

변분법을 이용한 기하학적 비선형 구조의 설계민감도 해석

Variational Approach for the Design Sensitivity Analysis of Geometrically Nonlinear Structures

류 연 선*
Ryu, Yeon Sun

Abstract

A variational approach with reference volume and adjoint structure concepts is applied for the structural design sensitivity analysis of geometrically nonlinear structures. A general form of sensitivity equation is used and then nonlinear finite element procedure is implemented for the discretized structural model. Usability and effectiveness of the variational approach for the design sensitivity analysis of geometrically nonlinear structural responses are verified through a numerical example.

요 지

기하학적 비선형구조의 설계민감도 해석을 위해 기준체적과 수반구조개념을 이용한 변분법이 응용되었다. 일반적인 설계민감도식을 사용하였고 이상화된 구조모형에는 비선형 유한요소과정을 이용하였다. 수치예를 통하여 기하학적 비선형 구조거동에 대한 설계민감도 해석에서 변분법의 유용성과 효용성을 확인하였다.

1. 서 론

구조공학의 숙원과제 중의 하나는 모든 설계조건을 만족하면서 신뢰성을 겸비한 가장 경제적인 구조물의 설계에 있다하겠다. 구조물의 최적설계는 합리적인 구조해석방법과 수치적 최적화기법 및 CADD(computer-aided design and drafting)를 구조설계과정에 도입함으로써 가능하여지고, 이를 위한 연구가 활발히 진행되어 왔으나 주로 선형구조 또는 특수목적에 부합된 비선형구조에 치우쳐있는 실정이다.⁽¹⁻⁵⁾ 현대의 구조물은 재료의 선택이나 구조

역학적 지식의 폭이 넓어짐에 따라 대형화되고 경량화되어 가는 추세이므로, 구조물의 변위 또한 미소변형(small deformation)에서 비교적 큰 변형(large deformation)을 허용하는 설계의 필요성이 증대되고 있다. 사장교(cable-stayed bridge)나 guyed tower 등의 구조물에서는 큰 변형을 허용하는 기하학적인 비선형성(geometric nonlinearity)이 피할 수 없는 문제로 대두되며 이에 대응한 설계기법 및 설계최적화기법이 사용이 필수적 이라하겠다.

수치적 최적설계기법을 응용한 최적설계과정에

*정회원 · 부산수산대학교 해양공학과 부교수

서는 최적화목적함수 및 제약함수의 미분을 계산하는 설계민감도 해석이 필수단계인데, 이를 위한 연구 역시 기하학적 비선형구조의 경우에는 그 초기 단계를 벗어나지 못하는 실정이다. 이론적 측면에서의 설계민감도 해석방법은 유한차분법(finite difference method), 해석적 이산변수법(discrete analytic method), 연속체 방정식 응용법(continuum equation approach)등이 있으나⁽⁶⁻⁸⁾, 이들 중 가장 정확해를 구할 수 있는 연속체 방정식 응용법이 대형의 기하학적 비선형 구조물에 활용되는 것은 찾아보기 힘든 실정이다.

따라서 본 연구에서는 기하학적 비선형성을 가진 구조물의 최적설계를 위해서 설계민감도 해석에 최소일의 원리를 응용한 연속체 방정식을 이용하고 이의 변분(variation)을 취함으로써 좀더 정확한 설계민감도를 계산할 수 있는 방법을 개발하고 수치예를 통하여 그의 응용성을 확인하고자 한다.

2. 비선형 구조해석

비선형적 거동을 하는 구조물의 해석을 위한 기본방정식은 하중단계(또는 변형상태) t 에서의 구조물에 가상일의 원리를 적용하여 구한다.

$$\int_{\circ V} \delta \circ S \cdot \delta \circ \epsilon \cdot \delta V - \int_{\circ V} \delta \circ f \cdot \delta \circ u \cdot \delta V - \int_{\circ \Gamma} \delta \circ T^{\circ} \cdot \delta \circ u \cdot \delta \Gamma = 0 \quad (1)$$

여기서 좌측상첨자는 현재상태를, 좌측하첨자 \circ 는 변형전의 기준상태를 나타내며, 전체 라그랑지 정식화(total Lagrangian formulation)방법을 사용한다. 또 $\delta \circ$ 는 상태변수의 가상 변화량을 나타내며 식에 쓰인 변량은 다음과 같이 정의 된다.

- $\circ V, \circ \Gamma$ = 변형전의 체적(영역) 및 경계면
- $\circ S$ = 제 2 Piola-Kirchhoff 응력텐서
- $\circ \epsilon$ = Green-Lagrange 변형률 텐서
- $\circ f$ = 단위 체적당의 물체력(body force)
- $\circ u$ = 하중상태 t 에서의 변위
- $\circ T^{\circ}$ = 경계면 Γ 에 주어진 표면력(surface traction)

식(1)의 제 3항은 변위경계조건 u^* 가 $\circ \Gamma_0$ 에, 응력 경계조건 T^* 가 $\circ \Gamma_1$ 에 각각 주어졌을 경우에 대응한다. ($\circ \Gamma = \circ \Gamma_1 \cup \circ \Gamma_0$)

한편 제 2 Piola-Kirchhoff 응력 텐서 $\circ S$ 와 Cauchy 응력 텐서 σ 와의 관계는 Jacobi행렬 $\circ X$ 를 이용하면 다음 식으로 표현된다.

$$\circ S = | \circ X | [\circ X]^{-1} [\sigma] [\circ X]^{-1},$$

$$\circ X_{ij} = \partial x_i / \partial x_j \quad (2)$$

또 일반적인 변형률-변위 관계식은 다음과 같다.

$$\circ \epsilon = \frac{1}{2} [\circ \nabla \circ u^T + [\circ \nabla \circ u^T]^T + [\circ \nabla \circ u^T] [\circ \nabla \circ u^T]] \quad (3)$$

여기서 $\circ \nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right]^T$ 로서 변형전의 기준상태 좌표에 대한 경사도 연산자이다.

