{2\pi\epsilon_0} \log(\cot(\theta/8)) + \frac{\Delta W_n}{\pi\epsilon_0} \log(1+\sqrt{2}) \tag{28}$$

여기서 계산의 편의를 위해 특이점을 포함하는 면적을 가급적 정사각형이 되게 식 (28)의  $\theta$ 를  $\theta = \Delta W_n/\rho_n$ 으로 선택하였으며 식 (28)의 두번째 항은 특이점을 포함하는 영역을 정사각형으로 근사화하여 구한 값이다.<sup>[1]</sup> 그림 3의 좌표계를 이용하여 식 (19)의  $\Delta D_m(f_n)$ 을 표현하면

$$\Delta D_m(f_n) = \frac{(1-\epsilon_r)\rho_n(\rho_n+\rho_m)\Delta W_n}{\pi A_{mn}^3} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(1-k_{mn}^2\sin^2\phi)^{3/2}} - \frac{2(1-\epsilon_r)\rho_n^2\Delta W_n}{\pi A_{mn}^3} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\phi d\phi}{(1-k_{mn}^2\sin^2\phi)^{3/2}} \tag{29}$$

이 된다. 식 (29)의 유도과정에서 식 (19)의  $n_m$ 을  $s_0$ 로 선택하고 관계식  $(r_m - r_n) \cdot n_m = \rho_m - \rho_n \cos \phi'$ 를 이용하였다. 식 (29)의 첫번째 항에 나타난 적분은 아래식

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(1-k_{mn}^2\sin^2\phi)^{3/2}} = \frac{E(k_{mn})}{1-k_{mn}^2} \tag{30}$$

으로 주어지며,  $E(k_{mn})$ 은 제 2종 완전 타원 적분인데 다음식으로 주어진다.

$$E(x) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-x^2\sin^2\phi} d\phi \tag{31}$$

또한 식 (29)의 두번째 항에 나타난 적분은 식 (30)의 결과를 이용하면 다음식

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\phi d\phi}{(1-k_{mn}^2\sin^2\phi)^{3/2}} = \frac{1}{k_{mn}^2} \left[ \frac{E(k_{mn})}{1-k_{mn}^2} - K(k_{mn}) \right] \tag{32}$$

이 됨을 알 수 있다. 식 (29), (30) 및 (32)로부터  $k_{mn} \neq 1$ 일 경우 식 (19)의 적분결과는 다음과 같다.

$$\Delta D_m(f_n) = \frac{(1-\epsilon_r)\rho_n^2\Delta W_n}{\pi A_{mn}^3} \times \left[ \left( 1 + \frac{\rho_m}{\rho_n} - \frac{2}{k_{mn}^2} \right) \frac{E(k_{mn})}{1-k_{mn}^2} + \frac{2}{k_{mn}^2} K(k_{mn}) \right] \tag{33}$$

$k_{mn} = 1$ 일 경우는 식 (19)의 적분은 특이점을 갖게되며 식 (27)과 같은 방법으로 적분영역을 두 부분으로 나누어서 구하였으며 그 결과는 다음과 같다.

$$\Delta D_m(f_n) = \frac{(1-\epsilon_r)\Delta W_n}{4\pi\rho_m} \log(\cot(\theta/8)) + \frac{1+\epsilon_r}{2} \tag{34}$$

본 논문에서는 모멘트 행렬요소의 적분결과식에 나타난 제 1종 및 제 2종 완전타원 적분값을 수치적분하여 그 값을 구하였다.<sup>[1]</sup> 식 (24), (28), (33) 및 식 (34)의 모멘트 행렬요소로부터 식 (17)의 전 전하밀도  $\sigma_{rn}$ 을 계산할 수 있다.

앞에서 구한 축전기의 전 전하밀도  $\sigma_{rn}$ 을 이용하여 장점 r의 전위 V(r)을 구하면

$$V(r) = \sum_{n=1}^M \phi^n(r; r_n) \tag{35}$$

이 된다. 여기서,  $\phi^n$ 은 n번째 환형띠에 의한 장점 r에서의 전위를 나타내며 식 (24)와 (28)로부터 그 값을 계산할 수 있고 식 (35)에서 구한 축전기 전위식으로부터 등전위선을 구할 수 있다.

