

論文 90-27-3-2

유전체실린더로 둘러 싸인 완전 도체스트립에 의한 TM 파의 산란

(TM Wave Scattering by the Perfectly Conducting Strip Loaded with a Dielectric Cylinder)

金 南 泰*, 李 相 高*

(Nam Tae Kim and Sang Seol Lee)

要 約

상이한 유전율의 유전체실린더로 완전 도체스트립이 둘러 싸여 있을 때 도체스트립에 의한 산란현상을 해석하였다.

보조전자계를 도입하여 가역정리를 적용함으로써 미지전계에 대한 적분방정식이 유도되며 이는 적절한 경계조건에 의하여 등가행렬방정식으로 변형된다. 이 행렬방정식으로 부터 미지계수의 역행렬을 구함으로써 산란전자계가 결정된다.

본 논문에서 얻어진 결과는 특수한 경우로서 실린더의 유전율을 같게 했을때 기존의 연구결과와 잘 일치한다.

Abstract

A rigorous analysis of the scattering problem by the perfectly conducting strip loaded with a dielectric cylinder of different permittivity is presented.

By introducing auxiliary electromagnetic fields and applying the reciprocity theorem, integral equations for the unknown electric field are derived.

These integral equations are transformed into an equivalent matrix equation of infinite order with proper boundary conditions. By calculating inverse matrix of unknown coefficients from this equation, scattered electric fields are determined.

In particular case of the dielectric cylinder with the same permittivity, the results of this paper correspond to well-known results.

I. 서 론

도체스트립에 의한 전자파의 산란현상은 여러방법을 사용하여 많은 사람들에 의하여 연구되어 왔다. Morse와 Rubenstein^[1]은 타원좌표계에서 Mathieu 함

수와 관련하여 Helmholtz의 파동방정식의 해를 구함으로써 평면파에 의한 산란현상을 정확히 해석하였으며 그 이후에도 산란현상을 해석하기 위하여 많은 근사해법들이 제시되었다.^[2-7]

근자에 Elsherbeni와 Hamid는 유전체실린더로 둘러싸인 도체스트립에 의한 산란 현상을 연구한바 있으나 실린더의 유전율이 같은 경우에 한하여 해석하였다.^[8] 본 논문에서는 그들의 이론을 확장하여 실린

*正會員, 漢陽大學校 電子通信工學科
(Dept. of Elec. Comm. Eng., Hanyang Univ.)
接受日字: 1989年 11月 7日

더의 유전율이 다를 경우에도 적용할 수 있도록 하였다.

II. 문제의 공식화

그림 1과 같이 유전체실린더로 둘러싸인 완전 도체스트립을 생각한다. 유전체실린더와 스트립은 z축 방향으로 무한히 길며 스트립은 z, x 평면상에 폭 2a로서 균일하게 놓여있다. 유전체실린더는 완전 선형 등방성유전체이다. 이 때 입사파는 z축과 평행한 전가적 선상소오스(electric line source)에 의해 발생되므로 전계는 실린더축과 평행하고 자계는 축에 수직인 면에 놓여 있다.

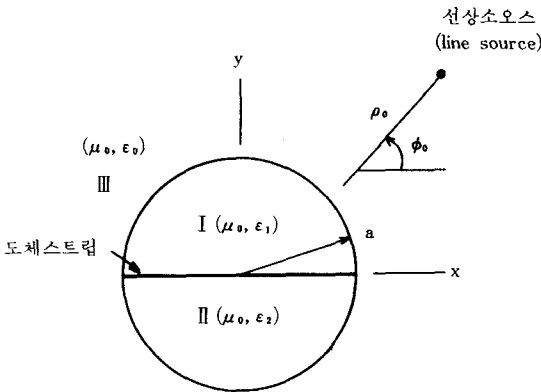


그림 1. 유전체실린더로 둘러 싸인 도체스트립
Fig. 1. The perfectly conducting strip loaded with a dielectric cylinder.

Maxwell 방정식을 만족하는 다음 두쌍의 전자계 (E, H)와 (E_m, H_m)를 생각한다. 이들은 각각 체적 v를 내포하고 있는 폐곡면 s내에 존재하는 소오스(source) (J, M)과 (J_m, M_m)에 의하여 발생된다. 두쌍의 전자계에 가역정리¹⁰⁾를 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\int_s (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H} - \mathbf{E} \times \mathbf{H}_m) \cdot \mathbf{n} ds = \int_v (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_m - \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{J} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}_m + \mathbf{H}_m \cdot \mathbf{M}) dV \quad (1)$$

여기서 n은 체적V의 외향법선벡터이며 (E, H)는 소오스(J, M)으로 인한 미지전자계, (E_m, H_m)은 소오스(J_m, M_m)이 적분영역 밖에있는 선택된 보조전자계이다.