선형탄성재료와 기하학적 비선형만을 고려하는 경우 응력-변형률 관계식은 재료의 기계적 성질 텐서 C 를 사용하여 다음과 같이 표시된다.

$$\circ S = C \cdot \circ \epsilon \quad (4)$$

식(4)에서는 응력이 변형률만의 함수로 표시되었으나, 설계과정에서 재료의 성질등을 설계변수로 설정하는 경우에는 $C=C(b)$, b 는 설계변수 벡터로 되어 응력이 변형률 및 설계변수의 함수가 될 수도 있다.

식(1), (3), (4)는 변위 u 에 관한 비선형방정식이므로 이를 증분추차해석과정을 이용하여 해석하려면 모든 상태변수에 대해 하중단계 t 에서의 기지해에 상태변수의 증분을 더함으로써 다음 하중단계 $t + \Delta t$ 에서의 수렴해를 구해야 한다. 즉, 하중단계 $t + \Delta t$ 에서의 상태변수를 하중단계 t 에서의 기지해와 증분으로 다음과 같이 분해한다.

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} u &= {}^t u + \Delta u & {}^{t+\Delta t} \epsilon &= {}^t \epsilon + \Delta \epsilon \\ {}^{t+\Delta t} f &= {}^t f + \Delta f & {}^{t+\Delta t} T^{\circ} &= {}^t T^{\circ} + \Delta T^{\circ} \\ {}^{t+\Delta t} \circ S &= {}^t \circ S + \Delta \circ S & \circ S &= C \cdot \circ \epsilon \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $u, \epsilon, f, T^{\circ}, S$ 는 각각 변위, 변형률, 물체력, 표면적 및 응력의 증분이다.

식 (3)과 (5)로부터 변형률증분 $\Delta \epsilon$ 를 계산하고 이를 변위증분에 관한 선형항 $\Delta \epsilon$ 와 비선형항 $\Delta \epsilon$ 로 분리하여 쓰기로 한다.

$$\Delta \epsilon = \Delta \epsilon + \Delta \eta \quad (6)$$

$$\Delta \epsilon = \frac{1}{2} [\circ \nabla \Delta u^T + [\circ \nabla \Delta u^T]^T + [\circ \nabla \Delta u^T] [\circ \nabla \Delta u^T] + [\circ \nabla \Delta u^T] [\circ \nabla \Delta u^T]^T] \quad (7)$$

$$\Delta \eta = \frac{1}{2} [\circ \nabla \Delta u^T] [\circ \nabla \Delta u^T]^T \quad (8)$$

식(1)에 식(5)를 대입하고 $\delta^{t+\Delta t} \Delta \epsilon = \delta \circ \Delta \epsilon$ 및 $\delta^{t+\Delta t} \Delta u = \delta \Delta u$ 임을 이용하면 하중단계 $t + \Delta t$ 에서의 가상일 방정식을 얻는다.

$$\int_{\Omega_V} [{}^t_0 S + {}_0 S] \delta_0 \epsilon^0 dV - \int_{\Omega_V} [{}^t_0 f + {}_0 f] \delta u^0 dV - \int_{\Gamma_T} [{}^t_0 T^0 + {}_0 T] \delta u^0 d\Gamma_T = 0 \quad (9)$$

식(9)는 변위 증분 u 에 관한 비선형 방정식이며, 이에 축차적 선형화 해석과정을 도입하기 위해서는 하중단계 t 에서의 평형해는 이미 알고 있다는 사실과 증분의 고차항이 무시할 수 있을만큼 작다는 사실을 이용한다. 즉 고차항인 $S\delta_0 \epsilon$ 를 무시하고 식(9)를 다시 쓰면 다음의 증분평형방정식을 얻을 수 있다.

$$\int_{\Omega_V} {}_0 S \cdot \delta_0 \epsilon^0 dV + \int_{\Omega_V} {}^t_0 S \cdot \delta_0 \epsilon^0 dV - \int_{\Omega_V} {}_0 f \cdot \delta u^0 dV - \int_{\Gamma_T} {}_0 T^0 \cdot \delta u^0 d\Gamma_T = 0 \quad (10)$$

식(10)을 하중단계별로 반복계산하여 하중증분에 대한 상태변수들의 증분이 구해지며 이로써 비선형 구조의 증분축차해석이 가능하게 된다. 여기서 비선형 유한요소법등과 같은 수치해법을 사용할 경우 Newton-Raphson 법, 수정 Newton-Raphson 법 또는 BFGS법 등이 이용될 수 있다^(14~17).

