

Cubic Spline 을 사용한 境界要素法 Boundary Integral Equation Method by Cubic Spline

徐 承 男*
 Seung Nam Seo*

要 旨 : 심해 파랑변형으로부터 형성된 Dirichlet 경계치 문제를 free space Green 함수를 써서 경계적분방정식으로 바꾸었으며 이 적분방정식을 Cubic spline 요소법을 사용하여 차분한 수치모델이 제시되었다. 유도된 제1종 Fredholm 적분방정식의 수치계산시 안정도를 높이기 위한 Hsiao와 MacCamy(1973) 방법이 사용되었다. 수치계산 결과의 검증을 위해 엄밀해가 존재하는 두 경우를 택하여 비교하였고, 본 모델의 높은 정밀도가 입증되었다.

Abstract □ Dirichlet boundary value problems originated from unsteady deep water wave propagation are transformed to Boundary Integral Equation Methods by use of a free surface Green's function and the integral equations are discretized by a cubic spline element method. In order to enhance the stability of the numerical model based on the derived Fredholm integral equation of 1st kind, the method by Hsiao and MacCamy (1973) is employed. The numerical model is tested against exact solutions for two cases and the model shows very good accuracy.

1. 서 론

구조물에 작용한 파랑은 변형하게 되며 이러한 변형을 고려함으로써 보다 정밀한 파력계산이 이루어지기 때문에 해양 구조물에 작용하는 파력을 산정할 때 경계적분요소법(BIEM)이 많이 사용되고 있다. 경계적분요소법을 사용하여 파랑변형을 예측하고, 구조물 주위의 압력을 계산한 뒤 이를 적분하면 구조물에 미치는 파력이 구하여진다. 이와 같이 공학적으로 중요한 양을 경계에서만 구하는 경우에 BIEM은 큰 장점을 가지고 있다. 왜냐하면, 경계치 문제의 차원을 하나 감소시킴으로써 계산시간의 절감과 기억용량을 줄일 수 있기 때문이다. 한편, BIEM의 단점으로는 미지수의 계수들로 구성되는 행렬의 행렬식이 0으로 되는 특별한 경우에는 이로 인한 수치해의 상당한 오차가 발생하게 된다. 이를 파랑역학에서는 irregular frequency(Mei, 1983), 응용수학의 경우 Gamma contour(Jaswon과 Symm, 1977)로 각각 표기한다. Fig. 1에 도시

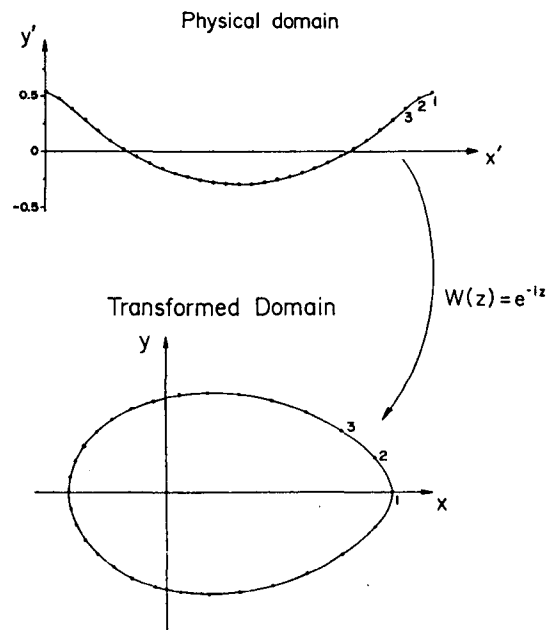


Fig. 1. A conformal mapping of a deep water wave train.