미지전자계를 구하기 위하여 그림 1의 영역을 세 부분으로 나누었을 때 도체스트립에 의하여 분리되는 실린더내부의 공간을 각각 영역 I, II, 실린더 외부

의 공간을 영역 III이라 하고 m은 영역을 나타내는 숫자로 한다. 편의상 전자계 (E_m, H_m)은 각영역에서 서로 다르다고 가정하고 그 차이는 첨자로 구별한다.

미지전자계의 소오스는 영역 III에 존재하며 자기적 소오스 M은 0으로 가정한다. 이때 영역 I, II, III에 각각 식(1)을 적용하면

영역 I에서

$$\int_0^\pi (E_z H_{1\phi} - E_{1z} H_\phi) d\phi = 0 \quad \rho = a \quad (2)$$

영역 II에서

$$\int_\pi^{2\pi} (E_z H_{2\phi} - E_{2z} H_\phi) d\phi = 0 \quad \rho = a \quad (3)$$

영역 III에서

$$\int_0^{2\pi} (E_{3z} H_\phi - E_z H_{3\phi}) d\phi = -\frac{1}{a} E_{3z}(\rho_0, \phi_0) \quad \rho = a \quad (4)$$

로 된다. 위 적분을 행하는 동안 도체표면에서의 경계조건과 복사조건(radiation condition)이 적용되었으며 식(4)의 I는 (ρ₀, φ₀)에 위치한 전기적 선상소오스의 세기이다. 식(2), (3), (4)는 ρ=a에서의 미지전자계 (E_z, H_φ)에 대한 연립적분방정식을 구성한다.

모서리조건(edge condition)¹⁰⁾에 의하면 모서리에 수직인 자계는 모서리에서 특이점을 가지므로 위의 적분방정식에서 제거할 필요가 있다. 이를 위해 보조전자계에 대한 경계조건을 다음과 같이 선택한다.

$$E_{1z} = E_{3z} \quad \rho = a, \quad 0 \leq \phi \leq \pi \quad (5)$$

$$E_{2z} = E_{3z} \quad \rho = a, \quad \pi \leq \phi \leq 2\pi \quad (6)$$

식 (2), (3), (4), (5), (6)으로 부터 다음식이 얻어진다.

$$\int_0^\pi E_z H_{1\phi} d\phi + \int_\pi^{2\pi} E_z H_{2\phi} d\phi - \int_0^{2\pi} E_z H_{3\phi} d\phi = -\frac{1}{a} E_{3z}(\rho_0, \phi_0) \quad \rho = a \quad (7)$$

이렇게해서 식 (2), (3), (4)는 스트립 끝에서 특이점을 갖지않는 E_z에 대한 단적분방정식으로 변형된다. 보조전계 E_{1z}, E_{2z}는 파동변환식(wave transformation)¹¹⁾에 의하여 다음과 같이 된다.

$$E_{1z} = \sum_{n=1}^{\infty} A(n, p) J_n(K_1 \rho) \sin n\phi \quad (8)$$

$$E_{2z} = \sum_{m=1}^{\infty} B(m, p) J_m(K_2 \rho) \sin m(\phi - \pi) \quad (9)$$

E_{3z}는 +ρ 방향의 진행파를 표시하므로 다음과 같이

된다.

$$E_{z2} = H_p(K\rho) e^{j\rho\phi} \quad (10)$$

여기서 $p=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 이고 $J_n(x)$ 는 n 차 제 1종 Bessel 함수, $H_p(x)$ 는 p 차 제 2종 Hankel 함수이며, 첨자 (2)는 생략하기로 한다. K_1, K_2, K 는 각각 영역 I, II, III에서의 파수 (wave number)를 나타낸다. 식 (8), (9)의 전개계수 (expansion coefficient) A, B 는 식 (5), (6)을 적용하고 삼각함수의 직교성을 이용하면 다음 식으로 주어진다.

