

# 保存力 및 非保存력을 받는 構造物의 幾何的 非線形 有限要素解析을 위한 荷重 및 變位增分 알고리즘의 開發

Automatic Load and Displacement Incremental Algorithm for Geometric Non-Linear Finite Element Analysis of the Structure subjected to Conservative and Non-conservative Forces

김 문 영\* · 장 승 필\*\*  
Kim, Moon Young · Chang, Sung Pil

## Abstract

An automatic incremental algorithm for geometric non-linear finite element analysis of the structures subjected to the conservative and non-conservative forces is presented.

By making efficient combination of the load incremental method and the displacement incremental method, this scheme can trace various post-buckling equilibrium path such as snap-through and turning-back.

Several numerical examples to demonstrate the feasibility of the present algorithm, over ranges of deformation that are well beyond those likely to occur in practical structures, are given and discussed.

## 要 旨

本論文에서는 保存力 및 非保存력을 받는 構造物의 非線形 有限要素解析을 遂行하기 위하여 기존의 荷重增分法과 變位增分法을 效率的으로 結合시킨 數值的인 解析알고리즘을 提示하였다. 提案한 알고리즘은 荷重增分과 變位增분이 自動 생성되도록 하므로써 Snap-Through, Turning-Back과 같은 非線形 舉動을 包含하는 多樣한 平衡經路들을 追跡할 수 있었다.

## 1. 序 論

일반적으로 挫屈이 일어난 후의 트러스, 뼈대 및 셸(Shell)과 같은 構造物들은 Snap-Through, Turning-Back과 같이 과도한 變形을 수반하는 幾何的 非線形 舉動을 나타낸다. 기존의 Newton-

Raphson 方法과 같이 단순한 非線形 解析 알고리즘으로는 이러한 構造物들이 나타내는 다양한 後挫屈 平衡經路(Post-buckling Equilibrium Path)들을 追跡할 수 없다. 이 問題를 해결하기 위하여 그동안 많은 研究가 이루어졌으며, 그 研究結果들을 分類하면 다음과 같다.

\*正會員 · 서울大學校 工科大學 講師, 土木工學科

\*\*正會員 · 서울 大學校 工科大學 教授, 土木工學科

1) 荷重増分法<sup>(1)</sup>-Newton-Raphson (NR), Modified Newton-Raphson (MNR) 그리고 Quasi-Newton 方法들이 있으며, 外部荷重을 獨立의 構造物의 平衡狀態를 追跡한다. 이 方法은 Snap-Through 舉動을 쉽게 追跡할 수 없다.

2) 變位増分法<sup>(2,3)</sup>-특정한 變位成分의 크기를 獨立의 變化시켰을 때 이에 對應하는 荷重파라미터 및 다른 變位成分들을 算定하는 方法으로 Turning-Back 舉動을 追跡하는데 어려움이 있다.

3) Arc-Length Method<sup>(5-10)</sup>-Update normal plane method, Spherical Arc-Length Method, Cylindrical Arc-Length Method 등이 있으며, 반복계산 과정에서 Arc-Length가 일정하게 유지되어야 한다는 구속조건을 도입하여 獨立의 變化的 荷重파라미터와 變位成分값들을 결정하는 方法이다. 이 解析方法에 對한 研究가 그동안 급속히 이루어졌으며, 보존력을 받는 構造物의 非線形 解析의 경우에 상당한 성공을 거두었다.

4) Current Stiffness Parameter Method<sup>(12,13)</sup>-각 荷重段階에서 CSP(Current Stiffness Parameter)를 計算하고 이 값에 의지하여 荷重増分 間隔을 自動的으로 調整한후 Snap-Through가 일어나는 미소한 구간을 통과할때만 반복계산을 하지 않으므로써 極限點(limit point)을 통과한다. 이 때문에 極限點을 포함하는 구간에서의 精確한 解析이 어렵다.

위에 제시된 方法들에서는 대부분 外部에서 作用하는 荷重들이 保存力들이며 比例荷重 (Proportional Loading)으로 假定하고 있다. Argyris<sup>(4)</sup>는 非保存力(作用點의 變位에 의존하여 荷重의 크기나 方向이 變化하는 힘)을 받는 構造物의 幾何的 非線形解析을 수행하기 위하여 非保存力의 方向變化를 고려한 荷重増分法을 제시하였다. 文獻<sup>(5)</sup>에서는 Snap-Through 舉動을 만나면 變位増分法을, Turning Back 舉動을 만나면 荷重増分法을 적용하므로써 保存力 및 非保存力을 받는 平面構造物의 完全한 荷重-變位關係 曲線들을 구할 수 있는 解析 方法을 개발하였다. 그러나 自動的인 荷重増分 및 變位増分을 성취하지 못하였기 때문에 구조물의 다양한 平衡經路를 追跡하는데 어려움이

있었으며 非保存力의 影響도 충분히 취급하지 못하였다.

本 論文에서는 保存力뿐만 아니라 非保存力이 作用하는 境遇에도 幾何的 非線形 解析을 수행할 수 있는 荷重増分法과 變位増分法의 解析 알고리즘을 제시한다. 이때 새로운 파라미터를 도입하여 荷重増分法이 적용되는 구간에서는 荷重増分間隔이, 變位増分法이 적용되는 구간에서는 變位増分間隔이 自動的으로 生成되도록 하므로써 荷重増分法과 變位増分法을 效率的으로 結合시킨다.

## 2. 荷重増分法

### 2.1 보존력을 위한 하중증분법<sup>(1)</sup>

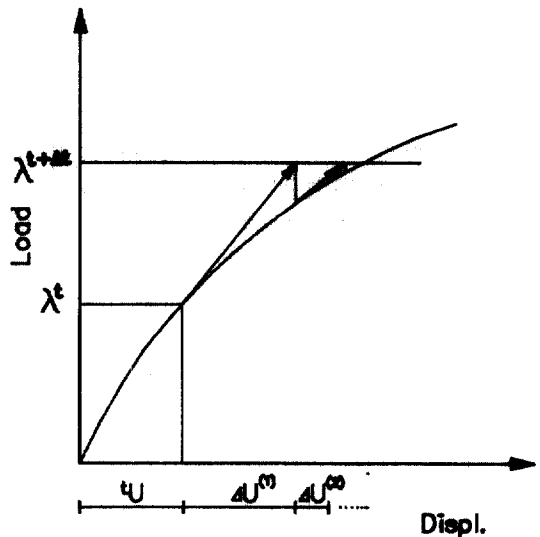


그림 2.1 Notation for Newton-Raphson iteration method

본 연구에서는 Newton-Raphson (NR)방법 (그림 2.1 참조)을 사용하였으며 하중변화 상태를 나타내기 위하여 시간  $t$ 의 개념을 도입하였다. 시간  $t$ 와  $t+\Delta t$  사이의 하중파라미터의 증분이  $\Delta \lambda (= \lambda^{t+\Delta t} - \lambda^t)$ 로 주어졌을 때 이에 대응하는 변위증분벡터  $\Delta U (= U^{t+\Delta t} - U^t)$ 를 산정하기 위한 기본 증분방정식은 다음과 같다.

$$K^{(i)} \cdot \Delta U^{(0)} = {}^{t+\Delta t} \lambda \cdot P - {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)} \quad i=1, 2, 3, \quad (2.1)$$

$${}^{t+\Delta t} U^{(0)} = {}^{t+\Delta t} U^{(i-1)} + \Delta U^{(0)} \quad (2.2)$$

$$\text{초기조건 : } {}^{t+\Delta t} U^{(0)} = U, \quad {}^{t+\Delta t} F^{(0)} = F \quad (2.3)$$

여기서,  $K^{(i)}$ 는  $(i)$ 번째 반복계산시 구조물의 접선

강도 매트릭스를 타나내고,  ${}^{t+\Delta t}\lambda \cdot P$ 는 외부에서 가해지는 절점하중벡터이며  $P$ 는 하중성분들의 비율만을 나타내는 하중벡터를 의미한다.  ${}^{t+\Delta t}F$ 는 부재내력에서 기인하는 절점력벡터이고  $U$ 와  $\Delta U^{(i)}$ 는 각각 시간  $t$ 에서의 변위벡터,  $(i-1)$ 번째와  $(i)$ 번째 반복 계산 사이의 증분변위벡터를 나타낸다.

