Journal of Historia Mathmatica Vol.6. №1, 1990.9
The Society of Korean Mathematical History

문제풀이과정에서 보인 형식적분석(Formal analysis)의 효과에 대한 연구

이화여자대학교 **송 순 희·왕 수 정**

목 차

Ⅰ. 서 론

A. 연구사 및 연구의 목적

시대가 변화함에따라 수학교육을 개선하기 위한 연구의 방향도 여러가지로 변해왔다.1980 년대 수학교육 개선운동은 세계적으로 수학적 지식을 바탕으로한 문제해결력의 신장을 통해 학생들의 창의성과 사고력을 높여주는 교육을 강조하는 교육사조에 따르고 있다.

현대 수학교육에서 문제해결을 강조하게 된 원인을 체계적으로 살펴보면 다음과 같다.1966 년에 모스크바에서 열린 국제수학교육위원회 (ICMI : International Commision on Mathematics Instruction)의 국제회의와 미국의 CBMS (Conference Board of the Mathematical Sciences)의 보고서에서 학생의 수학적능력개발에 유용한 문제의 필요성과 독립적이고 창의적인 사고력을 신장시킬 수 있는 문제해결지도의 필요성을 역설하였으며, 수학교육 현대화운동에서도 학생들이 학교에서 배운 수학적 개념들을 일상생활에서 일어나는 구체적인 문제장면에 적용하는 능력이 크게 떨어진 점을 지적하고 문제해결의 지도를 강조했다.

따라서 수학교육에 있어서 문제해결의 중요성을 인식하면서 미국의 전미수학교사협의회 (NCTM : National Council of Teachers of Mathematics)를 중심으로 교육과정을 문제해결을 통하여 재구성하자는 운동이 일어났으며, 미국사회의 각계각층의 견해를 광범위하게 조사한 PRISM((Priorities in School Mathematics)의 연구결과를 바탕으로 1980 년대에 수학교육이 지향해야할 방향으로 8가지의 권고문을 제시하고 있다. 그 첫번째가 " 1980 년대의 학교수학의 촛점은 문제해결이 되어야 한다"는 것이다. 이것은 수학적인 기본기능으로 문제해결, 일상생활에서의 수학의 적용 및 합리적인 사고를 강조하고 있다. 이는 인간의 의미있는 사고의 대부분은 어떤 문제를 해결하기 위한 것이므로 너무나도

당연한 주장이지만 문제해결능력이란 가장 높은 수준의 고등정신 기능임을 고려하면, 단순한 지식의 전달과 사용이 아닌 진정한 수학적 사고교육을 강조하는 교육적 노력을 기울여야 한다는 주장이다.

그러나 현실적으로 우리나라 중등 수학교육을 비추어 볼 때 수학적 사고와 창의성을 기르는데 역점을 둔다기 보다는, 수학적 지식의 암기를 통해 학생들에게 진정한 의미를 갖지 못하는 수학적 지식과 기능의 습득을 위한 학습이 지속되고 있다.

따라서 학생에게 진정으로 학교교육과 실생활 사이의 틈을 좁혀주고자 한다면 우리의 학교교육이 단순히 지식의 평가에 주안점을 둘 것이 아니라 수학문제 해결방안을 연구 모색하고 문제해결력을 신장시키기 위해 문제해결 지도에 더욱 역점을 두어야 할 것이다.

본 연구의 구체적인 목적은 전략 (heuristics)의 훈련이 과연 창의적인 문제해결능력을 키우는데 직접적인 효과가 있는가를 검증하는데 있다. 특히 본 연구에서는 wanted--given과 같은 일반적 전략의 효과에 대한 검증을 해 본다.

B. 용어의 정의

1 . 문제 (problem) : 문제의 정의에 대해서는 학자들의 견해가 대부분 일치하고 있으므로 본 논문에서는 Lester의 정의에 따라 "문제란 개인이나 집단이 해결하려하는, 그러나 구체적이고 확실한 해결의 방법을 쉽게 얻을 수 없는 상황을 의미한다"고 정의하기로 한다.

2 . 문제해결 (Problem Solving) : 문제를 해결하는데 사용된 일련의 행동을 의미한다.

3 . 성취도 (Achievement) : 성취도란 학습목표에 어느정도 도달하였느냐를 나타내는 것으로 본 논문에서 정한 채점방식에 의해서 논문의 테스트에 대한 표본학생들의 채점결과를 나타낸다.

4 . 학업성취능력 (Achievement ability of study) : 본 논문의 표본학생들의 1학기 중간고사와 기말고사의 수학성적의 평균을 기준으로 두 집단의 상위 10명을 상위집단으로 나머지 학생을 중하위집단으로 분류하였다.

C. 연구문제

본 논문의 연구문제는 다음과 같다.

1 . 이해과정을 강조한 집단과 문제풀이만을 강조한 집단 사이에 성취도의 차이가 있는가?

2 . 이해과정을 강조한 집단과 문제풀이만을 강조한 집단 사이에 대수문제에 대해서 성취도의 차이가 있는가?

3 . 두 집단에서 상위집단들 사이에 성취도의 차이가 있는가?

4 . 두 집단에서 중하위집단들 사이에 성취도의 차이가 있는가?

Ⅱ. 이론적 배경

A. 문제와 문제해결의 정의

1 . 문제와 문제해결의 정의

문제를 정의하는데 있어서 그 문제가 제기된 학문영역과 당면하고 있는 대상에 따라 다르게 정의될 수 있다.