$$A(n, p) = \frac{2 H_p(Ka)}{\pi J_n(K_1a)} \int_0^\pi e^{j\rho\phi} \sin n\phi \, d\phi \quad (11)$$

$$B(m, p) = \frac{2 H_p(Ka)}{\pi J_m(K_2a)} \int_\pi^{2\pi} e^{j\rho\phi} \sin m(\phi - \pi) \, d\phi \quad (12)$$

Maxwell 방정식으로부터 보조전계에 대응하는 자계는 다음과 같이 주어진다.

$$H_{1\phi} = \frac{1}{j\eta_1} \sum_{n=1}^{\infty} A(n, p) J'_n(K_1\rho) \sin n\phi \quad (13)$$

$$H_{2\phi} = \frac{1}{j\eta_2} \sum_{m=1}^{\infty} B(m, p) J'_m(K_2\rho) \sin m(\phi - \pi) \quad (14)$$

$$H_{3\phi} = \frac{1}{j\eta} H'_p(K\rho) e^{j\rho\phi} \quad (15)$$

여기서 “ \cdot ”은 전 독립변수 $K\rho$ 에 대한 미분을 표시하며 η_1, η_2, η 는 각각 영역 I, II, III의 고유임피던스 (intrinsic impedance)를 나타낸다. 식(7)에 보조전자계를 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{j\eta_1} \sum_{n=1}^{\infty} A(n, p) J'_n(K_1a) \int_0^\pi E_z \sin n\phi \, d\phi \\ & + \frac{1}{j\eta_2} \sum_{m=1}^{\infty} B(m, p) J'_m(K_2a) \int_\pi^{2\pi} E_z \sin m(\phi - \pi) \, d\phi \\ & - \frac{1}{j\eta} H'_p(Ka) \int_0^{2\pi} E_z e^{j\rho\phi} \, d\phi = \frac{-I}{a} H_p(K\rho_0) e^{j\rho_0\phi} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 E_z 는 경계면 $\rho = a$ 에서의 미지전계이며 영역 III에서는 다음과 같이 가정한다.

$$E_z = \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_q H_q(K\rho) e^{-jq\phi} \quad (17)$$

식 (17)을 식 (16)에 대입하면 다음식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_q H_q(Ka) \left[\sum_{n=1}^{\infty} A(n, p) J'_n(K_1a) f_a(n, q) \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{\epsilon_2^*}{\epsilon_1^*}} \sum_{m=1}^{\infty} B(m, p) J'_m(K_2a) f_b(m, q) \right] \\ & - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1^*}} C_p H'_p(Ka) H_p(Ka) = \frac{I\eta_1}{ja} H_p(K\rho_0) e^{j\rho_0\phi} \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 $\epsilon_1^*, \epsilon_2^*$ 는 영역 I, II의 비유전율, C_p, C_q 는 미지계수이며 $f_a(n, q), f_b(m, q)$ 는 다음과 같다.

$$f_a(n, q) = \begin{cases} \frac{n[1 - e^{-jq\phi}(-1)^n]}{(n^2 - q^2)} & q \neq \pm n \\ \pm \frac{\pi}{2j} & q = \pm n \end{cases} \quad (19)$$

$$f_b(m, q) = \begin{cases} \frac{m[e^{-jq\phi} - (-1)^m]}{(m^2 - q^2)} & q \neq \pm m \\ \pm \frac{\pi}{2j} e^{-jq\pi} & q = \pm m \end{cases} \quad (20)$$

괄호내의 두 함수는 결과적으로 p, q 의 함수이므로 $f_c(p, q)$ 로 표시하면 다음과같이 된다.

$$\begin{aligned} & \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_q H_q(Ka) f_c(p, q) - 2\pi \sqrt{\frac{1}{\epsilon_1^*}} C_p H'_p(Ka) H_p(Ka) \\ & = \frac{1}{K_1a} H_p(K\rho_0) e^{j\rho_0\phi} \end{aligned} \quad (21)$$

여기서 $I = j/(\eta K)$ 이다. 식(21)은 무한개의 연립방정식을 구성하며 p, q 의 값은 요구되는 정확도만큼 충분히 커야한다. 그 값을 N 이라 했을 때 식(21)은 $2N + 1$ 개의 연립방정식을 형성하며 이로부터 미지계수 C_q 를 구할 수 있다.