보존적인 경우에 절점하중벡터의 방향은 일정하게 유지되므로 식(2.1)의 하중벡터는 각 하중단계의 반복계산 과정에서 크기와 방향이 변하지 않는다. 식(2.1)의 오른쪽 두항들은 첫번째 반복계산에서는 증분하중벡터를, 두번째 반복계산부터는 불평형 하중벡터를 구성한다.

Modified Newton-Raphson (MNR)방법을 적용하는 경우에 접선강도 매트릭스 ( $K^{(i)}$ )는 반복계산을 수행할 때마다 새로이 구성하지않고 첫번째 반복계산에서 얻은 강도매트릭스 ( $K^{(0)}$ )를 그대로 사용한다.

### 2.2 非保存力系를 위한 荷重増分法<sup>(4)</sup>

보존력이 작용하는 경우와는 달리 비보존력이 작용하는 경우에는 하중벡터  $P$ 가 절점회전변위로 인하여 방향변화를 일으키므로 하중벡터  $P$ 는 변위벡터의 벡터함수로 생각하여야 하며 반복계산 과정에서 변위벡터가 변할 때마다 다시 계산되어야 한다. 이러한 사실을 고려하면 하중벡터  $P$ 는 다음과 같이  $(i-1)$ 번째와  $(i)$ 번째 반복계산 사이의 증분관계로 나타낼 수 있다.

$$P^{(t+\Delta t)} = P^{(t+\Delta t)U^{(i-1)}} + \partial P / \partial U \cdot \Delta U^{(i)} \quad (2.4)$$

여기서,  $\partial P / \partial U$ 는 변위벡터가  ${}^{t+\Delta t}U^{(i-1)}$ 인 구조물의 변형상태를 기준으로 하중벡터  $P$ 의 변화율을 나타낸다.

식(2.4)를 식(2.1)에 대입하여 정리하면 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$(K^{(i)} - K_{cr}^{(0)}) \Delta U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\lambda \cdot P^{(t+\Delta t)U^{(i-1)}} - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \quad (2.5)$$

여기서,  $K_{cr}^{(0)} = {}^{t+\Delta t}\lambda \cdot \partial P / \partial U$ 로 정의되며 비보존력의 방향변화를 나타내는 Load Correction Stiffness Matrix (L. C. S. M.)라고 부른다. 그리고 수렴속도를 빠르게하기 위해서는 접선강도매트릭스에 L. C. S. M.을 포함시키는 것이 필요하다.

$(i-1)$ 번째와  $(i)$ 번째 반복계산 사이의 증분하중벡터는 식(2.5)의 오른쪽 두항으로 결정되며, 식(2.5)를 풀어서 새로운 변위벡터( ${}^{t+\Delta t}U^{(i)}$ ) 및 절점력

벡터( ${}^{t+\Delta t}F^{(i)}$ )를 계산하면 다음과 같이 불평형 하중벡터를 산정할 수 있다.

$$R^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\lambda \cdot P^{(t+\Delta t)U^{(i)}} - {}^{t+\Delta t}F^{(i)} \quad i=1, 2, 3, \dots \quad (2.6)$$

여기서,  $R^{(i)}$ 는 반복계산을 시작할때의 증분하중벡터를 나타낸다.

비보존력을 받는 구조물의 접선강도 매트릭스를 산정하는 경우, 발산을 방지하고 수렴속도를 빠르게 하기위하여 L. C. S. M.을 포함시키는 것이 필요하지만 강도매트릭스가 비대칭 행렬이되는 단점을 갖게된다. MNR방법을 적용하거나 강도매트릭스의 대칭성을 유지시키고자 할때에는 강도매트릭스의 산정에서 L. C. S. M.를 제외시킬 수 있다. 그러나 불평형하중과 하중벡터를 산정할때에는 반복계산을 수행할 때마다 절점의 회전변위의 변화로 인한 비보존력의 방향변화를 반드시 고려하여야 한다.

## 3. 變位増分法

### 3.1 保存力系를 위한 變位増分法

변위증분법에서는 특정 변위성분( $U_i$ )에 대응하는 하중 파라미터 및 다른 변위벡터들의 증분을 구하고자 한다. Batoz와 Dhatt<sup>(5)</sup>은 접선강도 매트릭스와 불평형 하중의 산정과정을 하중증분법과 동일하게 하고, 시간  $t$ 와  $t+\Delta t$  사이의 반복계산에서 특정한 변위성분의 크기가 변하지 않는다는 구속조건을 사용함으로써 하중파라미터와 나머지 증분변위성분들을 계산하였다. Batoz와 Dhatt의 변위증분법은 간단하면서도 강도매트릭스의 Band-Width를 파괴시키지 않기 때문에 본 연구에서는 Batoz와 Dhatt의 방법을 채택하였으며 이 방법의 기본 증분방정식은 다음과 같다.

$$K^{(i)} \cdot \Delta U^{(i)} = \Delta \lambda^{(i)} \cdot P + R^{(i)} \quad (3.1)$$

$$R^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\lambda^{(i-1)} \cdot P - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \quad (3.2)$$

$${}^{t+\Delta t}U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)} \quad (3.3)$$

$${}^{t+\Delta t}\lambda^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\lambda^{(i-1)} + \Delta \lambda^{(i)} \quad i=1, 2, 3, \dots \quad (3.4)$$

여기서,  $\Delta \lambda^{(i)}$ 는  $(i)$ 번째 반복계산 과정에서 하중파라미터의 증분,  $R^{(i)}$ 는 불평형 하중벡터이고  $R^{(i)}$ 은 전 단계에서 남은 불평형 하중벡터를 나타낸다.

하중증분법에서는 하중파라미터의 증분( $\Delta \lambda$ )의 크기를 일정하게 유지시키면서 반복계산을 수행하였지만, 변위증분법에서는 반복계산 과정에서의 하중파라미터 값의 변화를 나타내기 위하여 하중파라미터의 오른쪽에 덧침자를 사용하였다. 아래는 식(3.