수학에서 논의하는 문제란 처음에는 정확한 해의 길을 알지 못하지만, 해의 결과를 요하는 개인 또는 단체에게 부과된 양적인 장면 (

quantative situation)이라 말할 수 있다. 즉, 개인이나 집단이 해결하려는, 그러나 구체적이거나 확실한 해결의 방법을 쉽게 얻을 수 없는 어떤 상황 (situation)으로 정의된다.[1)]

Brownell(1942)에 따르면 문제는 다음과 같은 몇가지 사실을 전제로 하고 있어야 한다고 말하고 있다.[2)]

가. 문제는 지각적 (perceptual)이면서 개념적 (conceptual)인 것이어야 한다.

나. 문제는 학습자 내에 있는 지식이나 상황을 조직할 수 있는 능력을 바탕으로 일단은 학습자에게 이해될 수 있어야 한다.

다. 문제는 학습자가 만족할 만한 해결이 즉시로 나올 수 없는 과제이어야 한다.

라. 문제는 학습자가 처음에는 문제상황에 당혹감을 느끼나 마지막에는 해결을 얻을 수 있어야 한다.

이상에서 정의된 수학적 문제는 다음과 같은 세가지 요소를 가지고 있다.[3)]

첫째는 식이나 수학적 사실들과 같이 주어진 것 (givens).

둘째는 주어진 식이나 수학적 사실을 다른 식으로 전환하는 연산 (operations).

셋째는 마지막 발견하려는 목표 (terminal).

위와같은 세가지 요소를 지닌 수학적 문제는 질문형태 (또는 상황)로 일단은 학생들에 의하여 받아들여져야 한다. 여기서 받아들여져야 한다는 것은 학생들이 내적인 동기, 외적인 동기 (교사가 듣도록 강요) 또는 단순히 문제를 푸는 즐거움을 느끼기 위하여 받아들인다든지 하는 경우를 말한다. 또 학생들이 바로 알맞은 해의 길을 찾지 못하고, 당황하고 어떤 장벽을 느낀다. 따라서 문제를 정의하는데는 모든 학습자들의 수준에서 공통으로 정의될 수는 없으며 지극히 개인적인 관점으로 정의되어야 한다. 그러므로 학생이 어떤 문제장면에서 도전을 느끼게 되고 즉시는 알맞은 해의 길이 생각나지 않는 상황을 맞으면서 새로운 풀이방법을 고안하여 시행함으로써 탐구하는 과정으로 들어간다.

이러한 문제의 성격을 통해 그 문제를 풀어나가는 일련의 과정을 문제해결로 정의할 수 있겠다.

문제해결은 하나의 과정 또는 문제를 해결하는데 사용된 일련의 행동으로 정의된다. 개인은 어떤 문제에 접근하기 위해서 과거에 배운 지식, 기능, 이해등을 동원하여 문제해결을 하려한다. 즉, 과거에 배운 지식을 이용하여 문제를 해결하려하기 때문에 문제해결에서는 어떤 정보를 이용하는 기능을 중요한 변인으로 여긴다.

2. 좋은 문제

학생들에게 문제를 풀게하고 또 교사가 문제풀이를 지도할 때에 맨처음 좋은 문제를 제시한다는 것은 문제해결지도의 최우선이다. 좋은 문제란 어떤 것이다라고 말하는 것은 어렵다. 그러나 여러 전문가들이 공통적으로 이해하는 좋은 문제가 갖추어야할 조건들을 다음과

1) M.G.Kantowskii(1980), Problem Solving,(Washington D.C.:N.E.A),p.74.
2) 신현성 (1985), "수학의 학습이론과 실제", 제 9회 산수과 교육세미나 교육개발원, p.21.
3) 신현성 (1989), 「수학교육론」(서울 : 경문사), p.146.

같이 제시하고 있다.[4)]

가. 좋은문제는 문제풀이 과정에 여러가지의 수학적 개념이나 기능등을 포함해야 한다. 단순하게 한 개념이나 기능을 포함하는 것보다 여러 종류의 개념이나 기능을 내포하고 있는 문제가 좋다는 것이다.

나. 좋은문제는 일반화할 수 있는 것이거나 다양한 문제장면으로 확장될 수 있어야 한다.

다. 좋은문제는 다양한 해법을 가지고 있어야 한다.

B. 문제해결의 전략

1. Polya의 일반적인 풀이전략

학습자에게 문제장면이 주어지면 학습자는 문제풀이를 위한 전략을 생각하게 된다. 즉, 문제를 분석하는 기술, 주어진 정보나 간접적인 정보를 재조직할 수 있는 기술, 그리고 해의 풀이과정을 검증하는 기술등. 이를 더 구체적으로 제시한 폴야는 "어떻게 문제를 풀 것인가"에서 그의 독특한 방법을 소개하고 있다.

가. 이해단계

나. 문제해결의 계획단계

다. 계획의 실행단계

라. 문제해결의 반성단계

폴야가 제시한 문제풀이 전략은 단순히 개별학습에서 강조하듯 선행개념의 제시가 아니라 학생들로 하여금 창의적 사고활동을 활발하게 할 수 있는 지침으로 보아야 한다. 학습자가 그 단계를 이해하는데 도움이 되는 의미있는 질문으로 구성되어야 하며 각 단계의 내용은 다음과 같다.[5)]

가. 문제의 이해단계

① 문제의 조건은? 구하려 하는 것은? 문제에 주어진 조건만으로 해를 얻는데 충분한가? 그렇지 않으면 부족한가?

② 문제의 조건을 그림이나 기호로 알맞게 제시할 수 있는가? 조건을 좀 더 세분해서 분류할 수 있는가?