*韓國科學技術研究院 海洋研究所 環境工學室(Environmental Engineering Laboratory, Korea Ocean Research and Development Institute, Ansan P.O. Box 29, 425-600, Korea)

된 것과 같이 2차원 심해파랑이 $W(z)=e^{-iz}$ 으로 conformal mapping 을 하면, 해수면은 경계의 폐 곡선으로, 저면은 변환좌표계의 원점으로 각각 바뀌게 된다. 따라서, 무한영역의 경계치 문제가 유한영역의 문제로 바뀌고 해수면에서 속도포텐셜 Φ 가 주어지진 경우 변환좌표계에서는 Dirichlet 경계치 문제로 바뀌게 된다. 본 연구는 Dirichlet 문제를 경계 적분방정식으로 유도한 뒤 경계에서 법선 방향의 유속 $\partial\Phi/\partial n$ 을 수치적으로 구하고자 한다.

경계적분요소법을 이용하여 정밀한 수치계산이 필요한 경우 주로 고차의 요소가 사용되며, Liggett 과 Salmon(1981)은 비선형 수리문제에 대해 cubic spline element 를 사용하였다. 본 연구는 기존의 방법보다 정밀도 및 신속성을 높이는데 중점을 두었으며, cubic spline 을 이용한 경계적분요소법의 수치모델을 제시하고자 한다.

2. 적분방정식

변환좌표계가 conformal mapping 에 의해 변환 되었으므로 운동방정식은 Laplace 식이 되고 경계에서 Φ 가 주어지진 Dirichlet 경계치 문제로 바뀐다.

$$\nabla^2\Phi(x,y)=0, \text{ in } \Omega, \tag{1}$$

$$\Phi=f(x,y), \text{ in } \Gamma. \tag{2}$$

이제 경계에서 수직성분의 속도 $\partial\Phi/\partial n$ 을 구하기 위해 free space Green 함수 $G(x,y)$ 를 도입하여 적분방정식을 유도하자.

$$G=\ln|\vec{x}-\vec{x}_0|=\ln r, \tag{3}$$

여기서 r 은 Green 함수의 특이점(singular point) \vec{x}_0 으로부터 임의점 \vec{x} 까지의 거리를 나타낸다. 식 (3)은 다음 Poisson 식을 만족함을 보일 수 있다.

$$\nabla^2G=2\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}_0), \tag{4}$$

여기서 δ 는 delta 함수이다. 식 (4)에 Φ 를, 식 (1)에 G 를 각기 곱해 이를 빼 후 영역에 대한 면적분을 취하면

$$\int(\Phi\nabla^2G-G\nabla^2\Phi)d\Omega=2\pi\Phi(\vec{x}_0). \tag{5}$$

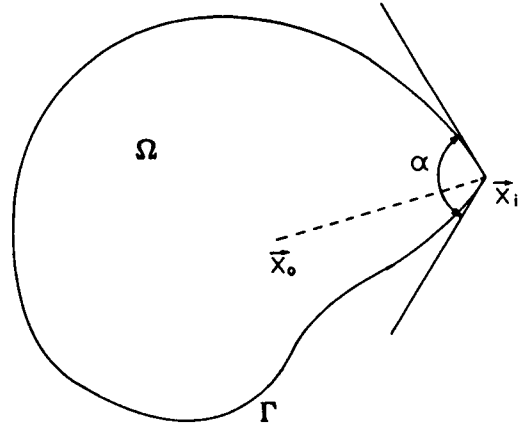


Fig. 2. Definition sketch of the inner angle α .

식 (5)에서 \vec{x}_0 가 영역내부에 위치한다고 가정했으며, Green 의 항등식을 사용하여 선적분으로 변환하면,

$$\int_r(\Phi\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial\Phi}{\partial n})dS=2\pi\Phi(\vec{x}_0). \tag{6}$$

영역내의 점 \vec{x}_0 를, Fig. 2에 도시된 대로, 경계상의 한점 \vec{x}_i 로 접근시키면 경계상의 값으로만 표시되는 경계적분방정식을 만들게 된다.

$$\int_r(\Phi\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial\Phi}{\partial n})dS=\alpha\Phi(\vec{x}_i), \tag{7}$$

여기서 α 는 점 \vec{x}_i 에서 Γ 에 그른 접선들이 이루는 내각이며 매끄러운 경계의 경우 π 가 됨을 알 수 있다.