3. 설계민감도 해석

3.1 설계민감도 해석함수

설계민감도 해석이 대상이 되는 기능척도함수의 일반적인 형태는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Psi = \int_{\Omega_V} G[{}^t_0 S, {}^t_0 \epsilon, \{u, b\}] dV + \int_{\Gamma_T} g[{}^t_0 T, b] \cdot d\Gamma_u + \int_{\Gamma_T} h[\{u, b\}] d\Gamma_T \quad (11)$$

식(11)은 함수 G, g, h 의 정의에 따라 특정 점의 응력이나 변위의 제약함수 또는 특정 영역의 평균응력, 반력 등의 제약함수 등을 나타낼 수 있다.

3.2 설계민감도 해석이론

설계민감도를 얻기 위해 사용되는 근사의 정도와 정식화에 이용되는 상태방정식의 형태에 따라 설계민감도 해석이론은 개념적으로 (1) 유한 차분법(finite difference methods; FDM), (2) 요소 해석적 방법(discrete analytical methods; DAM), (3) 유사 해석적 방법(semi-analytical methods; SAM), (4) 연속체 요소법(continuum discrete methods; CDM), (5) 연속체 연속법(continuum continuum methods; CCM) 등으로 분류할 수 있다.

개념적으로 가장 간단하며 설계민감도의 근사해를 구하는 방법이 FDM이며 여기서는 식(11)의 설계변수에 관한 차분을 이용한다.

$$\Delta \Psi = \Psi(b + \delta b) - \Psi(b) \quad (12)$$

DAM에서는 유한요소 또는 경계요소등을 이용하여 요소평형방정식 및 전체 구조의 상태방정식을 유도한 후 이를 해석적으로 미분함으로써 설계민감도를 구한다. 민감도 해석을 요하는 함수의 개수 및 설계변수 벡터의 차원에 따라 직접미분법 또는 수반변수법을 사용함으로써 계산량을 줄일 수 있다^(5~7, 18).

DAM에서의 주된 계산과업은 강도행렬의 설계변수에 관한 미분이다. 그러나 설계변수에 관한 비선형성을 지닌 강도행렬의 미분은 계산량이 대단히 많아지거나 또는 비선형 구조에서와 같이 불가능한 경우도 있다. 따라서 강도행렬의 설계변수에 관한 미분 계산시 유한차분을 이용하는 방법을 생각할 수 있는데 이것이 SAM의 기본적인 착상이다. 그러므로 SAM은 DAM을 변형하여 강도행렬의 미분에는 유한차분을 이용하고 나머지 계산에는 모두 해석적 방법을 이용하는 설계민감도 해석법이라 하겠다.

CDM에서는 식(11)과 같은 설계민감도 해석함수의 미분을 계산하는 대신 Ψ 의 변분을 계산한다. 이때 상태변수의 변분을 계산하는데는 여러가지 방법이 고안되어 있는데, 물질 도함수(material derivatives)의 개념을 이용하는 방법^(9, 12), 수반구조(adjoint structure)의 개념을 이용하는 방법^(9, 10), 기준체적을 사용한 Lagrange함수를 정의하여 이를 이용하는 방법⁽⁹⁾ 등이 그것이다.

본 연구에서는 기준체적과 수반구조를 이용하는 방법을 주로 사용한다. CDM에서 설계민감도 해석함수의 변분 계산이 완료되면 유한요소법등을 이용하여 상태변수를 근사 해석하고 이를 이용하여 설계민감도 계산이 이루어진다.

CCM은 최종단계에서 유한요소법등을 이용한 상태변수의 근사해석을 하지 않는다. 즉 설계민감도 해석함수의 변분과 상태방정식으로서의 연속체방정식을 해석적으로 풀어서 구한 해를 이용하여 설계민감도를 계산하는 방법이다. 따라서 CCM은 상태방정식 및 설계민감도 해석함수의 형태가 해석적으로 풀 수 있는 간단한 경우에만 사용 가능하다.

3.3 기준체적의 개념

기준체적(reference volume)의 개념을 비선형 구조의 설계민감도 해석에 적용시키기 위해서는 변형전의 상태(좌측 상첨자 0 으로 표시)를 기준체적

\bar{V} 와 이의 경계 $\bar{\Gamma}$ (좌측상첨자 r로 표시)에 대응시킨다. 설계변수가 변화하면 변형전의 상태와 기준 상태간의 대응은 변화하지만 기준상태 자체는 변화하지 않는다. 이들의 대응은 $x \leftrightarrow x(x)$ 로 표시되며 이에 따른 상태변수의 변환은 다음과 같이 표현된다⁽⁹⁾.

$$u = u(x), \quad \varepsilon = \varepsilon(x), \quad S = S(x) \quad (13)$$

또 기준체적 및 경계상에서의 적분변환을 위한 Jacobi 행렬을 도입한다.

$$X_{i,j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}, \quad J = |X| \quad (14)$$

따라서 미소체적 및 경계면은 다음과 같다.

$$dV = J d\bar{V} \quad d\Gamma = J_r d\bar{\Gamma} \quad (15)$$

여기서 $J_r = J |X^{-T}n|$ 이며 n은 경계면에서 단위 외향법선벡터이다.

