

靜的 및 固有振動數 制約條件式을 考慮한 平面 트러스 構造物의 形狀最適化에 關한 研究

Shape Optimization of the Plane Truss Structures with the Statical and Natural Frequency Constraints

李 奎 遠* · 李 根 泰**
Lee, Gyu Won · Lee, Gun Tea

Abstract

In this study, decompositive optimization method of two levels was selected to optimize effectively the geometry of the truss which takes the multi-loading condition, and the allowable stress, bucking stress, displacement and natural frequency constraints into consideration.

The algorithm of this study is made up of sectional optimization using the feasible direction method in level 1, and geometrical optimization employing Powell's one-direction search method which menimizes only objective function in level 2.

The results of this study acquired by beenning applied to structural model of the truss are as follows :

1. It is verified that the algorithm of this study effectively converges, independent of the initial geometry of the truss and the applied various constraints.
2. The optimum goemetry of the truss varies more considerably according to the constraints selected.
3. Under the condition of the same design, the weight of the truss can be decreased more considerably by means of optimizing even the geometry of truss than by means of optimizing the section of truss while fixing geometrical configuration of it, even though there might be a little difference according to the initial geometry of the truss and the design condition.

要 旨

本 研究에서는 多載荷條件, 許容應力, 座屈應力, 變位, 固有振動數 制約을 考慮한 트러스 構造物의 形狀을 效率的으로 最適化하기 위해서 Two-Levels 分割 最適化 技法을 擇하고 Leves 1에서는 許容方向

*正會員 · 全北大學校 工科大學 教授, 土木工學科

**正會員 · 大田 中京工業專門大學 教授, 土木工學科

法에 의한 斷面 最適化, Level 2에서 Powell 1法의 一方向 探查法에 의해 目的函數만이 最小가 되도록 形狀을 最適化하였다.

본 研究의 알고리즘을 트러스의 構造模型에 適用하여 얻어진 研究 結果를 要約하면 다음과 같다.

1. 本 研究의 알고리즘은 트러스의 形態, 載荷條件, 靜的制約條件, 固有振動數 制約條件 등에 구애받지 않고 效率의으로 收斂함을 알 수 있다.

2. 트러스 構造物의 最適形狀은 考慮되는 制約條件式에 따라 大端히 相異함을 알 수 있다.

3. 同一한 設計條件下에서 트러스의 幾何學的形態를 固定시키고 斷面만을 最適化한 경우 보다 本 研究의 알고리즘에 의하여 트러스의 形狀까지도 最適化한 경우에는 트러스의 初期의 幾何形態와 設計條件에 따라 多少 差異가 있겠지만 重量을 相當히 減少시킬 수 있다는 事實을 알 수 있었다.

1. 序 論

1.1 研究目的 및 方法

Maxwell의 基本定理¹⁾ Schmit의 文獻²⁾이 發表되면서 構造物의 最適設計는 많은 工學者에게 觀心의 對象이 되었다.

그러나 構造物의 最適設計는 設計過程이 複雜하고 構造物을 解析하는 데에 많은 時間이 所要되므로 嚴密한 最適設計는 不可能하였으나 電子計算機의 出現으로 可能하게 되었다.

그以後 最適設計에 關한 研究가 急增하여 現在는 構造物의 最適設計에 關한 理論이 定立된 狀態이고 또한 이에 對한 理論이 廣範圍하게 適用되고 있다.

지금까지의 構造物의 最適設計에 關한 研究를 簡略히 綜合해 보면 鋼構造物의 目的函數는 重量函數, 鐵筋콘크리트 構造物의 目的函數는 經費函數, 制約條件式은 許容應力, 變位, 座屈應力, 抵抗모멘트, 許容鐵筋比 등 多樣한 形態의 制約條件式이 考慮되고 있다.

이와 같이 多樣한 形態의 最適化問題에 適用되는 最適化의 技法은 數學的 計劃法(Mathematical Programming Technique)과 最適性基準法(Optimality Criteria Method)로 分類된다.

構造物의 最適設計時 多樣한 알고리즘(Algorithm)中 어떠한 알고리즘을 選擇할 것인가 하는 問題는 主로 設計變數, 制約條件式의 形態에 關連되고 있다.

앞에서 言及한 文獻의 大部分은 幾何學的形狀에 固定된 構造物의 最適化만 다루어 왔다.

幾何學的形狀이 固定된 構造物의 最適化만 다루게 된 重要한 理由는 幾何學的形狀을 考慮한 形狀

最適化는 根本的으로 收斂方法이 다른 斷面과 形狀을 同時에 最適化해야 하므로 形狀이 固定된 경우보다도 最適化 過程이 複雜해지고 設計變數 및 制約條件式이 增加하여 電子計算器의 容量도 커야 하고 相當한 計算 時間이 所要되는 등의 어려움을 겪게 되기 때문으로 生覺된다.

그러나 幾何學的形狀을 考慮한 最適化가 幾何學的形狀이 固定된 경우보다도 重量을 相當히 減少시킬 수 있다는 事實을 지금까지의 研究 結果로부터 알 수 있다.

따라서 幾何學的形狀을 考慮한 構造物의 最適設計 理論 및 效率의인 技法에 關한 研究가 時急히 要請되고 있다.