나. 문제해결의 계획단계

① 과거의 문제와 같거나 유사한 문제를 보았는가? 이 문제를 푸는데 도움이 되는 정리를 생각할 수 있는가? 또 그 풀이과정을 이 문제에 이용할 수 있는가?

② 문제를 자신의 언어로 다시 써 볼 수 있는가? 그리고 그 문제를 좀 더 단순화해 볼 수 없는가?

③ 문제의 일부분을 풀 수 있는가? 조건의 일부분만을 남기고 다른 조건을 생각하면 구하려 하는 것은 결정되는가?

④ 구하려 하는 것을 결정하기 위해서는 직접 또는 간접적으로 관련있는 유용한 자료를 생각해낼 수 있는가?

⑤ 주어진 자료의 조건을 모두 사용했는가? 문제를 푸는데 필요한 사고는 충분히 했는가?

다. 계획의 실행

라. 문제해결의 반성단계

① 답을 점검할 수 있는가? 증명을 점검할 수 있는가?

② 답을 다른 방법으로 다시 구할 수 있는가?

4) 앞글, pp. 150 ~ 154.

5) 앞글, p. 178.

③ 다른 문제를 푸는데 이 문제의 과정을 이해할 수 있는가?

2. 구체적인 문제해결 기능

학생으로 하여금 성공적인 문제해결자가 되도록 하는 것은 교사가 좋은 지도를 제공함으로써 이루어질 수 있는 것이다. 그러므로 교사의 역활은 어떤 지도방법을 제공해 줌으로써 학생의 잠재력을 개발시킬 수 있는가에 그 강조를 두어야 한다. 다음은 학교수학에서 제공할 수 있는 문제해결의 접근방법을 소개한 것이다.[6)]

① 문제장면에서 적당한 문자나 기호를 선택하기

문장제로 주어진 문제에서 알맞은 기호를 선선택하여 간략하게 문제장면을 표현한다는 것은 문제를 해결하는 첫번째 일이다. 따라서 알맞은 기호를 선택하기는 문제해결에 중요한 요소이므로 학교에서는 방정식과 부등식 단원에서 기호선택 (변수잡기) 을 훈련시킬 필요가 있다.

② 그림, 표, 그래프 그리기

문제를 그림이나 표등으로 나타내는 방법은 문제의 이해를 위한 좋은 방법이 된다. 수학이 가지는 특징인 추상을 직접 눈으로 볼수 있게 그림으로 표현하는 방법은 개념의 이해에서도 강조되어온 방법이다. 문제가 주어졌을때 먼저 문제를 읽고 이해해야만 풀이 계획을 세울 수 있다. 따라서 그림이나 표로 나타낸 다음문제가 요구하는 것이 무엇인가를 생각해 보면 쉽게 풀이계획을 세울 수 있다.

③ 원하는 정보, 주어진 정보, 더 필요한 정보 등을 확인하기

문제를 풀기 전에 문제를 읽고 구하려 하는 것이 무엇인가? 주어진 수학적인 정보가 무엇인가? 과거에 배운 것 중에 문제를 풀기 위해 알맞은 지식이 있는가? 등을 묻는 것이다. 이와같이 분석을 하면 기하문제와 같은 증명문제를 해결하는데 많은 도움을 줄 수 있다. 이러한 분석을 하기 위해 학생들은 우선 주어진 문제에서 필요한 핵심정보를 발견하는 능력이 있어야 하며 주어진 문제에서 불필요한 정보를 가려내는 능력 또한 필요하다고 하겠다.

④ 문제를 재 진술하기

주어진 문제가 읽기 어렵고 이해하기가 힘들때 자기용어에 알맞게 문제를 다시 진술하는 방법이다.

⑤ 수학적인 식으로 나타내기

응용문제에서 가장 많이 사용되는 접근방법이다. 방정식, 부등식에 관한 문제가 대표적인 보기가 된다. 예를들면,

영희는 80 원짜리 사과와 150 원짜리 배를 섞어서 18 개 사고 2,000 원을 지불하였다. 영희는 배를 몇 개 샀는가?

이와같이 식을 세우는 문제는 변수잡기가 선행이 된다. 알맞은 변수를 잡는 훈련은 중요한 문제해결의 과정이 된다. 방정식,부등식에 관련된 문제는 변수를 어떻게 잡느냐에 따라 성공과 실패가 정해진다.

⑥ 전시학습 (Cognitive background) 을 상기하기

많은 문제는 과거에 학습한 내용을 상기하거나 종합하지 않으면 문제가 풀리지 않는다. 문제의 구조가 복잡하면 할수록 이러한 현상은 뚜렷하다.

6) 앞글, pp.164 ~ 175.

⑦ 표 만들기

문제를 풀 때 표를 만들면 쉽게 어떤 패턴을 발견함으로써 일정한 규칙을 발견하는 경우가 있다. 특히, 기하문제나 통계문제에서 이러한 경향이 있다.

⑧ 추측과 점검

문제를 이해하고 답을 예측한 다음 답이 맞았는지 점검을 하는 방법이다. 일반화를 요하는 문제에서도 효과있는 접근방법이다.

⑨ 조직화하기 (귀납화하기)

일반적인 규칙과 정리로부터 생각하기 어려운 경우 구체적인 예를 조직적으로 나열시킴으로써 해를 발견하는 경우이다.

⑩ 단순문제로 만들기

복잡한 문제를 풀 때에는 전체문제를 풀기 전에 부분문제부터 풀면서 이를 바탕으로 전체문제를 해결하는 방법이다. 예를들어 오일러 공식을 세우는 문제에서 처음에는 가장 간단한 정사면체를 이용하여 공식을 확인하고 점점 모서리가 많은 다면체로 가면서 이 공식을 일반화할 수 있다.