### III. 적용 예

#### 1. 원형 디스크 (Disk)

본 방법의 유용성 및 타당성을 보이기 위하여 엄밀해가 알려진 원형 디스크에 본 방법을 적용하여 보았다. 반경이 a인 원형 디스크 (Disk)의 엄밀해 전하밀도  $\sigma(\rho)$ 는

$$\sigma(\rho) = \frac{4V_0\epsilon_0}{\pi\sqrt{a^2-\rho^2}} \tag{36}$$

으로 주어지며 용량은  $8\epsilon_0 a$ 가 된다.<sup>[6]</sup> 여기서  $V_0$ 는 디스크에 인가된 전압이고  $\rho$ 는 디스크 중심과 장점사이의 거리이다. 수치계산을 위하여 원형 디스크를 M개의 환형조각으로 나누고 본 방법에서 제시한 전

개함수와 시험함수를 사용하여 원형 디스크의 전하 분포를 산출하였다. 그림 4에 반경이 1인 원형 디스크상의 전하 분포의 수치해와 엄밀해를 각각 비교하여 나타내었다. 이 경우 조각면의 간격은 등간격으로 하였고 조각면 수  $M=30$ 으로 하였다. 본 방법으로 구한 전하분포는 엄밀해에 매우 근접하게 나타났으며 가장자리 부근에서 약간의 차이를 보였다. 전하 분포의 변화가 심한 가장자리 부근의 조각면 개수를 변화가 덜한 중심부의 것보다 늘리면 더욱 엄밀해에 가까운 해를 얻을 수 있었다. 조각면을 원형 락으로 나누었을 경우와 삼각형<sup>7)</sup>으로 나누었을 경우의 용량값을 표 1에 나타내었다.

표 1의  $C/a$ 는 용량과 반경의 비로서  $a$ 에 관계 없이 일정한 값을 갖는다. 그림 4와 표 1에서 알 수 있듯이 본 방법으로 구한 전하분포와 용량은 엄밀해에

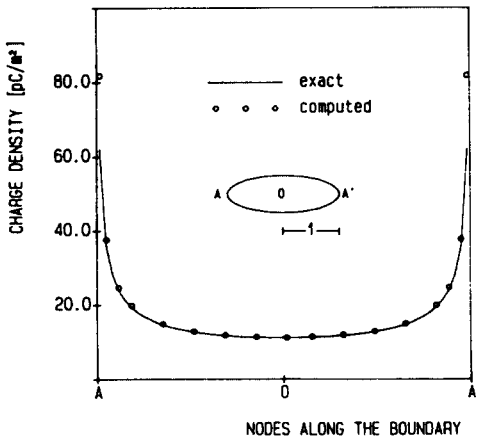


그림 4. 원형 디스크의 전하분포  
Fig. 4. Charge distribution of a round disk.

표 1. 정규화된 원형 디스크의 용량 [pF/m]  
Table 1. Normalized capacitance of a round disk [pF/m].

원 형 락			삼 각 형 <sup>7)</sup>		
M	C/a	% error	M	C/a	% error
10	69.57	1.76	18	59.80	15.57
15	70.01	1.16	30	61.10	13.74
20	70.22	0.86	42	61.80	12.75
25	70.35	0.68	54	62.24	12.13
30	70.43	0.56	60	66.03	6.78
40	70.55	0.41	84	66.72	5.80
exact	70.83				

잘 접근하는 것을 알 수 있고 삼각형 구조보다 조각 수가 적어도 오차가 매우 적을뿐만 아니라 행렬 차수의 감소로 인해 계산기의 기억용량 및 수행시간을 상당히 줄일 수 있었다.

2. 원형 축전기

원형 축전기의 전하분포 및 용량산출은 마이크로 스트립 기판상에서의 회로해석이나 stray field를 해석하는데 있어서 매우 중요하다. Shen<sup>3)</sup> 등은 stray field를 갖는 원형 축전기의 정전용량 계산을 위한 공식

$$C = \epsilon_r \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{h} \left[ 1 + \frac{2h}{\pi \epsilon_r a} \left\{ \log \left( \frac{\pi a}{2h} \right) + 1.7726 \right\} \right] \tag{37}$$

을 제안하였으며  $h/a < 1$ 인 관계가 있을 때 이 공식은 좋은 근사식이 된다. 식 (37)의 첫번째 항은 stray field가 고려되지 않은 값이다.

그림 5는 본 방법으로 계산된 원형 축전기의 전하 분포를 나타낸다. 이 경우 축전기 반경  $a$ 와 극판간격  $h$ 를 각각 1로 두었고 축전기에 인가된 전압은 각각  $V_1 = 1V, V_2 = -1V$ 로 하였다. 이 그림에서 (...)은  $\epsilon_r = 1.0$ 일 때의 전 전하분포를 나타내며, 그 외의 것은  $\epsilon_r = 3.0$ 일 경우에 계산된 전하분포이다.  $\epsilon_r = 3.0$ 일 경우 그림 5의 전 전하밀도  $\sigma_r$ 와 자유 전하밀도  $\sigma_f$ 의 비는 대략 2.2정도가 되었으며 이 값은 축전기 유전상수  $\epsilon_r$ 의 값에 비례한다. 극판간격  $h$ 가 매우 적어지면 이 두 양의 비는  $\epsilon_r$ 에 가까워지며 이 경우