경계상에서 $\partial G/\partial n$ 은 계산 가능하므로 식 (7)에서 미지항을 왼쪽에, 기지의 항을 오른쪽으로 이항하여 쓰면 제 1종 Fredholm 적분방정식을 얻게 된다. 그러나, 제 1종 적분방정식은 수치계산시 안정하지 않아 많이 사용되지 않았으나 Hsiao 와 MacCamy(1973)에서 밝힌 바 처럼 적절한 조건을 붙인 조건식을 만들어 동시에 풀면 안정도를 높일 수 있다.

$$\left\{ \begin{aligned} \int G\frac{\partial\Phi}{\partial n}dS &= \int\Phi\frac{\partial G}{\partial n}dS - \alpha\Phi(\vec{x}_i) + \sigma \end{aligned} \right. \tag{8.a}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int\frac{\partial\Phi}{\partial n}dS &= C. \end{aligned} \right. \tag{8.b}$$

식 (8. b)의 C는 적합한 상수이며, 식 (8. a)의 σ 는 조건식의 추가로 생긴 미지수이다.

3. 수치계산

주기조건을 만족하는 N 개의 자료 f_1, f_2, \dots, f_N 을 cubic spline 을 사용하여 내삽하면

$$f(S) = \frac{M_{k+1} - M_k}{6h_k} (S - S_k)^3 + \frac{M_k}{2} (S - S_k)^2 + \left\{ \frac{f_{k+1} - f_k}{h_k} \frac{(M_{k+1} + M_k)h_k}{6} \right\} (S - S_k) + f_k, \quad (9)$$

여기서 $h_k = S_{k+1} - S_k$

$$M_k = \frac{d^2 f}{dS^2} \text{ at } S = S_k.$$

격자점 S_k 에서의 2차 미분계수 M_k 는 미분계수 및 자료의 연속조건으로부터 구하여지며, 주기조건을 만족하는 경우에는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & h_{k-1}M_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)M_k + h_kM_{k+1} \\ &= 6 \left\{ \frac{f_{k-1}}{h_{k-1}} - \left(\frac{1}{h_{k-1}} + \frac{1}{h_k} \right) f_k + \frac{f_{k+1}}{h_k} \right\}, \quad k=1, \dots, N. \end{aligned} \quad (10)$$

주기조건으로부터 첨자 $k=0$ 에 관련된 값은 $k=N+1$ 의 값과 동일함을 밝힐 수 있다.

식 (10)을 행렬표기로 나타내면

$$[A] \{M\} = [B] \{f\} \quad (11)$$

을 얻으며 $\{M\}$ 을 구하기 위해 역행렬 $[A]^{-1}$ 을 각 항의 왼쪽에 곱해 정리하자.

$$M_k = \sum_{m=1}^N C_{km} f_m, \quad k=1, \dots, N, \quad (12)$$

여기서 C_{km} 은 $[A]^{-1} [B]$ 로 구성된 행렬 $[C]$ 의 k, m 인수이다. 식 (12)로부터 구한 M_k 을 식 (9)에 대입하여 자료를 내삽하는 경우라도 격자점을 제외한 내삽 구간에서는 내삽 방법에 따른 오차가 발생할 수 있다.