식(13)-(15)를 식(11)에 대입하면 기준체적에서의 기능척도함수는 다음과 같이 변형된다.

$$\Psi = \int_{\bar{V}} \bar{G}(S, \varepsilon, u, b) J d\bar{V} + \int_{\bar{\Gamma}} \bar{g}(T, b) \cdot J_r d\bar{\Gamma}_u + \int_{\bar{\Gamma}} \bar{h}(u, b) J_r d\bar{\Gamma}_\tau \quad (16)$$

또 증분평형식 (10)은 다음과 같이 표현된다.

$$\int S \cdot \delta \varepsilon d\bar{V} + \int S \cdot \delta \eta J d\bar{V} - \int f \cdot \delta u J d\bar{V} - \int T \cdot \delta u J_r d\bar{\Gamma}_\tau = 0 \quad (17)$$

식(3)을 기준체적에 대하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [X^{-T}(\nabla u^T) + (\nabla u^T)^T X^{-1} + X^{-T}(\nabla u^T)(\nabla u^T)^T X^{-1}] \quad (18)$$

여기서 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^T$ 로서 기준체적에 대한 연산자이다. 마찬가지로 방법으로 식(7) 및 (8)의 변형을 증분도 기준체적에 대하여 변환할 수 있다.

3. 4 수반구조의 개념

설계민감도 해석이론 중 DAM에서 수반변수법의 개념을 CDM에 활용하는 과정에서 나타나는 것이 수반구조(adjoint structure)의 개념이다.^(11,19) 수반구조는 원래구조물의 변형상태와 같은 기하학적 형태를 가지며, 최종변형상태에서의 원래구조물의 접선강도(tangent stiffness)와 같은 강도를 가진다고 정의되는 상상적인 구조이다. 수반구조의 상태변수들은 이후에 유도될 설계민감도 해석을 위한 기능척도함수, 식(16)의 변분 계산시에 사용되며, 수반구조에 관련된 평형방정식, 초기조건

및 경계조건 등은 다음과 같다. 여기에서 수반구조의 상태변수에는 우측상첨자 a를 사용하였고 상첨자 i는 초기조건, 상첨자 o는 경계조건을 표시한다.

평형방정식:

$$\int_{\bar{V}} [S^a \cdot \delta \varepsilon^a + S^a \delta \eta^a] J d\bar{V} - \int_{\bar{V}} f^a \cdot \delta u J d\bar{V} - \int_{\bar{\Gamma}} T^{ao} \cdot \delta u J_r d\bar{\Gamma}_\tau = 0 \quad (19)$$

변형을 초기조건:

$$\varepsilon^{ai} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial S^a} \quad \text{in } {}^oV \quad (20)$$

응력 초기조건:

$$S^{ai} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial \varepsilon^a} \quad \text{in } {}^oV \quad (21)$$

물체력:

$$f^a = \frac{\partial \bar{G}}{\partial u} \quad \text{in } {}^oV \quad (22)$$

응력 경계조건(표면력):

$$T^{ao} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial u} \quad \text{on } {}^o\Gamma_\tau \quad (23)$$

변위 경계조건:

$$u^{ao} = - \frac{\partial \bar{g}}{\partial T} \quad \text{on } {}^o\Gamma_u \quad (24)$$

변형을-변위 관계식:

$$\varepsilon^a = \frac{1}{2} [X^{-T}(\nabla u^{aT}) + (\nabla u^{aT})^T X^{-1} + X^{-T}(\nabla u^T)(\nabla u^{aT})^T X^{-1} + X^{-T}(\nabla u^{aT})(\nabla u^T)^T X^{-1}] \quad (25)$$

응력-변형을 관계식:

$$S^a = [\varepsilon^a - \varepsilon^{ai}] - S^{ai} \quad (26)$$

$$\delta \eta^a = \frac{1}{2} [X^{-T}(\nabla u^{aT})(\nabla \delta u^T)^T X^{-1} + X^{-T}(\nabla \delta u^T)(\nabla u^{aT})^T X^{-1}] \quad (27)$$

여기서 특기할 만한 사항은 식(19)의 수반구조 평형방정식이 원래구조의 증분평형방정식(10)과 같다는 점이다. 따라서 전술한 수반구조의 강도가 원래구조의 접선강도와 같다는 사실을 보여주고 있다. 또 수반구조의 하중 및 변위경계조건은 식(20)-(24)에 보인 바와 같이 설계민감도 해석함수의 형태의 의해 결정된다.

3. 5 설계민감도

기준체적의 개념과 수반구조의 상태변수를 이용하여 식(11) 또는 식(16)의 기능척도함수의 설계변수에 대한 변분을 계산하면 다음과 같다⁽²⁰⁾.

$$\begin{aligned}
\delta\Psi = & \int_{\bar{V}} (\delta\bar{G}J + \bar{G}\delta J) d\bar{V} + \int_{\bar{r}_u} (\delta\bar{g}J_r + \bar{g}\delta J_r) d\bar{r}_u \\
& + \int_{\bar{r}_T} (\delta h J_r + h \delta J_r) d\bar{r}_T \\
& + \int_{\bar{V}} \left[\frac{\partial \bar{G}}{\partial \sigma} \delta \sigma S + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon + \frac{\partial \bar{G}}{\partial u} \delta u \right] J d\bar{V} \\
& + \int_{\bar{r}_u} \left[\frac{\partial \bar{g}}{\partial T} \delta T \right] J_r d\bar{r}_u \\
& + \int_{\bar{r}_T} \left[\frac{\partial h}{\partial u} \delta u \right] J_r d\bar{r}_T \quad (28)
\end{aligned}$$