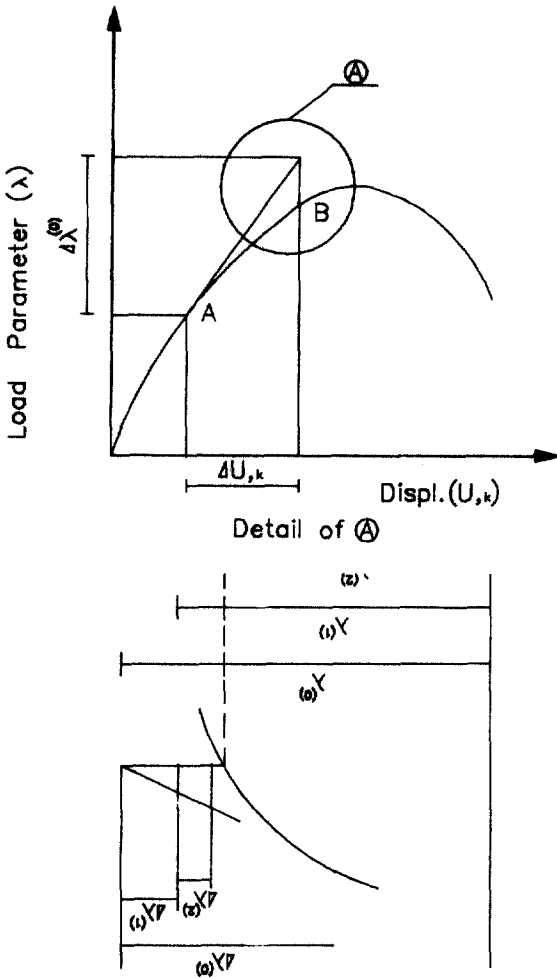


그림 3.1 Notation for displacement incremental iteration method

1)에서 하중파라미터와 나머지 변위중분벡터성분들을 결정하는 과정을 요약한 것이다. (그림 3.1 참조)

1) 불평형 하중에 대한 중분변위벡터 ( $\Delta U_R^{(i)}$ )와 하중벡터 (P)에 의한 중분변위벡터 ( $\Delta U_P^{(i)}$ )를 구한다.

$$K^{(i)} \cdot \Delta U_R^{(i)} = R^{(i)}, \quad i=1, 2, 3, \dots \quad (3.5)$$

$$K^{(i)} \cdot \Delta U_P^{(i)} = P, \quad i=1, 2, 3, \dots \quad (3.6)$$

2) 첫번째 반복계산일 때에는 k번째 중분변위벡터에 대한 구속조건식은 다음과 같다.

$$\Delta U_{,k}^{(i)} = \Delta \lambda^{(i)} \cdot \Delta U_{P,k}^{(i)} + \Delta U_{R,k}^{(i)} \quad (3.7)$$

여기서, ( )<sub>k</sub>는 ( ) 벡터의 k번째 성분을 의미한다.

식 (3.7)로부터 하중파라미터  $\Delta \lambda^{(i)}$ 를 구하고 이값

을 이용하여 중분변위벡터 ( $\Delta U^{(i)} = \Delta \lambda^{(i)} \cdot \Delta U_P^{(i)} + \Delta U_R^{(i)}$ )를 산정한다.

3) 두번째 반복계산 이후에서는 k번째 중분변위벡터성분의 크기가 일정하게 유지되어야 한다는 점에 유의하면 다음과 같은 구속조건을 얻는다.

$$\Delta U_{,k}^{(i)} = \Delta \lambda^{(i)} \cdot \Delta U_{P,k}^{(i)} + \Delta U_{R,k}^{(i)} = 0, \quad i=2, 3, \dots \quad (3.8)$$

식 (3.8)로부터 하중파라미터  $\Delta \lambda^{(i)}$ 를 구하고 이값을 이용하여 중분변위벡터 ( $\Delta U^{(i)} = \Delta \lambda^{(i)} \cdot \Delta U_P^{(i)} + \Delta U_R^{(i)}$ )를 산정한다.

MNR 방법을 적용하는 경우에는 각 하중단계에서 반복계산을 행할 때마다 접선강도 매트릭스와  $\Delta U_P^{(i)}$ 를 새로이 계산하지 않고 첫번째 반복계산에서 얻은 강도매트릭스 ( $K^{(1)}$ )와  $\Delta U_P^{(1)}$ 를 그대로 사용한다.

### 3.2 비보존력계를 위한 변위증분법

보존력만 작용하는 경우에는 식(3.1)의 P벡터가 전 하중구간에 걸쳐서 일정하지만, 비보존력이 작용하는 경우에는 작용하는 지점이 회전함에 따라 비보존력의 작용방향이 계속 변화하므로 식(3.1)은 아래와 같이 바뀌어야 한다.

$$K^{(i)} \cdot \Delta^{(i)} = {}^{t+\Delta} \lambda^{(i)} \cdot P^{(t+\Delta)U^{(i)}} - {}^{t+\Delta} F^{(i-1)} \quad (3.9)$$

식(2.4)를 고려하면 식(3.9)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(K^{(i)} - K_{nc}^{(i)}) \cdot \Delta U^{(i)} = \Delta \lambda^{(i)} \cdot P^{(t+\Delta)U^{(i-1)}} + R^{(i)} \quad (3.10)$$

$$R^{(i)} = {}^{t+\Delta} \lambda^{(i-1)} \cdot P^{(t+\Delta)U^{(i-1)}} - {}^{t+\Delta} F^{(i-1)} \quad (3.11)$$

여기서,  $K_{nc}^{(i)} = {}^{t+\Delta} \lambda^{(i-1)} \cdot \partial P / \partial U$ 이며,  $\Delta \lambda^{(i)} \cdot \partial P / \partial U \cdot \Delta U^{(i)}$ 는 2차항이므로 무시되었다.

아래는 비보존력이 작용하는 경우에 반복계산에 의해서 하중파라미터와 나머지 변위중분벡터 성분을 결정하는 과정을 요약한 것이다.

1) 불평형 하중에 대한 중분변위벡터 ( $\Delta U_R^{(i)}$ )와 하중벡터 (P)에 의한 중분변위벡터 ( $\Delta U_P^{(i)}$ )를 계산한다.

$$(K^{(i)} - K_{nc}^{(i)}) \cdot \Delta U_R^{(i)} = R^{(i)} \quad (3.12)$$

$$(K^{(i)} - K_{nc}^{(i)}) \cdot \Delta U_P^{(i)} = P^{(t+\Delta)U^{(i-1)}} \quad i=1, 2, 3, \dots \quad (3.13)$$

2), 3) 보존력이 작용하는 경우의 계산과정과 동일하다.

하중증분법에서와 마찬가지로 비보존력을 받는 구조물의 접선강도 매트릭스를 산정하는 경우에 L.C.S.M.을 포함시키는 것이 필요하고, 불평형하중과 하중벡터를 산정할때 절점의 회전변위로 인한 비보존력의 방향변화를 반드시 고려하여야 한다. MNR 방법을 적용하는 경우에 접선강도 매트릭스는 첫번째 반복계산에서 얻은 강도매트릭스 ( $K^{(1)}$ )를 그대로 사용할 수 있지만 보존력을 받는 경우와는 달리 비보존력을 받는 경우에는 P벡터가 연속적으로 변화하므로  $\Delta U_p^{(i)}$  벡터는 반복계산을 수행할 때마다 새로이 계산하여야 한다.

#### 4. 荷重増分法과 變位増分法の 結合

비선형 유한요소해석을 수행하는 주된 목적은 하중파라미터 ( $\lambda$ )와 이에 대응하는 변위벡터 ( $U$ )를 구하므로써 전 하중단계에 대한 구조물의 거동을 파악하려는 것이다. 이를 위하여 2장과 3장에서는 각각 보존력계 및 비보존력계에 대한 하중증분 알고리즘과 변위증분 알고리즘을 고찰하였다. 4장에서는 하중파라미터 ( $\lambda$ )와 특정한 변위성분 ( $U_k$ )에 주목하여  $\lambda-U_k$  관계곡선의 기울기를 접선강도 파라미터로 정의하고, 이 파라미터를 이용하여 자동적으로 하중증분과 변위증분이 이루어지도록 하므로써 하중증분법과 변위증분법을 효율적으로 결합시킨다.