위에 언급한 자료의 내삽을 미지수에 대한 내삽으

로 그 의미를 확대하고, 미지수의 크기는 적분방정식으로부터 계산하는 방법이 경제적분요소법이다. 즉 식 (12)의 f_m 이 격자점 m 에서의 미지수이고, 이를 식 (9)에 대입하여 전구간에 대한 내삽함수를 구성한다. 결정된 내삽함수를 식 (8)에 대입하여 각 격자점에서의 미지수들로 만들어지는 방정식이 정하여진다. 위에서 언급한 바와 같이 내삽함수로 표시되는 수치해는 적분방정식의 해와는 일치하지 않는 것이 보통이며, 이렇게 생긴 오차를 i 번째 격자점에서 0으로 만드는 단순한 방법을 쓰면 식 (8. a)의 왼쪽항은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^N \frac{C_{i+1,m} - C_{i,m}}{6h_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_m \int_{S_m}^{S_{m+1}} (S - S_i)^3 \ln r_i ds \\ & + \sum_{m=1}^N \frac{C_{i,m}}{6h_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_m \int_{S_m}^{S_{m+1}} (S - S_i)^2 \ln r_i ds \\ & + \sum_{m=1}^N \left[-\frac{h_i}{6} (C_{i+1,m} + C_{i,m}) + \frac{\delta_{i+1,m} - \delta_{i,m}}{h_i} \right] \\ & \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_m \int_{S_m}^{S_{m+1}} (S - S_i) \ln r_i ds \\ & + \sum_{m=1}^N \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_m \int_{S_m}^{S_{m+1}} \ln r_i ds \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 $\delta_{i,m}$ 은 Kronecker delta 이며 r_i 는 Green 함수의 특이점 \vec{x}_i 로부터 경계선상의 임의점 \vec{r} 까지의 거리이다. 식 (13)은 N 개의 미지수 $(\partial \Phi / \partial n)_m$ 의 방정식이며, 각 격자점에 대한 유사한 방정식을 구해 N 원 1차 연립방정식을 구성한다.

경계선이 복잡하여 一價 (single-valued) 함수로 표시하기 어려운 경우 격자번호를 매개변수로 취급하여 경계선을 나타낼 수 있다. 격자점의 좌표 (x, y) 을 격자번호 m 의 함수로 보아 이를 cubic spline 으로 내삽한다. 경계선상의 미소거리 ds 는 다음과 같다.

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dm} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dm} \right)^2} dm. \quad (14)$$

식 (14)를 적분하면 기준점으로부터 경계선을 따라 움직인 거리가 구하여진다.

연립방정식을 만들기 위하여 식 (13)을 적분해야

한다. 그러나, 특수한 경우를 제외하고는 거리 r_i 는 s (또는 m)의 함수로 표시할 수 없으므로 대부분의 경우 수치적분에 의존하여야 한다. 격자점 \vec{x}_i 가 적분구간 밖에 위치하는 상용적분(regular integral)과 적분구간내에 위치하는 특이적분(singular integral)을 나누어, 우선 상용적분의 경우를 생각하자.

본 연구에 사용된 상용적분의 수치적분은 Gauss-Legendre 방법으로 적분구간내에 미리 정해진 점(abscissa)에서 적분함수의 값에 가중치를 곱해 이들의 합을 적분값으로 나타낸다. 따라서, 격자망이 구성되면 각 요소별 abscissa도 결정되므로 이들의 좌표를 미리 구해 기억시킨 후 반복적으로 이를 사용하면 계산속도의 상당한 단축을 가져오게 된다. 예를 들어 m 번째 요소의 k 번째 abscissa의 좌표를 매개변수의 좌표 t 로 표시하면 다음과 같다.

$$\int_m^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dm}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dm}\right)^2} dm = h_m A_k. \quad (15)$$

식 (15)의 A_k 는 k 번째 abscissa에 따라 정해지고

그 좌표 t 를 구하기 위해 Newton-Raphson 방법을 사용하였다. 거리 r_i 값이 구하여지면, 바로 식 (13)의 적분값을 구할 수 있으며 4점 Gauss-Legendre 적분법이 사용되었다.