III. 산란전자계

(ρ_0, ϕ_0) 의 위치에 있고 z 축과 평행한 전기적 선상 소오스 (electric line source)에 의해 발생하는 전계는 다음과 같이 주어진다.^[12]

$$E_z^i = \begin{cases} \frac{-\eta K I}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n(K\rho_0) J_n(K\rho) e^{-jn(\phi - \phi_0)} & \rho < \rho_0 \\ \frac{-\eta K I}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(K\rho_0) H_n(K\rho) e^{-jn(\phi - \phi_0)} & \rho > \rho_0 \end{cases} \quad (22)$$

여기서 l 및 i 는 각각 선상 소오스에 의한 전계와 입사파를 표시하는 첨자이다. 이 때 산란전계는 다음과 같이 쓸 수 있다.^[13]

$$E_z^s = \frac{-\eta K}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n H_n(K\rho_0) H_n(K\rho) e^{-jn(\phi - \phi_0)} \quad \rho \geq a \quad (23)$$

실린더 외부에서의 총 전계는 입사파와 산란파를 중첩함으로써 다음과 같이 구해진다.

$$E_i = \begin{cases} \frac{-\eta K}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n(K\rho_0) e^{-jn(\phi-\phi_0)} \\ \times [I J_n(K\rho) + d_n H_n(K\rho)] \quad a \leq \rho < \rho_0 \\ \frac{-\eta K}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n(K\rho) e^{-jn(\phi-\phi_0)} \\ \times [I J_n(K\rho_0) + d_n H_n(K\rho_0)] \quad \rho > \rho_0 \end{cases} \quad (24)$$

식(17)과 (24)를 비교하면 산란전계의 계수는 다음과 같이 결정된다.

$$d_n = \frac{4 C_n e^{-jn\phi_0}}{\eta K H_n(K\rho_0)} - \frac{I J_n(Ka)}{H_n(Ka)} \quad (25)$$

전기적 선상 소오스가 무한대로 이동했을 때 파면은 평면으로 근사시킬 수 있으므로 입사파는 평면파가 된다. 진폭이 E_0 인 평면파와 이에 의한 산란파는 원주좌표계에서 다음과 같이 표시된다.

$$E_p^i = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^n J_n(K\rho) e^{-jn(\phi-\phi_0)} \quad (26)$$

$$E_p^s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n H_n(K\rho) e^{-jn(\phi-\phi_0)} \quad (27)$$

평면파에 의한 산란의 경우 총 전계는 다음과 같다.

$$E_p^s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn(\phi-\phi_0)} [E_0 j^n J_n(K\rho) + d_n H_n(K\rho)] \quad (28)$$

경계면 $\rho=a$ 에서 식 (17)과 (28)을 비교하면 산란전계의 계수는 다음과 같이 구해진다.

$$d_n = C_n e^{-jn\phi_0} - \frac{E_0 j^n J_n(Ka)}{H_n(Ka)} \quad (29)$$

원거리 산란전계패턴의 패턴은 Hankel 함수의 변수 $K\rho$ 를 충분히 크게하고 $\sqrt{2j} e^{-j\pi/4} / \sqrt{\pi K\rho}$ 로 정규화함으로써 구할 수 있다. 선상소오스와 평면파로 인한 산란전계의 패턴은 각각 다음과 같이 된다.

$$F_i(\phi) = \frac{-\eta K}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n H_n(K\rho_0) j^n e^{-jn(\phi-\phi_0)} \quad (30)$$

$$F_p(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n j^n e^{-jn(\phi-\phi_0)} \quad (31)$$

유전체로 둘러 싸인 스트립의 정규화된 산란단면적은 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma(\phi) = \frac{2}{\pi} |F_p(\phi)|^2 \quad (32)$$

IV. 계산결과

본 논문에서 얻은 해석적 결과식은 유전체실린더

의 유전율을 같게 하여 유전율을 무한대로 했을 때 식 (21)의 우변과 좌변 둘째항은 0이 됨으로서 C_0 의 값은 0이 된다. 이 때 선상소오스와 평면파에 의한 산란전계의 전계계수는 기존의 연구결과와 일치한다.⁽¹³⁾ 실린더가 완전도체가 아니고 유전체일 경우 이론의 타당성을 검토하기 위하여 영역 I, II의 유전율을 같게 하고 입사파의 진폭을 $1[V/m]$, 입사각을 90° 로 하여 계산했을 때 그림 2에서 볼 수 있듯이 평면파에 의한 산란패턴은 Elsherbeni와 Hamid의 결과⁽⁸⁾와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

다음의 경우로서 실린더의 유전율이 다른 경우를 계산하였다. 그림 3에서 볼 수 있듯이 유전체가 놓여진 각각의 반공간에서 산란전계의 패턴은 영역 I, II의 비유전율이 각각 1.5인 경우를 제외하고는 실린더의 유전율이 같은 경우와 비슷한 경향을 보이고