##### 4. 1 接線剛度 파라미터(Tangent Stiffness Parameter)의 正義

2장과 3장에서 개별적으로 생각한 하중증분법과 변위증분법을 결합시키기 위하여 다음과 같이 접선강도 파라미터( $T_p$ )를 정의한다.

$$T_p = \Delta\lambda / \Delta U_k \quad (4.1)$$

여기서,  $\Delta\lambda$ 와  $\Delta U_k$ 는 각각 시간  $t$ 의 하중단계의 첫번째 반복 계산과정에서 산정되는 하중파라미터의 증분,  $k$ 번째 변위성분의 증분을 나타낸다. ( $t$ )의 오른쪽 윗첨자는 시간  $t$ 에서의 값을 의미한다.

식(4.1)에서 정의된  $T_p$ 는  $\lambda$ 와  $U_k$ 를 그래프로 표시하였을때  $\lambda-U_k$ 사이의 기울기를 나타내므로 Snap-through 구간에서는  $T_p$ 값이 영에 가깝게 되고, Turing-back 구간에서는  $T_p$ 값이 무한대에 가까운 큰 값을 나타낸다. 본 연구에서는 각 하중단계의 첫번째 반복계산 과정을 시작할때 다음과 같이  $T_p$ 를 계산한다. 즉 보존력이 작용하는

경우에는 식(3.6)을, 비보존력이 작용하는 경우에는 식(3.15)를 사용하여,  $\Delta\lambda$ 값이 1.0에 대응하는 변위증분벡터  $\Delta U_p^{(1)}$ 을 산정하고  $\Delta U_p^{(1)}$ 의  $k$ 번째 변위성분  $\Delta U_{p,k}^{(1)}$ 의 역수를  $T_p$ 로 산정한다.

자동적인 하중증분과 변위증분이 이루어지도록 하기 위하여는 다음 하중단계에 적용하여야 할 증분법이 하중증분법인지 또는 변위증분법인지를 먼저 판별하여야 한다. 이때 하중증분법이 적용된다면 하중파라미터의 증분간격( $\Delta\lambda$ )의 부호와 크기를, 변위증분법이 적용된다면 특정한 변위성분의 증분간격( $\Delta U_k$ )의 부호와 크기를 결정하여야 한다. 본 연구에서는 식(4.1)에서 정의된  $T_p$ 값을 계산하여 이 값이 입력으로 주어지는 허용값 (DETOL)보다 작으면 변위증분법을 적용하고 이 값이 DETOL보다 크면 하중증분법을 적용하였다. DETOL의 크기는 문제에 따라서 적절히 정해야 한다. 첫번째 하중단계는 하중증분법으로 시작하며 이후의 하중단계에서는 다음 4가지 경우로 나누어 하중증분간격 또는 변위증분간격의 크기와 부호를 결정하였다.

이때 하중증분간격의 절대값 (DDISP)과 변위증분간격의 절대값 (DLOAD)은 전 하중단계에 걸쳐서 일정하게 유지되도록 하였으며, 발산을 방지하기 위하여 반복계산의 최대허용횟수 (NITER)이내에 수렴하지 않으면 이전의 평형상태로 되돌아가서 증분구간을 반으로 줄이고 다시 반복계산을 수행하도록 하였다.

1) 하중증분법에서 하중증분법으로 이어지는 경우 :

$$(\Delta\lambda)_{new} = (\Delta\lambda)_{old}$$

여기서,  $(\Delta\lambda)_{new}$ 는 다음단계의 하중증분값이고  $(\Delta\lambda)_{old}$ 는 전단계의 하중증분값이다.

2) 하중증분법에서 변위증분법으로 바뀌는 경우 :

$$(\Delta\lambda)_{old} \text{와 } T_p \text{를 곱한 값의 부호가 陽이면 } (\Delta U_k)_{new} = +DDISP,$$

$$(\Delta\lambda)_{old} \text{와 } T_p \text{를 곱한 값의 부호가 陰이면 } (\Delta U_k)_{new} = -DDISP \text{로 선택한다.}$$

여기서,  $(\Delta U_k)_{new}$ 는 다음단계의 변위증분값이다.

3) 변위증분법에서 변위증분법으로 이어지는 경우 :

$$(\Delta U, k)_{new} = (\Delta U, k)_{old}$$

여기서,  $(\Delta U, k)_{old}$ 는 전단계의 변위중분값이다.

4) 변위중분법에서 하중중분법으로 바뀌는 경우:

$(\Delta U, k)_{old}$ 와  $T_P$ 를 곱한 값의 부호가 양이면  $(\Delta \lambda)_{new} = +DLOAD$ ,

$(\Delta U, k)_{old}$ 와  $T_P$ 를 곱한 값의 부호가 음이면  $(\Delta \lambda)_{new} = -DLOAD$ 로 선택한다.

#### 4.2 荷重増分法과 變位増分法을 結合시킨 解析 알고리즘

다음은 보존력 및 비보존력을 받는 구조물의 기하적 비선형 해석을 수행하기 위하여 본 연구에서 사용한 해석 알고리즘을 제시한 것이다.

(1) 구조물의 기하학적인 정보와 재료의 역학적인 성질을 나타내는 자료들을 입력한다.

(2) 하중성분들의 비율만을 나타내는 하중벡터  $P$ 를 입력한다.

여기서,  $P$ 벡터는 외부에서 작용하는 하중이 보존력이면 전 하중단계에 걸쳐서 일정하며 비보존력인 경우에는 변위가 일어남에 따라 연속적으로 변한다.

(3) 다음 하중단계에 들어가기 이전의 하중단계에서 확립된 변위벡터, 내력(internal force) 그리고 반력들을 저장한다.

(4) 첫번째 하중단계에서는 하중중분법으로 시작한다.

(5) 두번째 하중단계부터는 반복계산과정으로 들어가기 전에  $T_P$ 값을 먼저 산정한다.

(6) 단계 (5)에서 계산한  $T_P$ 값을 이용하여 하중중분법과 변위중분법의 중에서 어느 방법으로 들어갈 것인가를 결정한다. 그리고 4.1절의 단계 (1)~단계 (4)에서 제시된 방법을 사용하여  $\Delta \lambda$  또는  $\Delta U, k$ 를 산정한다.

(7) 단계 (5)에서  $T_P$ 값이  $DETOL$ 값보다 큰 경우에는 아래와 같이 하중중분법의 반복계산 과정으로 들어간다.

1) 첫번째 반복계산에서 사용되는 증분하중벡터  $(\Delta \lambda \cdot P + \lambda \cdot P - F)$ 를 구한다. 비보존력이 작용하는 경우에는  $P$ 벡터를  $P(U)$ 로 산정하여 계산한다.

2) 구조물의 접선강도 매트릭스를 구성한다. 비보존력이 작용하는 경우에는 여기에 L.C.S.M.을

포함시킨다.

3) 증분방정식(2.1)을 풀어서 증분변위벡터  $\Delta U^{(i)}$ 를 계산하고 식(2.2)를 사용하여 변위벡터  $U^{(i)}$ 를 구한다.

4) 절점하중벡터  ${}^{t+\Delta t} \lambda \cdot P$ 와 절점력벡터  ${}^{t+\Delta t} F^{(i)}$ 를 산정한다. 1)과 마찬가지로 비보존력이 작용하는 경우에는  $P$ 벡터를  $P(U^{(i)})$ 와 같이 산정하여야 한다.

5) 불평형 하중벡터를 구하고 수렴조건을 만족시키지 못하면 단계 (2)로 돌아가서 수렴조건을 만족시킬 때까지 반복계산한다.