특이적분의 경우 격자점 \vec{x}_i 에서 적분함수 값이 무한대로 되나 특이점의 세기(singularity strength)가 약하므로 적분가능하다. 이 구간에 대한 적분을 정밀하게 하기 위하여 다음과 같은 desingularization을 사용하였다.

$$\int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} f(S) \ln r_i dS = \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} f(S) \ln \frac{r_i}{|S - S_i|} dS + \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} f(S) \ln |S - S_i| dS, \quad (16)$$

여기서 $f(S)$ 는 주어진 함수이며 최고 3차인 다항식이다. 식 (16)의 오른쪽 첫항은 상용적분이므로 Gauss-Legendre 방법에 의해 구하였고 둘째항은 해석적으로 구하여진다. 식 (16)을 정리하여 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^N \frac{C_{i-1,m}}{6} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_m \left\{ \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{S_i - S}{h_{i-1}} [(S_i - S)^2 - h_{i-1}^2] \ln \frac{r_i}{S_i - S} dS + h_{i-1}^3 \left(-\frac{\ln h_{i-1}}{4} + \frac{3}{16}\right) \right\} \\ & + \sum_{m=1}^N \frac{C_{i,m}}{6} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_m \left\{ \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{S - S_{i-1}}{h_{i-1}} [(S - S_{i-1})^2 - h_{i-1}^2] \ln \frac{r_i}{S_i - S} dS + h_{i-1}^3 \left(-\frac{\ln h_{i-1}}{4} + \frac{11}{48}\right) \right. \\ & \quad \left. + \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{S_{i+1} - S}{h_i} [(S_{i+1} - S)^2 - h_i^2] \ln \frac{r_i}{S - S_i} dS + h_i^3 \left(-\frac{\ln h_i}{4} + \frac{11}{48}\right) \right\} \\ & + \sum_{m=1}^N \frac{C_{i+1,m}}{6} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_m \left\{ \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{S - S_i}{h_i} [(S - S_i)^2 - h_i^2] \ln \frac{r_i}{S - S_i} dS + h_i^3 \left(-\frac{\ln h_i}{4} + \frac{3}{16}\right) \right\} \\ & + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_{i-1} \left[\int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{S_i - S}{h_{i-1}} \ln \frac{r_i}{S_i - S} dS + h_{i-1} \left(\frac{\ln h_{i-1}}{2} - \frac{1}{4}\right) \right] \\ & + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_i \left[\int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{S - S_{i-1}}{h_{i-1}} \ln \frac{r_i}{S_i - S} dS + h_{i-1} \left(\frac{\ln h_{i-1}}{2} - \frac{3}{4}\right) \right. \\ & \quad \left. + \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{S_{i+1} - S}{h_i} \ln \frac{r_i}{S - S_i} dS + h_i \left(\frac{\ln h_i}{2} - \frac{3}{4}\right) \right] \\ & + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_{i+1} \left[\int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{S - S_i}{h_i} \ln \frac{r_i}{S - S_i} dS + h_i \left(\frac{\ln h_i}{2} - \frac{1}{4}\right) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

4. 수치결과

제 3절에서 유도한 cubic spline element 모델의 정밀도를 측정하기 위하여 엄밀해가 존재하는 두 경우에 대한 모델 검증을 실시하였다. 첫째는 Hsiao 와 MacCamy(1973)가 제시한 타원에서 $\partial\Phi/\partial n$ 을 구하는 엄밀해에 대한 검증이고, 둘째 역시 타원에서 $\partial\Phi/\partial n$ 을 구하나 forcing 항을 수치적으로 계산해야 하는 비교적 복잡한 경우이다.

Hsiao 와 MacCamy 의 적분방정식을 본 연구의 표기에 맞게 다시 쓰면 다음과 같이 된다.

$$\begin{cases} \int_{\Gamma} \frac{\partial\Phi}{\partial n} \ln r_i dS = \sigma + 1 \\ \int_{\Gamma} \frac{\partial\Phi}{\partial n} dS = 1, \end{cases} \quad (18)$$

여기서 Γ 는 Fig. 3에 도시한 이심률 ϵ 의 타원이다. 식 (18)의 엄밀해를 매개변수 t 에 대해 쓰면

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sin^2 t + \epsilon^2 \cos^2 t}} \\ \sigma = -\ln 2 + \ln(1 + \epsilon) - 1, \end{cases} \quad (19)$$

여기서 매개변수 t 는 Fig. 3에서 볼 수 있듯이 극좌표의 각은 아니다.