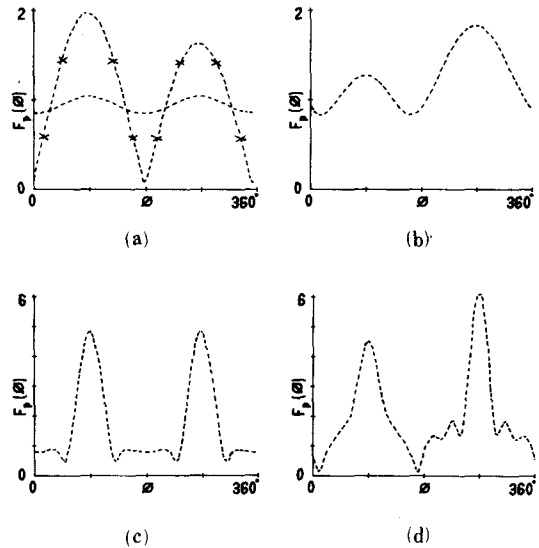


그림 2. 유전체실린더의 유전율이 같은 경우의 평면파에 의한 산란전계패턴 ($\phi_0=90^\circ$)

- (a) $\epsilon_1^* = \epsilon_2^* = \epsilon_3^* = 1, Ka = 1, * : \epsilon_1^* = \epsilon_2^* = 5, \epsilon_3^* = 1, Ka = 1$
- (b) $\epsilon_1^* = \epsilon_2^* = 9, \epsilon_3^* = 1, Ka = 1$
- (c) $\epsilon_1^* = \epsilon_2^* = \epsilon_3^* = 1, Ka = 5$
- (d) $\epsilon_1^* = \epsilon_2^* = 5, \epsilon_3^* = 1, Ka = 5$

Fig. 2. Far scattered field pattern due to plane wave incident on loaded strip with a cylinder of the same permittivity. ($\phi_0=90^\circ$)

- (a) $\epsilon_1^* = \epsilon_2^* = \epsilon_3^* = 1, Ka = 1, * : \epsilon_1^* = \epsilon_2^* = 5, \epsilon_3^* = 1, Ka = 1,$
- (b) $\epsilon_1^* = \epsilon_2^* = 9, \epsilon_3^* = 1, Ka = 1,$
- (c) $\epsilon_1^* = \epsilon_2^* = \epsilon_3^* = 1, Ka = 5,$
- (d) $\epsilon_1^* = \epsilon_2^* = 5, \epsilon_3^* = 1, Ka = 5.$

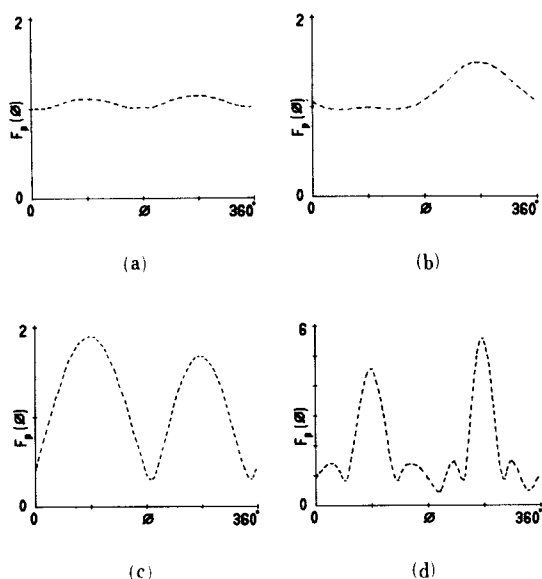


그림 3. 유전체실린더의 유전율이 다를 경우의 평면파에 의한 산란전계패턴 ($\phi_0 = 90^\circ$)

- (a) $\epsilon_1^* = \epsilon_3^* = 1, \epsilon_2^* = 5, Ka = 1$
- (b) $\epsilon_1^* = \epsilon_3^* = 1, \epsilon_2^* = 9, Ka = 1$
- (c) $\epsilon_1^* = 5, \epsilon_2^* = 9, \epsilon_3^* = 1, Ka = 1$
- (d) $\epsilon_1^* = \epsilon_3^* = 1, \epsilon_2^* = 5, Ka = 5$