⑪ 구체적 모델을 선정하기

문제를 풀 때 대부분 문제장면을 머리속에 상상하면서 풀어가지만 때로는 실제 구체물을 놓고 문제해결의 방법을 생각하는 것이 쉬운 경우가 있다.

⑫ 거꾸로 풀기

거꾸로 풀기는 문제의 구성을 가정과 결론으로 나누어 볼 경우 가정부분에 찾고자하는 요소가 있을때에 결론에서 출발하여 가정으로의 역순으로 생각해 봄으로써 문제를 해결하는 한 전략이다.

⑬ 일반화하기

이 방법은 구체적인 문제장면을 제시하면서 일반적인 규칙을 찾아내게 하는 방법으로서 하노이 탑 문제가 대표적인 그 예이다.

⑭ 해의 검토

문제의 해를 발견한 다음 해가 바르게 풀어졌느냐를 검토해 보이는 것은 중요한 방법이다. 해를 검토하는 습관은 반드시 가져야 한다. 이러한 습관을 가졌을때 자기 자신의 해법을 비판하게 되는 안목을 기른다.

⑮ 다른 해를 찾아보기

주어진 해를 구하고 또 다른 해가 없는가를 찾아보는 것이다.

지금까지 제시한 문제해결의 기능은 이것을 모두 익숙하게 사용할때 또는 문제를 풀때 좀 더 접근이 일어나리라고 기대하게 된다. 그리고 이러한 기능의 숙달을 위해서는 많은 문제를 제시하면서 학생들의 훈련을 시도해야 한다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

A. 표본설정 및 배경

본 연구는 서울특별시 양천구 신정동 소재 신서중학교 3학년 학생 중 남학생 2학급 118명을 대상으로 실시하였다.

3학년 1학기 중간시험과 학기말 시험의 수학성적 결과의 평균점수를 기준으로 실험집단 준거집단 두 개의 집단으로 분류하였고 각 집단의 상위 10명을 상위집단으로 나머지 학생들을 중하위 집단으로 구분하였다. 실험집단과 준거집단에는 같은 문장제 문제 5문항을 제시형태를 달리하여 구성되었다.

B. 실험집단과 준거집단의 성격

실험집단과 준거집단을 분류한 구체적인 자료는 표 1과 같이 대상 학생의 3학년 1학기의

중간시험과 학기말 시험의 수학성적의 평균점수를 5점을 단위로 95 ~100, 90 ~ 94, ……, 25 ~ 29와 같이 15등급으로 나누어 각 등급에 해당되는 학생들을 무작위로 추출, 두 집단으로 구분한 결과 통계적으로 동질성이 있다고 인정되어 실험집단과 준거집단으로 분류하였다.

실험집단은 이해과정 문항이 제시된 5개의 문장제 문항을 테스트하고 준거집단은 이해과정 문항이 제시되지 않은 실험집단과 동일한 5개의 문장제 문항을 테스트 하였다.

〈 표 1 〉 집단별 학업성취도 분포

	25-29	30-34	35-39	40-44
실험집단	1	1	0	1
준거집단	1	2	0	1

	45-49	50-54	55-59	60-64
실험집단	3	4	3	7
준거집단	2	3	3	6

	65-69	70-74	75-79	80-84
실험집단	5	8	2	12
준거집단	6	9	3	10

	85-89	90-94	95-100	평균	S.D
실험집단	3	5	5	7196	1658
준거집단	4	6	4	7196	1684

C. 테스트 문항의 구성

본 연구에 사용된 문제들은 외국의 수학교육에 관한 서적과 다른 논문에서 테스트 문항으로 사용된 문제들을 검토하여, 본 연구대상의 학습과정 정도를 고려하여 선정하였다.

문제는 문장제로서 문항 1, 2, 3은 대수분야 문제이고 문항 4는 확률분야 문제이며 문항 5는 기하분야의 증명문제이다. 이상 5개문항의 예비테스트한 결과를 참조하고 재수정하여 검사문제로 결정하였다.

특히 실험집단의 문항은 준거집단의 문항보다 특이하게 구성되었다. 각 문제의 이해과정을 A문제에서 구하고자 하는것. B문제에 주어진것. C문제이해를 위한 연역적 힌트 등과 같은 절차문항을 만들었다. 여기서 힌트는 학생들이 풀이과정을 생각할 수 있는 힌트가 아니고 단지 문제이해를 위한 힌트이다. 따라서, 학생들은 이해과정 절차를 거친다음 마지막 해를 구하도록 시도한 문제이다. 연구에 사용된 문제는 다음과 같다.

【문항 1】 철수와 민수가 새 잡는 놀이를 했다. 빨강새를 잡으면 한마리당 사탕 3개를, 파랑새를 잡으면 사탕 2개를, 노랑새를 잡으면 사탕 1개를 주기로 했다. 그런데 민수는 빨강새 3마리, 파랑새 5마리, 노랑새 6마리를 잡았다. 만약 철수가 민수보다 사탕 5개를 더 얻었다면 철수가 잡은 파랑새는 모두 몇 마리인가? (단, 철수는 노랑새는 한마리도 못잡고 빨강새는 민수의 2배를 잡는다.)

A. 이 문제에서 구하고자 하는 것은 무엇인가?

a. 철수가 잡은 빨강새의 수

b. 철수가 잡은 파랑새의 수

c. 철수가 잡은 노랑새의 수

B. 민수는 모두 몇 개의 사탕을 받았겠는가?

a. 14개 b. 25개 c. 30개

C. 철수가 빨강새를 잡아서 받을 수 있는 사탕은 몇개인가?

a. 18개 b. 20개 c. 12개

D. 그렇다면 철수는 몇 마리의 파랑새를 잡았겠는가?

【문항 2】 13명의 사람이 강을 건너기 위해 배를 탔다. 그런데 이 배에 탄 사람들의 체중을 모두 합했더니 660㎏ 이었다. 평균적으로 남자가 60㎏, 여자가 40㎏이라고 한다면 이 배에 탄 남자는 몇명인가?