Table 1에 엄밀해, Hsiao 와 MacCamy 의 수치해, 그리고 본 모델의 결과를 비교하였으며 수치해를 구하기 위해 20개의 격자점이 사용되었다. 수치해들은 ϵ 이 감소함에 따라 엄밀해로부터 멀어짐을 알 수 있다. 그리고 모델 검증에 사용된 모든 경우에 본 모델은 Hsiao 와 MacCamy 의 결과보다 훨씬 정밀함을 보여주었고 타원이 납작해진 경우라도 ($\epsilon=0.2$) 그 결과가 매우 양호한 것으로 입증되

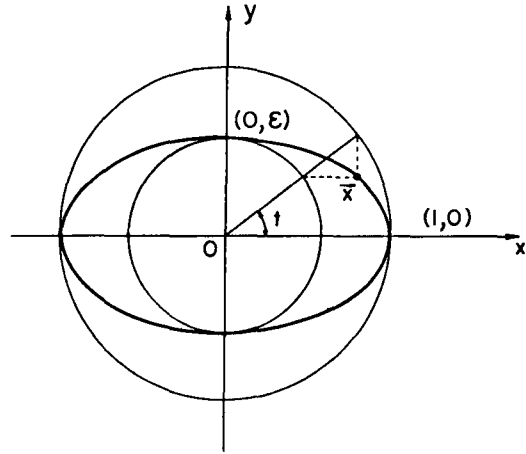


Fig. 3. A representation of ellipse by a parameter t .

었다.

위에서 제시된 국지비교(pointwise)와 대응되는 전체비교(global)를 하기 위하여 다음과 같이 정의되는 RMS 오차를 계산하였다.

$$\text{RMS 오차} = \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L \left(\frac{\partial\Phi_\epsilon}{\partial n} - \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right)^2 dS}, \quad (20)$$

여기서 L 은 경계선의 총 길이이며, Φ_ϵ 는 엄밀해이다. 격자점 수에 따라 수치해의 정밀도를 측정하기 위해 각기 다른 세 방법에 대한 RMS 오차를 그림 4에 도시하였다. Liggett(1977)의 방법은 격자점간의 곡선을 직선으로 근사시키므로써, 각 요소에 대한 적분을 구할 때 해석적인 방법을 사용할 수 있었다. 그리고 격자점 간에 $\partial\Phi/\partial n$ 이 선형적으로 변한다고 가정한 선형요소법을 사용하였다. 한편 선형요소법은 타원의 경계를 매개변수로 정밀하게 표현하였지만 요소내의 적분은 수치적분법을 사용하여 계산하였다.

Table 1. 엄밀해, cubic spline 수치해 및 Hsiao and MacCamy(HM) 수치해의 상호비교

t	$\epsilon=0.9$			$\epsilon=0.5$			$\epsilon=0.2$		
	Exact	Spline	HM	Exact	Spline	HM	Exact	Splin	HM
$\pi/20$.176333	.176337	.1769	.307232	.307333	.3243	.631623	.630436	.8628
$3\pi/20$.172713	.172713	.1728	.250217	.249897	.2469	.326330	.324270	.2768
$5\pi/20$.167300	.167298	.1672	.201317	.201498	.1985	.220708	.226052	.2156
$7\pi/20$.162366	.162365	.1623	.173095	.173026	.1724	.177703	.174554	.1764
$9\pi/20$.159526	.159526	.1591	.160636	.160663	.1594	.161058	.162044	.1592