(8) 단계 (5)에서  $T_P$ 값이  $DETOL$ 값보다 작은 경우에는 아래와 같이 변위중분법의 반복계산으로 들어간다.

1) 불평형 하중벡터  $(R^{(i)})$ 를 구한다. 비보존력이 작용하는 경우에는 추가적으로 하중벡터  $P(U^{(i-1)})$ 도 계산하여야 한다.

2) 구조물의 접선강도 매트릭스를 구성한다. 비보존력이 작용하는 경우에는 여기에 L.C.S.M.을 포함시킨다.

3) 보존력의 경우에는 3.1절, 비보존력의 경우에는 3.2절의 계산과정을 각각 적용하여 특정한 증분변위성분  $\Delta U, k^{(i)}$ 이 주어졌을 때 하중파라미터의 증분  $\Delta \lambda^{(i)}$ 와 나머지 증분변위벡터  $\Delta U^{(i)}$ 를 계산하고 식(3.3)을 사용하여 변위벡터  $U^{(i)}$ 를 구한다.

4) 절점하중벡터  ${}^{t+\Delta t} \lambda \cdot P$ 와 절점력벡터  ${}^{t+\Delta t} F^{(i)}$ 를 산정한다. 비보존력이 작용하는 경우에는  $P$ 벡터를  $P(U^{(i)})$ 로 산정한다.

5) 불평형 하중벡터를 구하고 수렴조건을 만족시키지 못하면 단계 (2)로 돌아가서 수렴조건을 만족시킬 때까지 반복계산한다.

(9) 반복계산의 최대허용횟수 이내에 수렴하면 계산한 결과들을 출력하고 다음 하중단계로 들어간다. 만일 수렴하지 못하면 하중중분 구간의 경우에는  $\Delta \lambda$ 를, 변위중분 구간인 경우에는  $\Delta U, k$ 의 크기를 반으로 나누고 단계 (3)에서 저장하였던 값들을 가지고 단계 (4) 또는 단계 (5)로 되돌아간다.

#### 5. 수치해석 예

하중중분법과 변위중분법을 결합시킨 알고리즘을 사용하여 보존력 및 비보존력을 받는 평면빔대 구조물들을 해석하였던 이전의 논문<sup>(15)</sup>에서는 하중

중분 또는 변위중분을 적용하는 구간을 판단하기 위하여 여러번 비선형 해석을 수행하여야 하는 번거로움을 겪었다. 특히 여러개의 Snap-Through 와 Turning-Back 구간을 포함하는 복잡한 비선형 거동을 보이는 문제를 해석하는 경우에는 해석이 거의 불가능하였다. 본 논문에서는 자동적으로 하중중분 및 변위중분이 이루어지도록 하므로써 이러한 결점을 극복하였다. 본 장에서는 이러한 점을 보완한 해석프로그램을 사용하여 여러개의 극한점들을 갖는 평면뼈대 구조물을 해석으로 선택하고 그 해석결과들을 분석, 검토하므로써 본 연구에서 제안한 방법의 정당성을 입증하고자 한다. 취급하는 예제들의 비선형 해석에서  $T_p$ 값은 그림 5.1의 m점의 수직변위를 식(4.1)의 k번째 변위성분으로 선택하여 계산하였으며 이때 DETOL값은 0.5, NITER값은 8, P벡터의 하중성분은 1000.0N, DLOAD값은 0.5, DDISP값은 0.5를 사용하였다.

5.1 保存力을 받는 힌지-固定端인 直角 뼈대 構造物

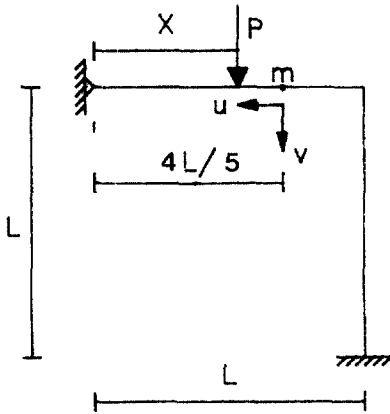


그림 5.1 Hinged-fixed right angle frame under conservative force

그림 5.1은 왼쪽의 힌지로부터 거리 x만큼 떨어진 지점에서 횡방향의 보존력을 받는 힌지-고정단인 직각 뼈대구조물을 나타낸 것이다. 수평, 수직부재들을 각각 10개의 유한요소로 분할하여 비선형 해석을 수행하였으며 이때 사용된 재원은 다음과 같다.

길이  $L=120\text{cm}$ , 탄성계수  $E=7.2 \times 10^6\text{N/cm}^2$   
 단면적  $A=6\text{cm}^2$ , 단면 2차모멘트  $I=2\text{cm}^4$

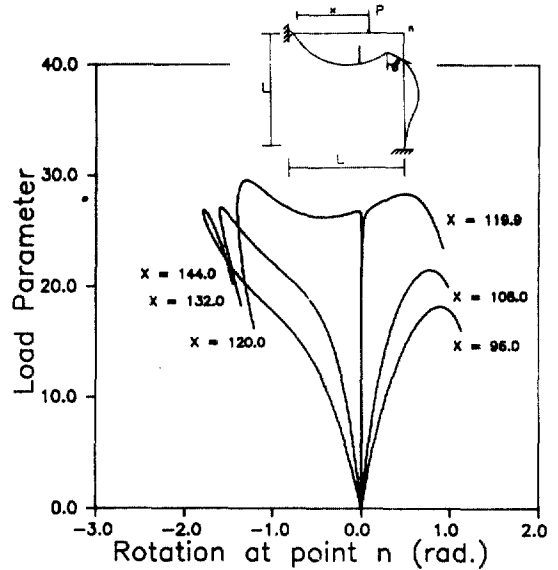


그림 5.2 Load-rotation curves of point n according to the variation of distance x

그림 5.2는 횡하중이 작용하는 위치 x가 변화함에 따라 하중과 n점의 회전각 사이의 관계곡선을 나타낸 것이다. 그림 5.2는 횡하중이 n점에 작용하는 경우에 대한 후좌굴거동이 비대칭점(asymmetric point of bifurcation) 형태의 비선형 거동<sup>(17)</sup>을 나타냄을 보여준다. 즉 횡하중이 작용하는 위치 x가 L보다 작은 경우에는 좌굴이 진행됨에 따라 하중의 크기는 줄어들면서 n점의 회전각이 반시계방향으로 증가하는 반면에, x가 L보다 큰 경우에는 하중의 크기가 증가하면서 회전각도 시계방향으로 증가하는 후좌굴거동을 나타낸다. 표 5.1은 횡하중의 위치의 증가에 따라 이에 대응하는 상부극한하중(upper limit load)의 크기를 표로 정리한 것이다. 횡하중이 120.0cm 지점에 작용하는 경우에, 좌굴 직후에는 변위가 증가하는 후좌굴거동을 보였으며 이때의 상부극한하중( $\lambda_{1/2}=29.547$ )의 크기가 첫번