A. 이 문제에서 구하고자 하는 것은 무엇인가?

a. 배에 탄 사람의 수

b. 배에 탄 남자의 수

c. 배에 탄 남자들의 체중

B. 이 문제에서 주어진 내용이 아닌 것은?

a. 배에 탄 사람들의 체중의 합

b. 배에 탄 사람들의 수

c. 배에 탄 사람들 중 여자의 수

C. 다음 중 이 문제를 푸는데 필요한 식이 아니라고 생각되는 것은?

a. 여자의 수+남자의 수= 13

b. 여자의 수× 60 +남자의 수× 40=660

c. 남자의 수× 60 +여자의 수× 40=660

D. 그렇다면 이 배에 탄 남자는 몇명인지 구해 보아라.

【문항 3】 현재 현주는 10,000원,창빈이는 6,040원이 저금통에 있다. 이달부터 현주는 매달 2,000원씩을 저금한다면,창빈이는 매달 얼마이상을 저금해야 6개월 후에는 현주보다 많아지겠는가?

A. 이 문제에서 무엇을 구해야 하는가?

a. 현주가 현재 가진 금액

b. 창빈이가 매달 저금해야 할 금액

c. 현주가 매달 저금해야 할 금액

B. 6개월 후에 현주가 저금한 금액은 모두 얼마인가?

a. 10,000 + 6 × 2,000

b. 6,040 + 6 × 2,000

c. 6 × 2,000

C. 추측으로 한다면 창빈이는 현주보다 매달 내는 저금액이 많겠는가 또는 적겠는가?

D. 이 문제를 풀어 보아라.

【문항 4】 철호는 친구 4명과 함께 2명씩 짝을 지어 50 m 달리기 경주를 하기로 했다. 각자가 모든 친구들과 한번씩만 짝을 지어 달리기를 한다면 모두 몇번의 달리기 경주를 했을까?

A. 이 문제에서 달리기 경주를 하게되는 사람은 모두 몇명인가?

B. 그러면 철호는 몇번의 달리기 경주를 하겠는가? (4명의 친구들을 각각 A, B, C, D라 할때 짝짓기로 나타내 보아라)

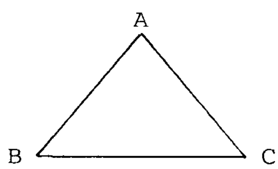
C. 철호가 B와 짝을 지어 달리기를 했다면 B는 다시 철호와 달리기를 할 수 있는가?

D. 이 문제의 답을 구하면?

【문항 5】 AB = AC인 이등변 삼각형에서 AB,AC의 중점에서 BC에 내려 그은 수선의 길이는 같음을 보여라.

A. 이 문제에서 보이고자 하는 것은 무엇인가?

B. 우선 이 문제에서 가정과 결론에 맞도록 삼각형 ABC의 그림을 완성하여라.



C. 이 문제를 푸는데 다음 삼각형의 합동조건 중 어느 것을 적용시킬 수 있다고 생각 되는가?

a. 직각삼각형에서 빗변과 다른 한 예

각이 같음.

b. 직각삼각형에서 빗변과 다른 한 변이 같음.

c. 삼각형에서 두변의 길이와 그 사이에 끼인 각이 같음.

D. 위 문제를 차례대로 증명하여 보아라.

이상 5개 문항은 실험집단에 제시된 문제이고 준거집단은 각 문항의 이해과정 문항 A, B, C, D가 없는 문제만이 제시되었다.

D. 테스트 실시방법

테스트는 실험집단인 경우에는 각 문항에 따른 네개항의 이해과정 문항에 각각 답하고 문항 D는 식과 답을 모두 쓸 것을 강조하였고 준거집단인 경우에는 이해과정 문항이 없으므로 식과 답을 쓰고 모든 계산과정을 쓸 수 있도록 각 항목 밑에 풀이공간을 허용하였다. 테스트는 실험집단과 준거집단 모두 45분간 실시되었다.

E. 테스트 채점방법

본 테스트는 실험집단의 이해과정 문항의 D 문항과 준거집단의 문제해결응답을 통해 문제이해정도와 문제해결과정 및 답을 알고자 하므로 다음과 같은 채점 방법을 택하였다.

1. 정확한 과정으로 풀이하여 정확한 답을 얻었을 경우 ; 3점
2. 정확한 과정으로 풀이했지만 답이 틀린 경우 ; 2점
3. 풀이과정은 없으나 맞추었을 경우 또는 풀이과정은 틀렸으나 답만 맞은 경우 ; 1점
4. 답을 하지 않았거나 정확하지 않은 해결전략에 의해 답이 틀린 경우 ; 0점

또한, 실험집단의 이해과정 문항 A, B, C는 주로 선다형 문제이므로 정답과 오답 여부만을 판정하였다.

F. 테스트 통계처리

본 논문의 통계자료로 Personal Computer를 이용한 SPSS 통계처리를 통해 분석하였다.

G. 연구의 제한점

본 논문에서는 다음과 같은 연구의 제한점이 있다.