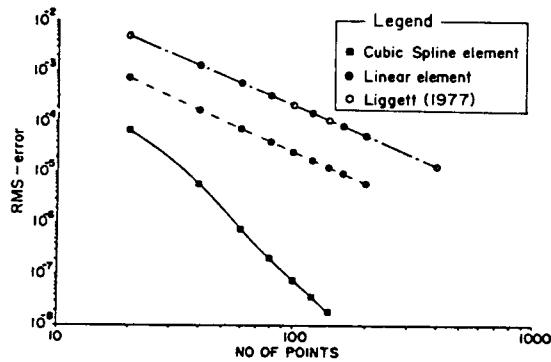


Fig. 4. Comparison of RMS-errors for an ellipse with $\epsilon=0.7$.

Fig. 4에 제시된 바와 같은 선형요소법이지만 정밀한 경계표시법을 사용한 선형요소법이 훨씬 높은 정밀도를 보여주었고, cubic spline 요소법의 정밀도가 비교된 3방법 중 가장 높은 것으로 판명되었다. 특히 격자점 400개를 사용한 Liggett의 결과가 격자점 40개의 cubic spline 요소법의 결과와 대등한 정밀도를 보여주고 있다. 따라서, 보다 정밀한 계산을 원하는 경우 고차의 요소법과 정밀한 경계표시법의 사용이 바람직하다.

둘째 점중의 예로 사용된 타원의 격자망이 Fig. 5에 도시되었다. 격자점에서 Φ 값이 주어졌고, 식 (8)의 오른쪽 forcing 항을 구하기 위해 Longuet-Higgins와 Cokelet (1976)이 사용한 방법을 쓰면

$$\int_r \Phi \frac{\partial G}{\partial n} dS = \int \Phi \frac{d\beta}{dm} dm \quad (21)$$

여기서 β 는 Fig. 5에 도시된 것과 같이 격자점 \vec{x}_i 와 타원위 임의점 x 을 연결한 선이 \vec{r} 축과 만드는 각을 나타낸다.

$$\tan\beta = \frac{y - y_i}{x - x_i} \quad (22)$$

점 \vec{r} 가 격자점 \vec{x}_i 로 접근하면 식 (22)는 다음 미분식으로 바뀐다.

$$\tan\beta_i = \frac{dy}{dm} / \frac{dx}{dm} \quad (23)$$

식 (21)을 수치 적분하기 위하여 m 번째 격자점을 중심으로 좌우 2점씩 총 5점에 대한 내삽함수를 Φ 와 β 에 대해 구하고 구한 β 의 함수를 미분하였다.

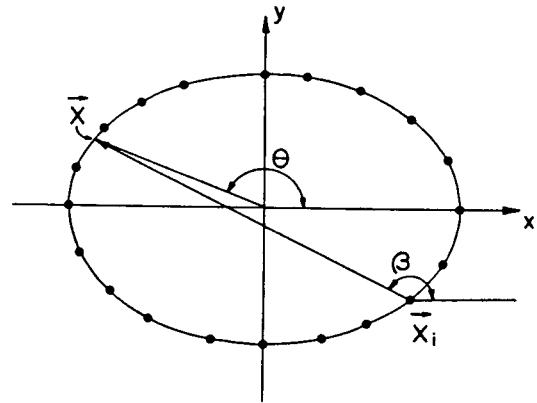


Fig. 5. Definition sketch of an angle angel β .

이렇게 구하여진 Φ 와 $d\beta/dm$ 의 함수들을 곱해 Gauss-Legendre 적분법에 의한 수치적분을 전구간에 대해 실시하였다.