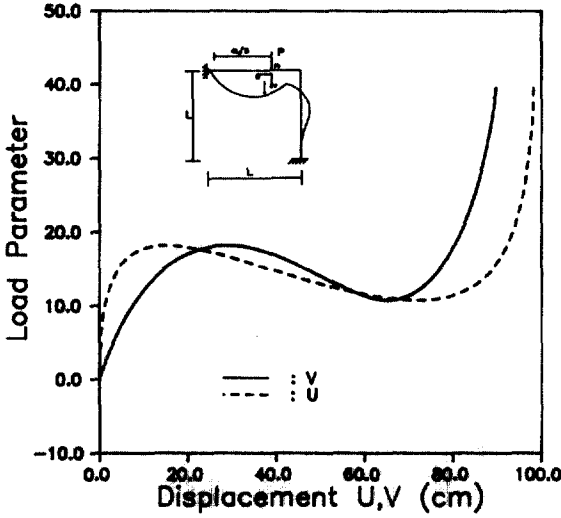
표 5.1 Upper limit loads of hinged right angle frame according to the variation of distance x

x(cm)	96.0	108.0	119.9	120.0	132.0	144.0
Limit Load ( $\lambda=P \cdot L^3/EI$ )	18.199	21.519	28.354	26.779 (29.547)	27.075	26.854

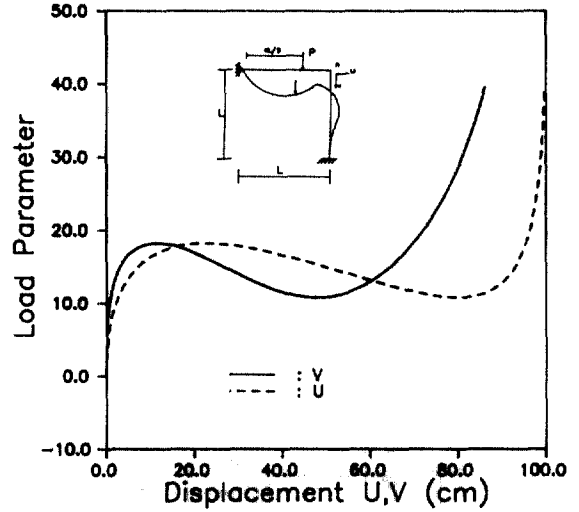
제 극한하중( $\lambda_{ul}=26.779$ )보다 더 큰 값을 나타낸 것은 주목할만하다. 그림 5.3(a), 5.3(b)는 각각  $x=0.8 \cdot L$ 에 횡방향의 보존력이 작용할 때 m점과 n점의 수평, 수직 변위들과 하중과의 관계를 곡선으로 나타낸 것이다. 이 예제는 Turning-Back을 일으키지 않는 단순히 Snap-Through만을 보여 주었으며 이때 상부극한하중(Upper limit load)과 하부극한하중(lower limit load)은 표 5.2에 나타

내었다( $\alpha$ 값이 零인 경우)

그림 5.4(a), 5.4(b)는 각각  $x=L$ 의 위치에 횡하중이 작용할때 m점 및 n점의 수평, 수직변위와 하중관계를 곡선으로 나타낸 것이다. 그림 5.4은 시계방향으로 좌굴이 일어났음을 보여주고 있으며 이때 첫 번째 상부극한하중은  $\lambda_{ul}=26.788$ 이고 구조물의 임밀한 임계하중  $\lambda_c=26.963$ (문헌<sup>(6)</sup>참조)과 비교할때 서로 근접한 값을 보이고 있음을 알 수 있다. 좌굴

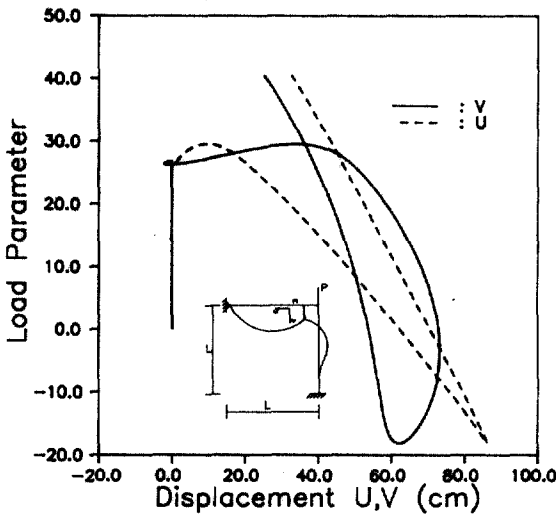


(a) Load-deflection curves of point m

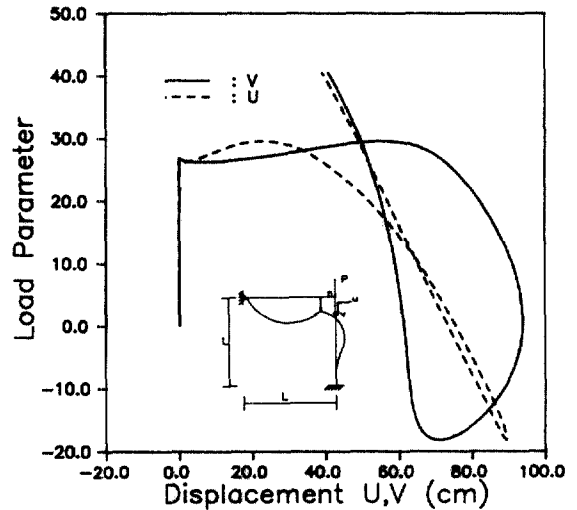


(b) Load-deflection curves of point n

그림 5.3 Hinged-fixed right angle frame subjected to conservative force at  $x=0.8 \cdot L$



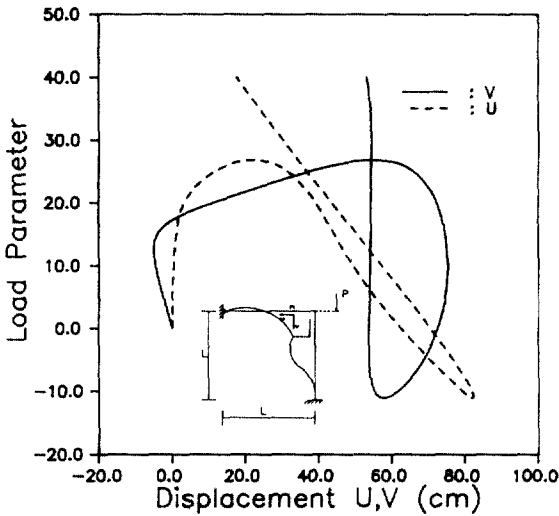
(a) Load-deflection curves of point m



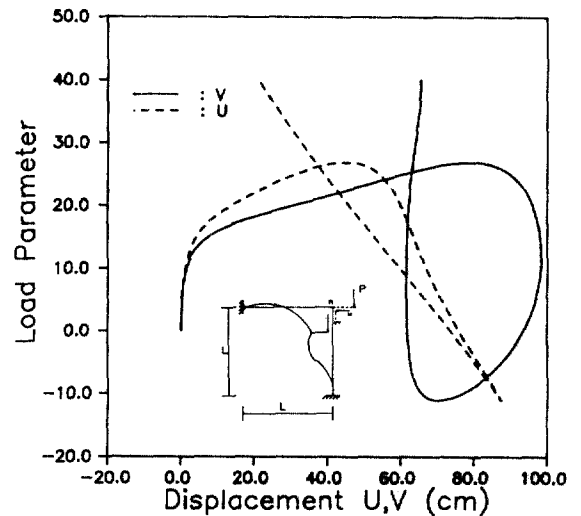
(b) Load-deflection curves of point n

그림 5.4 Hinged-fixed right angle frame subjected to conservative force at  $x=L$





(a) Load-deflection curves of point m



(b) Load-deflection curves of point n

그림 5. 5 Hinged-fixed right angle frame subjected to conservative force at  $x=1.2 \cdot L$

이 일어나는 초기에는 하중크기의 미소한 변화와 함께 첫번째 Snap-Through( $\lambda_{11}=26.222$ )를 일으켰으며, 두번째 Snap-Through( $\lambda_{12}=29.545$ ) 구간에는 과도한 변형과 함께 급격한 하중의 감소를 보였다. 하부극한점( $\lambda_{12}=-18.179$ )을 통과한 이후에는 하중이 증가하면서 점차 처짐이 줄어드는 비선형 거동을 나타내었다.