식(28)에 식(19)-(27)의 결과를 대입하면,

$$\begin{aligned}
\delta\Psi = & \int_{\bar{V}} (\delta\bar{G} + \varepsilon^* \delta \sigma S + S^* \delta \varepsilon + f^* \delta u) J d\bar{V} \\
& + \int_{\bar{V}} \bar{G} \delta J d\bar{V} + \int_{\bar{r}_u} (\delta\bar{g} - u^* \delta T) J_r d\bar{r}_u \\
& + \int_{\bar{r}_u} \bar{g} \delta J_r d\bar{r}_u + \int_{\bar{r}_T} (\delta h + T^* \delta u) J_r d\bar{r}_T \\
& + \int_{\bar{r}_T} h \delta J_r d\bar{r}_T \quad (29)
\end{aligned}$$

식(29)를 유한요소를 이용하여 계산하기 위해서는 표준유한요소과정을 사용하며, 유한요소의 형태에 따라 수치계산에 적합한 요소합의 식으로 변환할 수 있다.

설계민감도 계산식(29)를 유도하는 과정에서 구조해석시의 근사인 식(5)를 제외하고는 근사해석을 수행하지 않는다. 따라서 유한요소방정식을 직접미분해야하는 DAM이나 SAM에 비해서 더 정확한 설계민감도를 얻을 수 있다. 이는 식(29)에 기준체적 및 수반구조의 유한요소 해석결과를 직접 대입함으로써 DAM의 유한요소방정식을 미분할 때 불가피하게 나타나는 오차와 이들의 누적을 피할 수 있기 때문이다^(6, 15).

4. 수치예

4.1 문제의 정의

기하학적 비선형 구조의 변분을 이용한 설계민감도 해석을 위해 수치 예로서 그림 1과 같이 양단에 압축하중을 받는 증공판을 고려하였다. 구조물의 치수 및 작용하중(3각형 분포하중)은 그림에 표시한 바와 같다.

그림에서 분포하중의 최대치는 $p=40\text{N/mm}^2$ 이다. 구조 및 하중의 대칭성 때문에 전체 구조를 그림2와 같이 유한요소로 이상화 하였다. 즉 이상화 모형은 11개의 2차원 8절점 유한요소와 50개의 절점으로 구성되어 있으며 요소 및 절점번호와 변위경계조건은 그림에 표시된 바와 같다.

각 요소의 두께를 설계변수로 설정하였으며 구조물 전체중량을 최적화의 목적함수로 하였다. 설계 제약조건으로는 절점변위와 요소응력을 고려하였

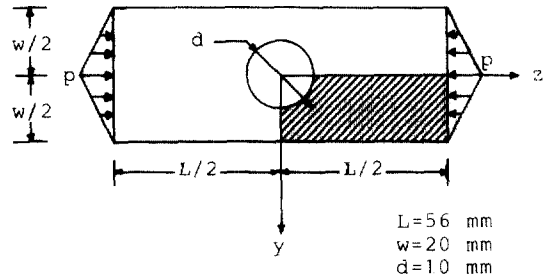


그림 1. 압축력을 받는 증공판

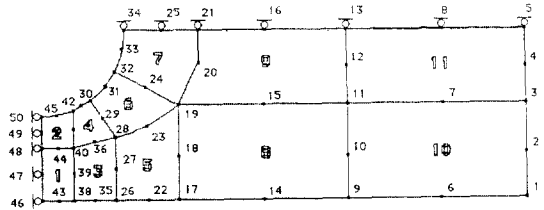


그림 2. 유한요소 이상화 모델

으며, 변위제약조건에서는 절점 1-5의 z방향 변위를, 응력제약조건에서는 요소내의 Gauss 적분점(4점 Gauss 적분 사용)의 최대 등가응력(von Mises effective stress)을 사용하였다.

이상의 설계변수, 목적함수, 제약함수를 정식화하면 다음과 같다.

설계변수:

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_{11})^T \quad (30)$$

목적함수:

$$\Psi_0 = \int_{\bar{V}} \rho g d\bar{V} = \sum_{i=1}^{11} \rho g b_i a_i \quad (31)$$

여기서 NE는 요소의 갯수이며 a_i 는 i번째 유한요소의 면적이다.

변위제약함수:

$$\Psi_i = \frac{|u_i|}{u_a} - 1.0 \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, 5 \quad (32)$$

여기서 u_i 는 절점 i의 z방향변위(mm)이고 u_a 는 허용변위이다.

응력제약함수:

$$\begin{aligned}
\Psi_{i+5} = & \max \sigma_i / \sigma_a - 1.0 \\
= & \frac{1}{\sigma_a} \int_{\bar{V}} J^{-1} \sigma_{\text{eff}} \delta(r - r_{ij}) J d\bar{V} - 1.0 \leq 0 \\
i = & 1, \dots, 11, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (33)
\end{aligned}$$

여기서 σ_a 는 허용응력(N/mm²), δ 는 Dirac의 delta 함수, r는 국부좌표계에서의 요소좌표, r_{ij} 는 i번째 요

표 1. 수치 예의 입력자료

해석자료:	탄 성 계 수 $E=2 \times 10^6 \text{ N/mm}^2$
	포 아 손 비 $\nu=0.25$
	재 료 의 밀 도 $\rho=2.7 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$
설계자료:	허 용 변 위 $u_n=0.1\text{mm}$
	허 용 응 력 $\sigma_n=300\text{N/mm}^2$
	설계변수의 상·하한 $0.1 \leq b_i \leq 10(\text{mm})$,
	$i=1, \dots, 11$

소의 j번째 Gauss 적분점의 요소좌표이다. 또 σ_n 는 i 번째 요소의 j번째 Gauss 적분점에서 von Mises의 등가응력으로 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]^{1/2} \quad (34)$$

한편 수치 예에 사용된 입력자료는 표1과 같다.