1. 본 연구의 대상을 서울시에 소재한 신서중학교 3학년 남학생만으로 실시하였기 때문에 연구의 결과는 표본이 추출된 학교에 한하여 해석되어져야 하며 본 연구결과를 일반화하여 해석하기는 곤란하다.
2. 본 연구의 대상이 두 학급으로 한정되었기 때문에 표본추출 폭이 좁다.
3. 문제해결의 문제이해 정도를 알기 위한 문제의 종류가 다양하지 못하여 일부 분야에서만 조사되었다고 볼 수 있다. 따라서 이러한 문제유형과 종류에 국한하여 해석되어야 한다.

Ⅳ. 결 과 분 석

본 장에서는 연구결과를 해석하는 방법으로 두가지 방법을 제시하였다. 즉, 검증형 통계와 서술형 통계로서 검증형 통계에서는 주어진 연구가설을 데이타를 통해 기각 여부를 밝히는 문제였고, 서술형 통계에서는 검증형 통계에서 소홀히 하기 쉬운 문제, 예를들면 풀이의 이해과정을 잘 이해한 학생이 식을 잘 세울수 있는가 하는 문제에서 학생들이 즐겨 사용한 전략을 분석하는 것들이었다. 다음과 같이 구체적으로 두 타입의 통계를 진술해 본다.

A. 검증형 통계

검증형 통계에서는 크게 다음과 같이 4가지 연구문제에 관해 검증을 실시하였다.

첫째, 이해과정을 강조한 실험집단과 문제풀이만을 강조한 준거집단 사이에 성취도의 차이가 있는가?

둘째, 이해과정을 강조한 실험집단과 문제풀이만을 강조한 준거집단 사이에 대수문제에 대해서 성취도의 차이가 있는가?

셋째, 실험집단과 준거집단의 두 집단에서 상위집단들 사이에 성취도의 차이가 있는가?

넷째, 실험집단과 준거집단의 두 집단에서 중하위집단들 사이에 성취도의 차이가 있는가?

여기서 이러한 연구문제를 규명하기 위하여 다음과 같은 가설을 설정하였다.

H_0 : 실험집단과 준거집단 사이에 성취도의 차이가 없다.

이 가설을 검증하기 위해 SPSS 자료분석을 통해 T-테스트한 결과 유의수준 $\alpha = 0.05$ 에서 가설이 채택되었다. 구체적 자료는 〈표 2〉와 같다.

〈표 2〉 실험집단과 준거집단 사이의 성취도

집단구분	인원수	Mean	S.D.	S.E.	t값	T*
준거집단	60	7.8800	4.226	0.546	0.06	0.952
실험집단	58	7.8345	3.934	0.517		

두번째 가설로는

H_0 : 실험집단과 준거집단 사이에서 대수문제에 대해서 성취도의 차이가 없다.

이 가설을 T-테스트한 결과 $\alpha = 0.05$수준에서 가설이 채택되었다. 구체적 자료는 다음 〈표 3〉과 같다.

〈표 3〉 실험집단과 준거집단 사이에서 대수문제에 관한 성취도

집단구분	인원수	Mean	S.D.	S.E.	t값	T*
준거집단	60	5.5333	2.741	0.354	0.01	0.991
실험집단	58	5.5276	2.545	0.334		

세번째 가설로는

H_0 : 두 집단에서 상위집단의 학생의 성취도 사이에는 차이가 없다.

이 가설을 T-테스트한 결과 $\alpha = 0.05$ 수준에서 가설이 받아 들여졌다. 즉 상위집단 학생들 사이에서도 차이가 없음을 의미한다. 구체적 자료는 〈표 4〉와 같다.

〈표 4〉 두 집단의 상위집단의 성취도

집단구분	인원수	Mean	S.D.	S.E.	t값	T*
준거집단	10	10.9200	4.109	1.299	-0.97	0.350
실험집단	10	12.3000	1.825	0.577		

네번째 가설로는

H_0 : 두 집단의 중하위 집단에서의 성취도의 차이가 없다.

이 가설 또한 T-테스트한 결과 $\alpha = 0.05$ 수준에서 채택되었다. 구체적인 자료는 〈표 5〉와 같다.

〈표 5〉 두 집단의 중하위집단의 성취도

집단구분	인원수	Mean	S.D.	S.E.	t값	T*
준거집단	50	7.2720	4.017	0.568	0.48	0.635
실험집단	48	6.9042	3.606	0.520		

B. 서술형 통계

1. 이해과정의 이해수준과 오답의 비율

여기서는 문장제를 학생들이 풀때 주어진 것이 무엇인가? 구하고자 하는것이 무엇인가? 다음과 같은 힌트를 읽고 문제의 이해 여부는 어떤가? 등등과 같은 문제의 이해과정을 강조하고 문제의 해를 구하도록 하는 절차를 지필검사를 통해 실시했다. 학교수학에서 우리는 교사가 문제를 학생들에게 잘 이해시킨 다음 풀게 했을때 학생들이 저절로 풀이방법을 고안하게 될까하는 문제에 고민한다. 이러한 의문을 해결하기 위하여 테스트를 실시한 후 채점기준에 의하여 다음과 같은 〈표 6〉, 〈표 7〉을 얻을 수 있었다. 〈표 6〉은 각 문항의 오답자와 그들 중 이해과정 문제 A, B, C의 성취도를 백분율로 나타낸 것이며 〈표 7〉은 같은 방법으로 정답자의 성취도를 백분율로 나타낸 것이다. 이해과정 문제 A, B, C는 각 문항별로 대개 다음과 같은 내용으로 단답형 또는 선다형으로 제시되었다.

A. 이 문제에서 구하고자 하는 것은 무엇인가?

B. 이 문제에서 주어진 조건은 무엇인가, 또는 아닌 것은 무엇인가?

C. 이 문제에서 주어진 조건을 종합 또는 유추해서 알 수 있는 내용은 무엇인가?

이해과정 문항의 응답결과 오답자 비율은 다음과 같다.