그림 5. 5(a), 5. 5(b)는 각각  $x=1.2 \cdot L$ 의 위치에 횡하중이 작용할때 m점 및 n점의 수평, 수직변위와 하중관계를 곡선으로 나타낸 것이다. 본 예제는 시계방향으로 좌굴이 일어나기 때문에 횡하중이 n점에 작용하는 경우와 유사한 비선형 거동을 나타내었다. 상부극한하중( $\lambda_{10}=26.855$ )은  $0.2 \cdot L$ 의 편심에도 불구하고 임계하중값과 거의 일치하였으며 하부극한하중은  $\lambda_4=-11.045$ 이었다.

### 5. 2 비보존력을 받는 힌지-고정단인 직각뿔대 구조물

그림 5. 6은 왼쪽의 힌지로부터 거리 x만큼 떨어진 지점에 작용점이 회전변위( $\theta$ )를 일으킴에 따라 작용방향이  $\alpha \cdot \theta$ 만큼 회전하는 횡방향의 비보존력을 받는 힌지-고정단인 직각 뿔대구조물을 나타낸 것이다. 여기서  $\alpha$ 는 비보존력의 방향변화를 조절하는 파라미터이다. 뿔대구조물의 수평, 수직부재들을 각각 10개의 유한요소로 분할하여 비선형 해석을 수행하였으며 이때 사용된 재원은 5.1절의 경우와 같다.

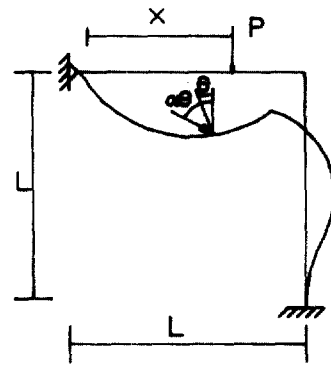
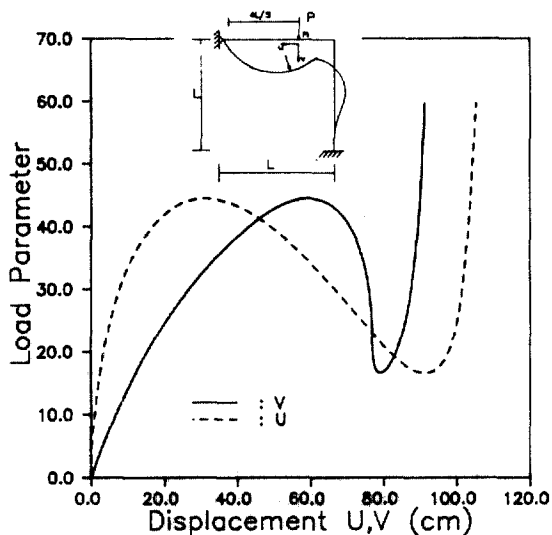


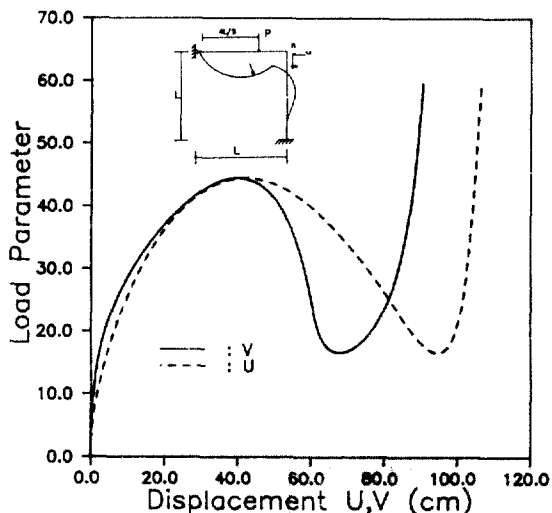
그림 5. 6 Hinged-fixed right angle frame under circulatory transverse Load

그림 5. 7은  $x=0.8 \cdot L$ 에 횡방향의 비보존력이 작용하는 경우에 대한 완전한 하중-변위곡선을 나타낸 것이며 이때 상부극한하중과 하부극한하중은 표 5. 2에 나타내었다( $\alpha$ 값이 1.0인 경우). 보존력이 작용하는 경우와 비교할때 비보존력의 상부극한하중이 보존력의 극한하중보다 약 2.44배 크다는 것을 알 수 있다. 이는 반시계방향으로 좌굴이 일어나는 본 예제의 경우에 구조물이 변형을 일으킴에 따라 비보존력의 수평분력이 구조계의 안정성을 높여주는 방향으로 작용하였기 때문이다.

그림 5. 8(a), 5. 8(b)는 각각  $x=L$ 의 위치에 횡방향

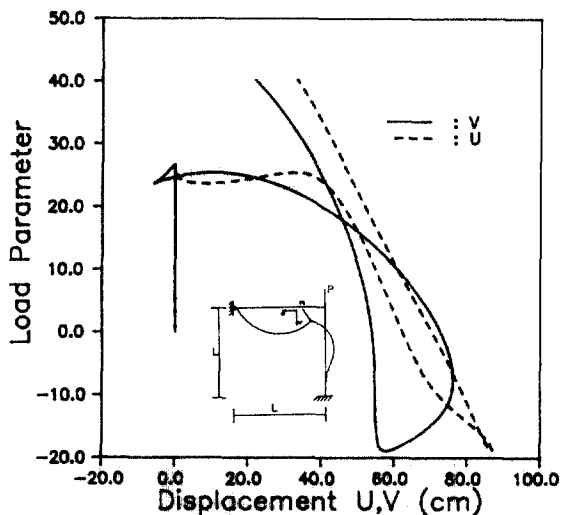


(a) Load-deflection curves of point m

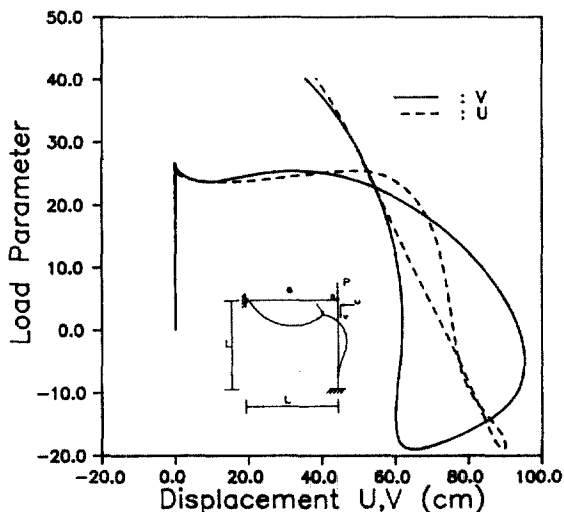


(b) Load-deflection curves of point n

그림 5. 7 Hinged-fixed right angle frame subjected to circulatory force at  $x=0.8 \cdot L$



(a) Load-deflection curves of point m



(b) Load-deflection curves of point n

그림 5. 8 Hinged-fixed right angle frame subjected to circulatory force at  $x=L$

의 비보존력이 작용할때 m점 및 n점의 수평, 수직 변위와 하중관계를 곡선으로 나타낸 것이며 대체로  $x=L$ 에 보존력이 작용하는 경우와 유사한 비선형 거동을 보였다. ( $\lambda_{L1}=26.615$ ,  $\lambda_{L1}=23.724$ ,  $\lambda_{U2}=25.423$ ,  $\lambda_{L2}=-18.947$ ) 비보존력이 m점에 작용하는 경우(그림 5. 7)에는 비보존력의 수평성분이 구조계의 안정성에 상당히 기여한데 반면에 n점에 비보존력이 작용하는 경우(그림 5. 8)에는 보존력이 작용하는 경우(그림 5. 4)와 큰 차이를 보이지 않았

는데, 이는 n점에 작용하는 비보존력의 수평성분이 왼쪽편지에 발생하는 수평반력과 서로 상쇄되었기 때문이라고 판단된다.