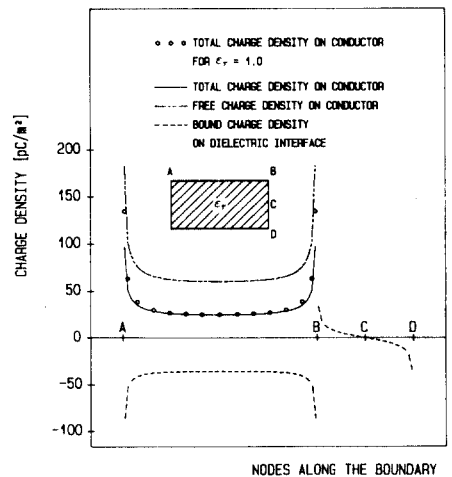


그림 5. 원형 축전기의 전하분포  
Fig. 5. Charge distribution of a round disk capacitor.

가장자리 효과는 거의 무시된다. 또한 축전기 가장 자리에서 구속전하의 불연속은 도체면에 유기된 자유전하의 영향과 가장자리 부근(그림의 B부근)의 두 조각면 즉, 가장자리 부근 도체의 조각면과 축전기 측면 조각면의 단위 법선벡터의 불연속성 때문에 생긴 것이다.

계산된 전하분포를 이용하여 원형 축전기의 용량을  $\epsilon_r = 1.0$ ,  $\epsilon_r = 3.0$ 인 경우에 대해서 각각 구하였다. 계산된 용량을 Shen 등이 제안한 공식과 비교하여 그림6에 나타내었다. 그림 6은  $Ch/\epsilon_0\epsilon_r\pi a^2$ 의 값을  $h/a$ 의 함수로 나타내었고 각 축은  $\log$  축으로 되어 있다. 이 그림에서 극판간격이 멀어질수록 stray field는 급격히 증가하게 됨을 알 수 있고 같은 구조 상에서 큰  $\epsilon_r$ 의 값에 의한 stray field는 적게 나타남을 알 수 있다. 이는  $\epsilon_r$ 값이 클수록 유전체 경계면에 놓인 구속전하 때문에 축전기 내부의 전장을 결정짓는 전 전하밀도가 축전기 가장자리 부근에서 그 값이 적게 나타나며 이로 인해 축전기 가장자리 부근에서 전속이 축전기 내부로 모이기 때문이다. 그림 5에서  $\epsilon_r = 1.0$ 일 때의 전 전하밀도와  $\epsilon_r = 3.0$ 일때의 전 전하밀도를 비교함으로써 그것을 확인할 수 있었다.

그림 7에 원형 축전기의 등전위선을  $xz$  평면상에 도시하였다. 그림 7에서 축전기 내부에서는 등전위선이 거의 평행하게 나타났지만 가장자리 부근에서는 가장자리 효과 때문에 등전위선이 휘어져 있다. 또한 축전기 내부의 등전위선 계산에서  $\epsilon_r = 3.0$ 일 경우의 등전위선이  $\epsilon_r = 1.0$ 일 때의 등전위선 것보다 가장자리 부근에서 좀더 평행하게 나타났는데 이는  $\epsilon_r$  값이 클수록 stray field가 적게 나타났던 그림 6의

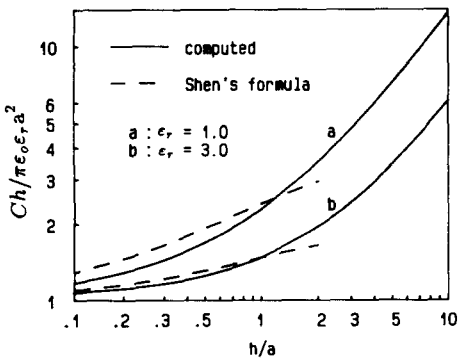


그림 6.  $h/a$ 로서 정규화 된 원형 축전기 용량  
Fig. 6. Normalized capacitance by the parameter  $h/a$ .

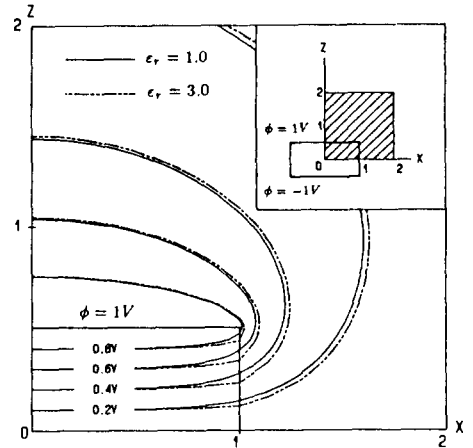


그림 7. 원형 축전기의 등전위선  
Fig. 7. Equipotential lines of a round disk capacitor.