Fig. 3. Far scattered field pattern due to plane wave incident on loaded strip with a cylinder of different permittivity. ($\phi_0 = 90^\circ$)

- (a) $\epsilon_1^* = \epsilon_2^* = 1, \epsilon_3^* = 5, Ka = 1,$
- (b) $\epsilon_1^* = \epsilon_3^* = 1, \epsilon_2^* = 9, Ka = 1,$
- (c) $\epsilon_1^* = 5, \epsilon_2^* = 9, \epsilon_3^* = 1, Ka = 1,$
- (d) $\epsilon_1^* = \epsilon_3^* = 1, \epsilon_2^* = 5, Ka = 5.$

있으나 산란 전계의 전체적인 크기가 변화한다. 특히 $\phi = 0^\circ$ 와 $\phi = 180^\circ$ 부근의 방향에서는 다른 방향보다도 산란패턴의 변화가 심하게 나타난다.

산란단면적은 산란전계 패턴의 제곱에 비례하므로 그 형태는 산란전계패턴의 제곱과 같다.

V. 결 론

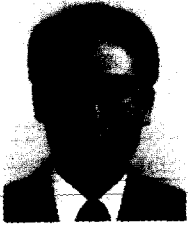
상이한 유전율의 유전체 실린더로 둘러 싸인 완전 도체 스트립에 의한 산란현상을 해석하였다. 결과식의 특별한 경우로서 실린더의 유전율이 같은 경우 평면파에 의한 산란전계의 패턴은 기존의 연구결과

와 일치하였다. 유전율이 다를 때 산란전계의 패턴은 예외적인 경우가 존재하나 각각의 빈공간에서 유전율이 같은 경우와 비슷한 경향을 보이며 산란전계의 전체적인 크기가 변화한다. 또한 $\phi = 0^\circ$ 와 $\phi = 180^\circ$ 부근에서는 산란패턴의 변화가 다른 방향보다 심하게 나타난다.

參 考 文 獻

- [1] P.M. Morse and P.J. Rubenstein, "The diffraction of waves by ribbons and by slits" *Phys. Rev.*, 54, pp. 895-898, 1938.
- [2] E.B. Moullin and F.M. Phillips, "On the current induced in a conducting ribbon by the incidence of a plane electromagnetic wave," *Proc. IEE*, vol. 99, pp. 137-150, 1952.
- [3] J.M. Myers, "Wave scattering and the geometry of a strip," *J. Math. Phys.*, vol. 6, pp. 1839-1846, 1965.
- [4] R.F. Millar "Diffraction by a wide slit and complementary strip I and II," *Camb. Phil. Soc.*, 54, pp. 479-511, 1958.
- [5] M.S. Macraksi, "Theoretical and experimental study of the backscattering cross-section of an infinite ribbon," *J. of Appl. Phys.*, vol. 13, pp. 2261-2266, 1960.
- [6] L. Shafal, "Currents induced on a conducting strip," *Can. J. of Phys.*, vol. 49, pp. 495-498, 1971.
- [7] R. Mittra and T.S.Li, "A spectral domain approach to the numerical solution of electromagnetic scattering problems," *AEU*, 29, pp. 217-222, 1979.
- [8] A.Z. Elsherbeni and M. Hamid, "Scattering by a perfectly conducting strip loaded with a dielectric cylinder (TM case)," *Proc. IEE*, vol. 136, pp. 185-190, 1989.
- [9] R.E. Collin and F.J. Zucker, "Antenna theory, Part I" *McGraw-Hill Book Co., New York*, pp. 24-25, 1969.
- [10] R.E. Collin and F.J. Zucker, *ibid.*, pp. 18-19.
- [11] R.F. Harrington, "Time harmonic electromagnetic fields," *McGraw-Hill Book Co., New York*, pp. 230-232, 1961.
- [12] R.F. Harrington, *ibid.*, pp. 234.
- [13] R.F. Harrington, *ibid.*, pp. 233.

著 者 紹 介



金 南 泰 (正會員)
 1964年 9月 18日生. 1986年 2月
 한양대학교 전자공학과 졸업 (공
 학사). 1988年 2月 한양대학교 대
 학원 전자공학과 졸업 (공학석사)
 1988年 2月~현재 한양대학교 대
 학원 전자통신공학과 (박사과정).

주관심분야는 각종 도파계와 복사계의 전자계 해석
 및 상대론적 전자기현상 등임.

李 相 高 (正會員) 第25卷 第2號 參照
 현재 한양대학교 전자통신공
 학과 교수