4. 2 설계민감도 해석결과

설계변수의 초기치 $b_i=15\text{mm}$, $i=1, \dots, 11$ 에 대하여 목적함수 및 제약함수 Ψ_i , $i=0, \dots, 16$ 의 설계민감도를 계산하였다. CDM에 의한 설계민감도의 해석하는 식(29)를 이용하여 계산하고 이를 유한차분식(12)의 결과와 비교하였다. 정확한 설계민감도 벡터를 FDM에서 계산하려면 δb 로서 충분히 작은 값을 취해야 하는데, 본 예제에서는 $\delta b=10^{-4}$ 으로 하였으며 결과를 표 2의 괄호안에 수록하였다. 표 2에서 보인바와 같이 FDM 및 CDM의 결과는 모든 설계민감도 해석함수에 대하여 매우 잘 일치하므로 CDM의 유용성 및 효율성은 충분히 입증되었다.

표 2. 설계민감도 벡터

함수	$d\Psi = db_i; i=1, \dots, 11; \text{CDM(FDM)}$		
Ψ_0	1.0530E-5(1.0530E-5)	7.2131E-6(7.2131E-6)	2.7072E-5(2.7072E-5)
	1.7314E-5(1.7314E-5)	3.9280E-5(3.9281E-5)	3.0759E-5(3.0759E-5)
	3.8572E-5(3.8572E-5)	1.4850E-4(1.4850E-4)	1.1371E-4(1.1372E-4)
	1.4850E-4(1.4850E-4)	1.2150E-4(1.2150E-4)	
Ψ_1	-3.2665E-3(-3.2663E-3)	-8.5298E-3(-8.5291E-3)	-1.0252E-2(-1.0252E-2)
	-1.1659E-2(-1.1658E-2)	-1.5097E-2(-1.5097E-2)	-8.1625E-3(-8.1619E-3)
	-2.6628E-3(-2.6626E-3)	-3.5627E-2(-3.5624E-2)	-7.3105E-3(-7.3101E-3)
	-1.3336E-2(-1.3335E-2)	1.8367E-3(1.8364E-3)	
Ψ_2	-3.2641E-3(-3.2639E-3)	-8.5692E-3(-8.5686E-3)	-1.0072E-2(-1.0072E-2)
	-1.1891E-2(-1.1890E-2)	-1.5335E-2(-1.5334E-2)	-7.8370E-3(-7.8365E-3)
	-3.0503E-3(-3.0501E-3)	-3.3661E-2(-3.3658E-2)	-1.0212E-2(-1.0211E-2)
	-2.0730E-2(-2.0728E-2)	-6.2456E-3(-6.2452E-3)	
Ψ_3	-3.2650E-3(-3.2648E-3)	-8.5543E-3(-8.5546E-3)	-1.0136E-2(-1.0135E-2)
	-1.1808E-2(-1.1807E-2)	-1.5143E-2(-1.5142E-2)	-8.0735E-3(-8.0729E-3)
	-3.1680E-3(-3.1678E-3)	-3.3161E-2(-3.3158E-2)	-1.2320E-2(-1.2319E-2)
	-2.0357E-2(-2.0355E-2)	-2.3118E-2(-2.3116E-2)	
Ψ_4	-3.2655E-3(-3.2652E-3)	-8.5561E-3(-8.5554E-3)	-1.0127E-2(-1.0126E-2)
	-1.1824E-2(-1.1824E-2)	-1.5333E-2(-1.5331E-2)	-8.0224E-3(-8.0218E-3)
	-3.2494E-3(-3.2491E-3)	-3.3086E-2(-3.3083E-2)	-1.3514E-2(-1.3513E-2)
	-1.1495E-2(-1.1494E-2)	-4.3865E-2(-4.3861E-2)	
Ψ_5	-3.2629E-3(-3.2627E-3)	-8.5656E-3(-8.5650E-3)	-1.0110E-2(-1.0109E-2)
	-1.1851E-2(-1.1850E-2)	-1.5386E-2(-1.5385E-2)	-8.1773E-3(-8.1767E-3)
	-3.1246E-3(-3.1244E-3)	-3.1870E-2(-3.1868E-2)	-1.5078E-2(-1.5077E-2)
	-9.3311E-3(-9.3305E-3)	-5.1615E-2(-5.1610E-2)	
Ψ_6	-3.0208E-1(-3.0206E-1)	-1.7348E-1(-1.7347E-1)	9.7156E-2(9.7150E-2)
	-1.0003E-1(-1.0003E-1)	1.4120E-2(1.4119E-2)	-3.8827E-3(-3.8819E-3)
	-1.1567E-3(-1.1566E-3)	1.9070E-2(1.9069E-2)	-5.9685E-3(-5.9680E-3)
	-4.4046E-4(-4.4042E-4)	-7.4423E-4(-7.4416E-4)	