둘째 예에서 사용된 적분방정식은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \int_r \frac{\partial \Phi}{\partial n} \ln r_i dS = \int_1^{N+1} \Phi \frac{d\beta}{dm} dm - \pi \Phi_i + \sigma \\ \int_r \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = 0. \end{cases} \quad (24)$$

식 (24)의 조건식은 연속방정식을 나타내며, 고로 Φ 는 Laplace 식을 만족하게 된다. 타원경계에 대한 경계조건과 엄밀해 $\partial\Phi/\partial n$ 은 다음과 같다.

$$\begin{cases} \Phi = xy, \text{ on } \Gamma \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{xy(1+1/\epsilon^2)}{\sqrt{x^2 + (y/\epsilon^2)^2}}. \end{cases} \quad (25)$$

식 (24)의 오른쪽 forcing 항들을 수치적으로 계산했음에도 불구하고 Table 2에 제시된 바와 같이 수치해는 엄밀해에 상당히 근접한 값을 나타내고 있다. Table 2의 θ 는 극좌표의 각을 나타내며 타원이 편평해짐에 따라 수치계산의 오차가 커짐을 보여주고 있다.

5. 결 론

경계요소법을 사용하여 적분방정식을 수치적으로 구할 때 정밀도를 높이기 위해 고차의 요소법을 사용하는 것이 일반적이다. 본 연구에서는 cubic

Table 2. 엄밀해와 cubic spline 수치해의 상호비교

θ	$\epsilon=0.9$		$\epsilon=0.7$		$\epsilon=0.2$	
	Exact	Numerical	Exact	Numerical	Exact	Numerical
0	0	-0.000000	0	0.000000	0	-0.000000
$\pi/10$	0.633821	0.633637	0.746896	0.745338	0.541074	0.565859
$2\pi/10$	0.940388	0.940590	0.857097	0.857443	0.275603	0.263365
$3\pi/10$	0.853704	0.853989	0.636327	0.636649	0.149487	0.154224
$4\pi/10$	0.491288	0.491409	0.326342	0.326112	0.067435	0.068030
RMS error	0.18198(-3)		0.70699(-3)		0.11452(-1)	

spline 요소법을 사용하여 정밀도가 높은 수치해를 구하였다. 경계를 나타낼 때, 격자점간의 곡선을 직선으로 단순화시켜 생기는 오차 역시 매우 큰 것이 밝혀졌으며, 제 1종 Fredholm 적분방정식의 수치계산시 안정도를 높이기 위한 조건식이 덧붙여진 방법이 사용되었다.

본 모델을 기존의 Liggett 과 Salmon(1981)의 cubic spline 모델과 비교할 때 본 모델은 특이적분을 구할 때 보다 정밀한 방법을 사용하였고, 매개변수를 사용한 정밀한 경계표시법, 그리고 수치적분시 abscissa 의 좌표를 구해 기억시킨 후 이를 반복적으로 사용함으로써 계산시간 단축의 장점이 있다. 또한 엄밀해와 수치해의 직접적인 비교를 통해 고차 요소법의 정밀도가 높음을 밝혔으며, 가장 단순한 모델인 Liggett (1977)의 400 격자점에 대한 결과가 본 cubic spline 모델의 40 격자점에 의한 결과와

대등한 것으로 나타났다.

참고문헌

- Hsiao G.C. and MacCamy, R.C., 1973. Solution of boundary value problems by integral equations of the first kind, *SIAM Review*, **15**: 687-705.
- Jaswon, M.A. and Symm, G.T., 1977. Integral equation methods in potential theory and elastostatics, Academy Press, New York.
- Liggett, J.A., 1977. Location of free surface in porous media, *J. Hydraulic Div., ASCE*, **103**(4): 353-365.
- Liggett, J.A. and Salmon, J.R., 1981. Cubic spline boundary elements, *Int. J. Numer. Methods, Eng.*, **17**: 543-556.
- Longuet-Higgins, M.S. and Cokelet, E.D., 1976. The deformation of steep surface wave on water, I. A numerical method of computation, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **350**: 1-26.
- Mei, C.C., 1983. The applied dynamics of ocean surface waves, John Wiley & Sons, New York.