그림 5. 9는 비보존력의 방향변화 파라미터  $\alpha$ 값의 변화에 따른 비보존력의 작용점 m의 수직변위와 하중의 관계곡선을 나타낸 것이며, 표 5. 2는  $\alpha$ 값의 변화에 따른 상부극한하중과 하부극한하중의 변화를 나타낸 것이다. 그림 5. 9에서  $\alpha$ 값이 0.0, 0.5 그리고 1.0인 경우에는 단순한 Snap-Through 거

표 5. 2 Limit loads of hinged-fixed right angle frame under non-conservative force according to the variation of direction parameter  $\alpha$

$\alpha$	0.0	0.5	1.0	1.5
Upper Limit Load ( $\lambda_U = P \cdot L^2/EI$ )	18.200	27.843	44.489	59.567
Lower Limit Load ( $\lambda_L = P \cdot L^2/EI$ )	10.763	15.559	16.589	16.097

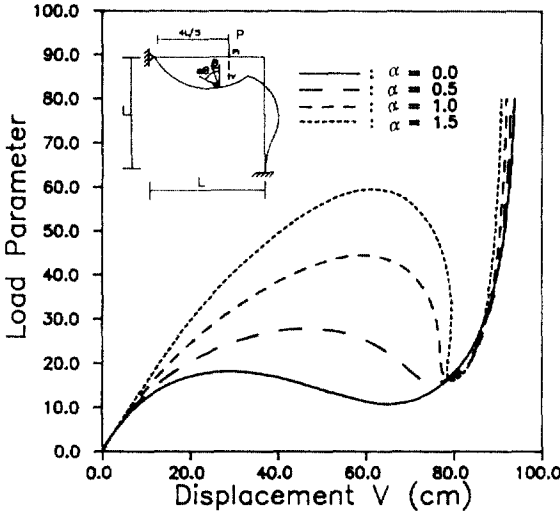


그림 5. 9 Load-deflection curves of point m under non-conservative force according to the variation of direction parameter  $\alpha$

동만을 보였지만  $\alpha$  값이 1.5인 경우에는 하중이 감소하면서 변위도 감소하는 Turning-Back 거동을 나타내었다. 표 5. 2에서  $\alpha$ 의 값이 커짐에 따라 상부극한하중값이 증가하는 것은 그림 5. 7의 경우와 같이 비보존력의 수평분력이 구조물의 안정성을 높여주기 때문이다.

## 6. 結 論

本 論文에서는 여러개의 Snap-Through, Turning-Back 舉動들이 포함된 복잡한 幾何의 非線形 舉動을 追跡하기 위하여 기존의 荷重増分法과 變位増分法을 효율적으로 結合시킨 解析알고리즘을 제시하였다. 즉, 荷重-變位曲線의 기울기를 나타내는 接線剛度 파라미터를 도입하여 각 荷重段階에서 荷重増分 및 變位増分の 크기와 符號가 自動적으로 決定되도록 하였고, Snap-Through 舉

動을 만날 때는 變位増分法을, Turning-Back 舉動을 만날 때는 荷重増分法을 適用시키므로써 완전한 荷重-처짐關係 曲線들을 얻을 수 있도록 하였다. 平面 뼈대 構造物을 解析例로 선택하여 後挫屈 解析을 수행한 결과, 本 研究에서 제안한 荷重増分法과 變位増分法을 結合시킨 解析알고리즘이 保存力이 作用하는 境遇뿐만 아니라 非保存力이 作用하는 경우에도 여러개의 極限點들 (limit points)을 갖는 복잡한 非線形 後挫屈 舉動을 追跡할 수 있음을 확인하였다.

## 參 考 文 獻

1. Bathe, K.J. "Finite element procedures in engineering analysis", Prentice-Hall, 1982, pp. 301-406
2. Haisler, W.E. Stricklin, J.A. and Key, J.E. "Displacement incrementation in non-linear structural analysis by the self-correcting method", *Internat.J.Numer.Meths.Eng.*, Vol. 11, 1977, pp. 3-10
3. Batoz, J.L. and Dhatt, G. "Incremental displacement algorithms for nonlinear problems", *Internat.J.Numer.Meths.Eng.*, Vol. 14, 1979, pp. 1262-1267
4. Powell, G. and Simons, J. "Improved iteration strategy for nonlinear structures", *Internat.J.Numer.Meths. Eng.*, Vol. 17, 1981, pp. 1455-1467
5. Ramm, E. "Strategies for tracing the nonlinear response near limit points, in: W.Wunderlich, E.Stein and K.J.Bathe, eds., *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*", Springer, Berlin, 1981, pp. 63-89
6. Crisfield, M.A. "A fast incremental/iterative solution procedure that handles 'snap-through'", *Comput. & Structures*, Vol. 13, 1981, pp. 55-62
7. Crisfield, M.A. "An arc-length method including line searches and accelerations", *Internat.J. Numer.Meths.Eng.*, Vol. 19, 1983, pp 1269-1289
8. Bathe, K.J. and Dvorkin, E.N. "On the automatic solution of nonlinear finite element equations", *Comput. & Structures*, Vol. 17, 1983, pp. 871-879
9. Meek, J.L. and Tan, H.S. "Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremen-

- tal iterative technique", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 47, 1984, pp. 261-282
- 10 Bruce W., Forde, R. and Stierner, S.F. "Improved arc-length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis", *Comput. & Structures*, Vol. 27, 1987, pp. 625-630
11. Bellini, P.X. and Chulya, A. "An improved automatic incremental algorithm for the efficient solution of nonlinear finite element equations", *Comput. & Structures*, Vol. 26, 1987, pp. 99-110
12. Bergan, P.G. et al., "Solution techniques for nonlinear finite element problems", *Internat. J. Numer. Meths. Eng.*, Vol. 12, 1978, pp. 1677-1696
13. Bergan, P.G. "Solution algorithms for nonlinear structural problems" *Comput. & Structures*, Vol. 12, 1980, pp. 497-509
14. Argyris, J.H. and Symeonidis, Sp. "Non-Linear finite element analysis of elastic systems under non-conservative loading-natural formulation. part I. Quasistatic problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* Vol. 26, No. 1, 1981, pp. 75-124
15. 김문영, 장영필, "보존력 및 비보존력을 받는 평면 뼈대구조물의 기하적 비선형해석", *대한토목학회논문집*, 제 10권, 제 1호, 1990. 3., pp. 17-26
16. Timoshenko, S.P. and Gear, J.M. "*Theory of elastic stability*", 2nd. ed., McGraw-Hill, 1961, pp. 305-310
17. Thompson, J.M.T. and Hunt, G.W. "*A general theory of elastic stability*", John Wiley & Sons., 1973, pp. 211-220.

(接受 : 1990. 2. 20)