〈표 6〉 이해과정의 이해정도와 오답비율

문	항	1	2	3	4	5
이해과정	A	89.5	92.9	96.2	50.0	66.7
	B	94.7	100	92.3	53.9	91.4
	C	78.9	71.4	92.3	61.5	21.4
	합계	87.7	88.1	93.6	55.1	36.5
오답자율		32.8	24.1	44.8	44.8	72.4

주) 각 문항별 응답자 중 정답자율과 그 정답자의 이해과정의 문항별 정답비율을 백분율로 나타낸 것이다.

또, 이해과정 문항의 응답결과와 정답자율은 다음과 같다.

〈표 7〉 이해과정의 이해정도와 정답비율

문	항	1	2	3	4	5
이해과정	A	92.3	100	93.8	93.8	100
	B	97.4	90.9	93.8	100	100
	C	92.3	90.9	75.0	93.8	93.8
	합계	94.0	93.9	87.5	95.8	97.9
정답자율		67.2	75.9	55.2	55.2	27.6

주) 각 문항별 응답자 중 정답자율과 그 정답자의 이해과정의 문항별 정답비율을 백분율로 나타낸 것이다.

〈표 6〉에서 문항 1, 2, 3은 대수적 문제로 오답자의 이해과정 문제의 성취도가 높음을 알 수 있는데 이해과정 문제가 주로 객관식으로 제시되어서 정답율이 높다고 볼 수 있으나 타문항과 비교해 볼때 이는 학생이 문제를 충분히 이해했다고 해서 반드시 그 문제를 해결한다고 볼 수는 없다. 이는 학생이 문제를 이해하고서도 문제해결을 위한 구체적인 전략을 가지고 있지 않거나 잘못 적용시키고 있음을 알 수 있다. 즉 부룸 (Bloom)이 제시한 분석, 종합활동이 잘 수행되지 않고 있음을 알 수 있다.

또한, 특히 대수적 문제에서는 학교 수학교육이 방정식, 부등식과 같은 문제를 식을 세워야만 해결할 수 있도록 이끌어 왔기 때문에 일단 학생이 문제에 맞는 식을 세우는데 실패하게 되면 쉽게 문제해결을 포기해 버린다는 점에서도 그 이유를 찾을 수 있겠다.

앞서의 많은 연구에서도 제안된 바 있지만 우리의 학교교육은 문제해결의 다양한 방향을

제시하여 학생들로 하여금 자유로운 문제해결이 가능하도록 이끌어야 할 것이다.

문항 1, 2와는 달리 문항 3은 오답율이 높은 반면 이해과정 정답율은 문항 1, 2보다 오히려 높음을 알 수 있는데 문항 3과 같은 부등식문제는 중학교 1학년과정에서 배운 이후로 학생들이 접하지 못했기 때문에 문제이해가 평이한데도 불구하고 오답율이 높은 것을 알 수 있다. 학습 후 시간이 많이 경과하여 문제에 익숙하지 않아서 생긴 결과로 볼 수 있겠다. 이는 또 전이능력과도 관련이 있다. 전이학습의 효과를 높이기 위하여 변수 잡는 훈련, 식세우기 훈련 등이 교육과정에서 연속적으로 이루어져야 한다.

여기서 문항 3을 다시 써 보면 다음과 같다.

> 현재 현주는 10,000원 창빈이는 6,040원이 저금통에 있다. 이달부터 현주는 매달 2,000원씩을 저금한다면 창빈이는 매달 얼마 이상을 저금해야 6개월 후에는 현주보다 많아지겠는가?

문항 4와 같은 비수학적인 문제와 문항 5와 같은 기하문제에서 오답을 한 학생들이 타문항에 비해 이해과정에 답한 학생이 현저하게 적었으며 반면에 정답을 한 학생들은 타문항에 비해 이해과정에 답한 학생이 많았다. 이로써 문항 4와 문항 5는 이해과정을 통한 이해가 문제해결에 영향이 있음을 알 수 있다.

특히 문항 5와 같은 기하문제의 증명은 정답율이 매우 저조한데 이는 학교에서 증명을 통한 기하교육을 시험대비의 학습효과만을 고려하여 증명과 같은 서술형 문제는 좀처럼 다루지 않게 되어 이 문제에 있어서 성취도가 더욱 더 낮게 나타나지 않았나 생각된다.

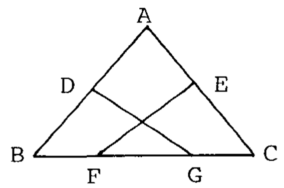
문항 5는 다음과 같다.

> AB = AC인 이등변삼각형에서 AB, AC의 중점에서 BC에 내려 그은 수선의 길이는 같음을 보여라.

그리고 문항 5의 문제에서 개념(정의)을 확실하게 알지 못하여 문제의 뜻을 파악하지 못하는 학생이 많았는데 이는 문제해결에서 말하는 인지배경(Cognitive Background)과 관련이 있다. 특히, 증명문제에서는 문제에 있는 개념을 얼마나 이해하느냐가 문제를 성공적으로 해결하는 것과 깊은 관련이 있다. 본 연구에서는 많은 학생들이 문제에 있는 개념을 파악 못하여 실패한 경우가 많았다. 대표적으로 다음과 같은 예가 있다.

A. AB, AC의 중점에서 BC에 내려 그은 수선의 길이는 같음.

B.