결과에도 부합된다. 또한  $\epsilon_r = 3.0$ 일 경우에는 유전체 경계면에 존재하는 구속전하에 의해 경계면에서 전장의 불연속이 생기고 이로 인해 등전위선이 꺾이게 되는데 이 현상이 그림 7에서  $x=1$  근처에 나타나 있다.

#### IV. 결 론

원형 축전기의 전하분포를 모멘트법을 이용하여 구하였다. 자유공간 그린함수로 표현된 적분방정식을 얻기 위한 축전기의 등가모델을 제시하였다. 축전기 표면을 미세한 환형띠로 나눔으로써 삼각형이나 사각형으로 나눌 때 발생하는 discretizing 오차를 없앴다. 또한 삼각형이나 사각형에 의한 모멘트 행렬 요소 계산시 구조의 복잡성으로 인해 조각면 근사(subsection approximation)가 있게되나 환형띠인 경우 조각면 근사없이 모멘트 행렬요소를 계산했기 때문에 그만큼 더 정확한 해를 얻을 수 있었고 다른 방법보다 조각면 수를 적게하더라도 계산오차가 감소하기 때문에 Computer 수행시간을 크게 줄일 수 있는 장점이 있었다. 수치계산된 전하분포를 이용해서 축전기의 용량 및 등전위선을 산출하였으며 Shen 등에 의해 제안된 용량값과 본 방법에 의한 결과를 각각 비교하여 보았다. 유전체 경계면 부근에서 등전위선이 휘는 물리적 이유를 축전기의 등가모델에 근거하여 설명하였고 유전상수나 축전기의 구조변화에 의한 등전위선의 휘어지는 양을 제시한 방법으로 용이하게 계산할 수 있었다. 또한 엄밀해가 알려진 원형 디스크에 본 방법을 적용하여 엄밀해와 수치해의

차이를 검토하므로써 본 방법의 유용성을 보였다. 본 방법은 환형구조를 가진 마이크로파 발진기의 cap<sup>8,9)</sup> 구조 해석에도 도움을 주며 이에 관한 연구가 진행되리라 본다.

參 考 文 獻

[1] R.F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, New York: Macmillan Co., pp. 24-28, 1968.

[2] D.K. Reitan, "Accurate determination of the capacitance of rectangular parallel-plate capacitor," *Journ. Appl. Phys.*, vol. 30, no. 2, pp. 172-176, Feb. 1959.

[3] L.C. Shen, S.A. Long, M.R. Allerding, and M.D. Walton, "Resonator frequency of a circular disc, printed circuit antenna," *IEEE Trans. Antennas Propagat.* (Commun.), vol. AP-25, pp. 595-596, July 1977.

[4] R.E. Collin, *Principles and Applications of Electromagnetic Fields*, New York: McGraw-Hill, pp. 76-78, 1961.

[5] S. Kuo, *Computer Applications of Numerical Methods*, Addison-Wesley, pp. 286-291, 1972.

[6] W.R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*, New York: McGraw-Hill, pp. 114, 1950.

[7] S.M. Rao et al, "A simple numerical solution procedure for statics problems involving arbitrary-shaped surfaces," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-27, no. 5, pp. 604-608, Sept. 1979.

[8] W.C. Tsai, F.J. Rosenbaum, and L.A. MacKenzie, "Circuit analysis of waveguide cavity Gunn effect oscillator," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-18, pp. 808-817, Nov. 1970.

[9] I.S. Groves and D.E. Lewis, "Resonant cap structures for IMPATT diodes," *Electron Lett.*, vol. 8, pp. 98-99, 1982.

著 者 紹 介



金 彩 英 (正會員)

1953年 3月 10日生. 1976年 2月 경북대학교 전자공학과 졸업 (공학사). 1978年 2月 한국과학원 전기 및 전자공학과 졸업 (공학석사). 1985年 9月 ~ 1986年 8月 미국 Syracuse 대학교 연구교수. 1990年 2月 한국과학기술원 전기및 전자공학과 졸업 (공학박사). 1978年 3月 ~ 현재 경북대학교 전자공학과 부교수. 주관심분야는 마이크로파대 부품 및 시스템, 전자파 수치해석 등임.



具 本 熙 (正會員)

1966年 5月 1日生. 1988年 2月 경북대학교 전자공학과 졸업 (공학사). 1988年 ~ 현재 경북대학교 대학원 전자공학과 재학중. 주관심분야는 마이크로파 공학, 전자파 수치해석 등임.