함수	$d\Psi=db_i; i=1, \dots, 11; \text{CDM(FDM)}$		
Ψ_7	-5.1872E-2(-5.1868E-2)	-7.3104E-1(-7.3098E-1)	-1.9194E-1(-1.9193E-1)
	1.8738E-1(1.8737E-1)	-1.1714E-1(-1.1713E-1)	7.2812E-2(7.2806E-2)
	-2.0397E-3(-2.0398E-3)	-1.1846E-1(-1.1845E-1)	3.8674E-2(3.8671E-2)
	-8.3086E-3(-8.3080E-3)	8.9548E-3(8.9540E-3)	
Ψ_8	3.3997E-2(3.3995E-2)	-3.7177E-2(-3.7174E-2)	-3.6109E-1(-3.6106E-1)
	-1.1393E-1(-1.1393E-1)	2.4184E-2(2.4183E-2)	-2.9713E-2(-2.9710E-2)
	-9.2802E-4(-9.2788E-4)	-3.2362E-3(-3.2356E-3)	3.2551E-3(3.2551E-3)
	2.0062E-3(2.0060E-3)	-1.3351E-3(-1.3350E-3)	
Ψ_9	-6.7447E-2(-6.7442E-2)	1.4345E-1(1.4344E-1)	-9.0946E-2(-9.0938E-2)
	-6.0556E-1(-6.0551E-1)	-1.1402E-1(-1.1401E-1)	7.3817E-2(7.3811E-2)
	-1.4060E-3(-1.4061E-3)	-1.0444E-1(-1.0443E-1)	3.3405E-2(3.3402E-2)
	-7.3331E-3(-7.3326E-3)	7.5952E-3(7.5945E-3)	
Ψ_{10}	1.3490E-2(1.3489E-2)	-3.6993E-2(-3.6990E-2)	4.0381E-2(4.0377E-2)
	-5.3595E-2(-5.3591E-2)	-3.9723E-1(-3.9720E-1)	-3.4512E-2(-3.4509E-2)
	6.6253E-3(6.6246E-3)	2.6198E-2(2.6196E-2)	-2.8026E-2(-2.8025E-2)
	9.7409E-3(9.7401E-3)	-1.1839E-2(-1.1838E-2)	
Ψ_{11}	-4.2907E-3(-4.2900E-3)	1.9270E-2(1.9269E-2)	-4.1209E-2(-4.1206E-2)
	1.8954E-2(1.8952E-2)	-1.3223E-1(-1.3222E-1)	-3.2214E-1(-3.2212E-1)
	6.5719E-3(6.5717E-3)	-3.8819E-2(-3.8815E-2)	2.1144E-2(2.1142E-2)
	-7.5540E-3(-7.5535E-3)	6.4072E-3(6.4067E-3)	
Ψ_{12}	-5.9129E-3(-5.9124E-3)	1.4708E-2(1.4707E-2)	-9.4668E-3(-9.4659E-3)
	1.8765E-2(1.8763E-2)	-2.1307E-2(-2.1305E-2)	-2.4129E-2(-2.4128E-2)
	-1.6877E-1(-1.6876E-1)	-9.7495E-2(-9.7489E-2)	2.6920E-2(2.6917E-2)
	-1.1440E-2(-1.1439E-2)	1.5825E-2(1.5824E-2)	
Ψ_{13}	7.6681E-3(7.6674E-3)	-2.1269E-2(-2.1267E-2)	2.2520E-2(2.2519E-2)
	-3.0634E-2(-3.0632E-2)	1.6416E-2(1.6414E-2)	-3.6121E-2(-3.6118E-2)
	-1.2552E-2(-1.2551E-2)	-3.3235E-1(-3.3232E-1)	-2.1689E-2(-2.1687E-2)
	1.5710E-2(1.5709E-2)	-1.3093E-2(-1.3092E-2)	
Ψ_{14}	-6.1548E-4(-6.1541E-4)	1.5455E-3(1.5454E-3)	-8.5189E-4(-8.5182E-4)
	1.3070E-3(1.3069E-3)	1.6058E-3(1.6058E-3)	2.4365E-3(2.4363E-3)
	5.1986E-3(5.1984E-3)	-7.6917E-2(-7.6912E-2)	-1.8303E-1(-1.8302E-1)
	-2.8178E-2(-2.8176E-2)	1.7786E-2(1.7785E-2)	
Ψ_{15}	3.9225E-4(3.9221E-4)	-1.4239E-3(-1.4238E-3)	2.7846E-3(2.7843E-3)
	-3.8386E-3(-3.8383E-3)	-5.7274E-3(-5.7270E-3)	1.0514E-3(1.0514E-3)
	-3.2140E-3(-3.2138E-3)	3.6674E-2(3.6671E-2)	-4.0872E-2(-4.0869E-2)
	-1.8332E-1(-1.8331E-1)	-9.8823E-2(-9.8816E-2)	
Ψ_{16}	-1.0517E-4(-1.0516E-4)	2.6370E-4(2.6368E-4)	-2.1556E-4(-2.1554E-4)
	2.4882E-4(2.4880E-4)	-1.7787E-3(-1.7786E-3)	8.3679E-4(8.3674E-4)
	2.9215E-3(2.9213E-3)	-8.2816E-3(-8.2805E-3)	1.4936E-2(1.4935E-2)
	-2.2098E-2(-2.2096E-2)	-3.8681E-1(-3.8677E-1)	