C. C

D. 1. AC = AC $\frac{1}{2}$AB = $\frac{1}{2}$AC

2. ∠B = ∠C

3. ∠BDG = ∠CEF = ∠R,

△BDG ≡ △CEF

∴ EF = DG

Ⅴ. 결 론

본 연구의 주제는 수학적 문제해결의 연구에서 아직도 의견의 일치가 안된 것으로 다음과 같은 것이다.

첫째, 일반적인 전략 (wanted-given 방법, Polya 의 4 단계방법) 이 문제해결의 능력을 신장시키는데 효과가 있는가?

둘째, 구체적 전략 (거꾸로 풀기, 힌트제시) 이 효과가 있는가?

본 연구자는 문제해결 지도에 있어서 Polya 의 4 단계 방법의 무분별한 지도는 잘못하면 학생들에게 혼동을 가져다 줄 염려가 있으므로 우리나라에서도 이를 검증해봄이 바람직하다고 생각되었다. 따라서 본 연구의 목적은 문제해결을 위한 전략 (heuristics) 의 훈련이 학생들의 창의적인 문제해결 능력을 키우는데 직접적인 효과가 있는가를 알아보기 위함이었으며 이를 위한 연구내용은 다음과 같았다.

(1) 이해과정을 강조한 집단과 문제풀이만을 강조한 집단 사이에 성취도의 차이가 있는가?

(2) 이해과정을 강조한 집단과 문제풀이만을 강조한 집단 사이에 대수문제에 대해서 성취도의 차이가 있는가?

(3) 두 집단의 각 상위집단들 사이에 성취도의 차이가 있는가?

(4) 두 집단의 각 중하위집단들 사이에 성취도의 차이가 있는가?

위와같은 연구문제를 검증하기 위해 중학교 3 학년 남학생 118 명을 대상으로 문제해결에서의 일반적인 전략 (wanted-given 방법) 에 관한 내용을 연구했다. 결과를 분석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 이해과정을 강조한 집단과 문제풀이만을 강조한 집단 사이에 성취도의 차이는 없었다.

(2) 두 집단 사이에 대수문제에 대해서도 성취도의 차이는 없었다.

(3) 두 집단의 각 상위집단들 사이에서도 성취도의 차이는 없었다.

(4) 두 집단의 각 중하위집단들 사이에서도 성취도의 차이는 없었다.

이상과 같은 연구결과로써 알 수 있는 바로는 첫째, 이해과정을 강조한 문제를 해결하는 학생들은 그러한 형태의 문제제시 즉, 문제를 충분히 파악할 수 있도록 유도한 문제형태에 익숙치 않기 때문에 문제풀이만을 강조한 집단과의 성취도의 차이가 거의 없었다. 이것은 한편으로는 문장제 문제를 학생들이 잘 해결할 수 있도록 하려면 문제의 재인식 과정 (wantec-given) 보다는 문제해결을 위한 전략을 찾을 수 있는 힌트를 제시해 줌으로써 학생들로 하여금 성공적인 문제해결자가 되도록 도울 수 있을 것이다.

이를 위해서 교사는 학생들이 가장 잘 사용하는 전략이 무엇인지 또는 어떤 전략을 가장 어려워하는지 등을 파악하여 단순암기로 인한 문제해결이 아닌 학생들의 창의적인 문제해결에 도움을 줄 수 있어야 하겠다. 둘째로 Polya 가 제시한 문제해결을 위한 전반적인 방향을 제시하는 발문과 권고가 비록 사전에 그러한 발문과 권고를 충분히 인식한 학생들을 대상으로 하지는 않았지만 현재 학생들에게는 효과적이고 성공적인 문제해결로 이끈다고 단정하기에는 무리가 있음을 알 수 있었다. 따라서 보다 다양한 문제와 표본집단을 통해 좀 더 정확한 영향력을 파악할 수 있을 것이며 학생들의 문제해결능력 증진을 위한 교육절차 개발에도 도움을 줄 수 있으리라 생각된다.

이후 본 연구의 후속연구로서 실험 연구를 함이 바람직하다고 본다. 본 연구의 약점이기도 한, 일정한 기간동안 실험을 해보고 이 실험후에 후속 테스트를 실시해야 하는데 본 연구의 사정상 실험을 못한 점을 이후 보완해야

할 것이다.

참 고 문 헌

강영춘 (1986), "문제해결과 수학교육 (중학교를 중심으로) ", 성균관대학교 교육대학원 석사학위논문, (미간행)

김응태, 박한식, 우정호 (1984),「수학교육학개론」, 서울 : 서울대학교 출판부

성덕현 (1986), "수학문제의 제시형태가 문제해결에 미치는 영향에 관한 연구 ", 서울대학교 대학원 석사학위논문 (미간행).

신성균 (1986), "수학과 문제해결학습과 평가 ", 수학교육논총, 제 4 집 (대한수학회). pp.95 ~ 98.

신현성 (1985), "수학의 학습이론과 실제", 제 9 회 산수과 교육세미나집, 국교육개발원, p.21.

(1989),「수학교육론」, (서울 : 경문사).

한국교육개발원 (1985), "수학과 문제해결력 신장을 위한 수업방법개선연구, 세미나집 (미간행)

Burch, R.L.(1953), Formal analysis as a problem solving procedure Journal of Education(Nov. 1953).

Kantowskii, M.G.(1980),Problem solving, Washington D.C.: N.E.A.

Krutetskii, V.A.(1968). The psychology of mathematical abilities in schoolchildren, trans. John Teller eds. Ieremy Kilpatrick and Izaak Wirszup, Chicago: University of Chicago Press, 1976.

Polya,GG.(1957). How to solve it, 2nd ed. New York : Doubleday.