5. 요약 및 결론

비선형 거동을 허용하는 구조물의 설계 및

이의 최적화를 위해서는 비선형성을 고려한 설계민감도 해석이 선행되어야 한다. 또 설계민

감도를 정확히 계산하는 것이 최적설계과정의 효율성의 측면에서 필수적이다. 본 연구에서는 좀 더 정확한 기하학적 비선형구조의 설계민감도 해석을 위하여, 비선형구조에서도 사용할 수 있는 가상일의 방정식을 상태방정식으로 채택하여 출발하고 이의 변분을 설계민감도 해석 함수에 도입함으로써 유도된 설계민감도 공식에 최종단계에서 유한요소를 응용함으로써 기하학적 비선형구조에 대한 설계민감도 해석을 수행하였다. 계산된 설계민감도의 정확성은 설계민감도 해석함수의 설계변수에 대한 차분계산을 통해서 확인하였다. 본 연구에서 제시된 설계민감도 해석의 이론적 및 수치해석결과로부터 얻어진 결론을 요약하면 다음과 같다.

(1) 변분을 이용한 기하학적 비선형구조의 설계민감도 해석방법의 유용성 및 효율성이 입증되었다.

(2) 기하학적 비선형구조의 경우 변분을 이용한 설계민감도 해석을 수행하면 좀 더 정확한 설계민감도 벡터를 얻을 수 있다.

(3) 유도된 설계민감도 공식은 중간과정을 변형하여 재료적 비선형구조에도 적용될 수 있다.

감사의 말

이 논문은 1989년도 문교부지원 한국학술진흥재단의 자유공모과제 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.

참고 문헌

1. Haftka, R. T. and Prasad, B., "Optimum Structural Design with Plate Bending Elements, A Survey", *AIAA J.*, Vol. 19, pp. 517-521, 1981
2. Pappas, M., "Improved Methods for Large Scale Structural Synthesis", *AIAA J.*, Vol. 19, pp. 1227-1233, 1981.
3. Arora, J. S. and Ryu, Y. S., *A User's Manual for the Computer Program DOCS, Level 2.5*, TR CAD-SS-82. 1, Design Optimization Laboratory, College of Engineering, The Univ. of Iowa, 1983.
4. Nguyen, D. T., Arora, J. S. and Belegundu, A. D., "Design Optimization Codes for Structures: DOCS Computer Program", *J. Aircraft*, Vol. 20,

- pp. 817-824, 1983.
5. Haug, E. J. and Arora, J. S., *Applied Optimal Design*. John Wiley and Sons, New York, 1979.
6. Ryu, Y. S., Haririan, M., and Arora, J. S., "Structural Design Sensitivity Analysis of Nonlinear Response", *Comput. and Struct.*, Vol. 21, pp. 245-255, 1985.
7. Haug, E. J., Choi, K. K and Komkov, V., *Design Sensitivity Analysis of Sturctural Systems*, Academic Press, New York, 1984.
8. Choi, K. K. and Haug, E. J., "Structural Design Sensitivity Analysis with Generalized Global Stiffness and Mass Matrices", *AIAA J.*, Vol. 22, No. 9, pp. 1299-1303, 1984.
9. Dems, K, and Morz, Z., "Variational Approach to First- and Second-Order Sensitivity Analysis of Elastic Structures", *Int. J. of Numer. Meth. in Eng.*, Vol. 21, pp. 637-661, 1985.
10. Haftka, R. T. and Morz, Z. "Frist- and Second-Order Sensitivity Analysis of Linear and Nonliner Structures", *AIAA J.*, Vol. 24, No. 7, pp. 1187-1192, 1986.
11. Belegundu, A. D. "Lagrangian Approach to Design Sensitivity Analysis", *J. of EM, ASCE*. Vol. 111. No. 5, pp. 580-685, 1985.
12. Choi, K. K. and Santos, J. L. T. "Design Sensitivity Analysis of Nonlinear Structural Systems Part I: Theory", *Int. J. of Numer. Meth. in Eng.*, Vol. 24, pp. 2039-2055, 1987.
13. Yang, R. J. and Botkin, M. E. "Comparison Between the Variational and Implicit Differentiation Approaches to Shape Design Sensitivities", *AIAA J.*, Vol. 24, No. 6, pp. 1027-1032, 1986.
14. Bathe, K. J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Engelwood Cliffs, N. J., 1982.
15. Ryu, Y. S. and Arora, J. S., "Review of Nonlinear FE Methods with Substructures", *J. of EM, ASCE*, Vol. 111, No. 11, pp. 1361-1397, 1985.
16. 류연선, "비선형 유한요소 방정식의 해법을 위한 조합알고리즘", 대한토목학회 논문집, 제6권 제3호, pp. 11-20, 1986.

17. Ryu, Y. S. and Yoon, G. S., "A modified BFGS Method with Substructuring for the Nonlinear Structural Analysis", *J. of SNAK*, Vol. 23, No. 3, pp. 36-46, 1986.
18. 류연선, "비선형 구조의 설계민감도 해석법", 대한토목학회 논문집, 제7권 제4호, pp. 13-20, 1987.
19. Cardoso, J. B. and Arora, J. S. "Variational Method for Design Sensitivity Analysis in Nonlinear Structural Mechanics", *AIAA J.*, Vol. 26, No. 5, pp. 595-603, 1988.

(接受:1990. 2. 13)