本 研究에서는 지금까지의 研究와 달리 許容應力, 變位, 座屈應力制約은 만 아니라 共振(Resonance) 現象으로 인한 破壞를 防止하기 위해서 固有振動數(Natural Frequency)의 制約을 考慮한 트러스 構造物의 形狀最適化를 試圖코져 한다.

應力, 變位, 固有振動數를 制約條件式으로 考慮하는 形狀最適化問題는 應力, 變位制約만을 考慮하는 形狀最適化問題보다도 制約條件式이 增加할 뿐만 아니라 高次非線形問題로 形成되어 最適化 過程이 大端히 複雜해진다.

本 研究에서는 이러한 複雜한 最適化問題를 보다 效率의으로 最適化하고자 最適化 過程을 Two-Levels로 分割하는 分割最適化 技法을 擇한다.

Two-Levels 分割最適化 技法은 最適化 全過程이 Level 1과 Level 2로 構成되어 있고 Level 1에서는 트러스의 形狀을 固定시킨 狀態에서 部材의 斷面을 最適化하고 Level 2에서는 트러스 構造物의 節點 座標를 設計變數로 하여 形狀을 最適化하

는 것이다.

Level 1에서는 非線形計劃問題에 設計變數 變換(Reciprocal of Design Variable)을 適用한 後 許容方向法(Feasible Direction Method)⁽³⁾로 斷面을 最適化하고 Level 2에서는 Powell 法⁽⁴⁾의 一方向探查에 의해 目的函數만이 最小가 되도록 트러스의 形狀最適化를 試圖한다.

이와 같이 Two-Levels 分割最適化는 各各의 Level에서 獨立된 最適化를 試圖함으로써 設計變數의 數, 制約條件式의 數 및 制約條件式의 非線形의 次數를 減少시켜 最適化의 效率을 높이는 한편 收斂方法이 다른 設計變數를 分離, 獨立의으로 形狀最適化를 遂行함으로써 效率的인 形狀最適化를 可能케 하는 한편 트러스의 形態 載荷條件 制約條件 等に 制限을 받지 않는 效率的인 形狀最適化를 試圖하는 데에 目的을 두고 있다.

1.2 本 研究와 關聯된 研究 沿革

50年代 末 까지의 構造最適化에 關한 初期의 發展 過程의 內容과 文獻은 Wasiutynski의 文獻⁽⁵⁾에 綜合 定理하여 詳細하게 紹介되었으며, 60年代의 最適設計 發展 過程 및 理論에 關한 文獻은 Schew, Prager⁽⁶⁾, Schmit의 文獻⁽²⁾을 들 수 있다.

그리고 70年代 初까지의 最適設計 理論의 發表 狀況은 Gallagher의 文獻⁽⁷⁾과 Majid의 文獻⁽⁸⁾ 등에서 詳細히 紹介하고 있다.

이 文獻들을 中心으로 調査한 結果 거의 大部分 構造物의 幾何學의 形狀을 考慮하지 않았다.

本 研究와 關連된 研究에 對해서만 要約하면 다음과 같다.

1962년 Lucien A Schmit와 Thomas P Kicher⁽⁹⁾는 簡單한 3部材 트러스 構造物의 最適形狀 및 最適材料를 勾配法(Gradient Method)으로 誘導한 이래 Dorn Gomory와 Greenberg⁽¹⁰⁾ 및 Dobbs와 Fleton의 研究⁽¹¹⁾는 構造物의 形狀最適化의 研究에 相當한 觀心을 갖게 하였다.

1972년 Vanderplates와 Moses⁽¹⁵⁾도 Perderson⁽¹²⁻¹⁴⁾과 마찬가지로 2段階로 形狀最適設計를 取扱하였다.

처음에는 應力比法(Stress-Ratio Method)과 Zoutendijk의 許容方向法⁽³⁾을 修正한 알고리즘으로 多制約條件下의 트러스 構造物의 斷面을 最適化한 後 節點 座標에 關한 最適化問題를 勾配方向으로

目的函數를 修正하는 소위 最急降下法(Steepest Descent Method)의 技法에 依한 形狀最適化問題를 다루었다.

1975년 Spillers⁽¹⁶⁾는 Friedland⁽¹⁷⁾의 研究와 똑같은 最適化 모델을 提示하여 Kuhn Tucker 條件을 利用한 트러스 構造物의 形狀最適化 理論을 誘導 發表하였으나 이 研究 結果로는 트러스 構造物의 重要한 部分을 차지하는 多載荷條件, 座屈應力 및 變位條件을 考慮한 形狀最適化를 試圖할 수가 없었다.

그래서 1980년에는 座屈應力에 關한 設計規定을 滿足하는 最適解를 誘導하였다⁽¹⁷⁾.

文獻 (18), (19)는 80年代 初 中間까지의 最適設計 理論의 發表 內容을 詳細하게 紹介하고 있다.

1980년 Saka⁽²⁰⁾는 逐次線形計劃法(SLP)의 適用으로 部材力이 零인 部材를 除外함으로써 最適形狀을 誘導하였다.

1981년 Knji Imai 및 Schmit, L. A⁽²¹⁾는 近似法과 數學的計劃法을 調和한 乘數法(Multiplier Method or Primal and Dual Method)에 依해서 斷面과 形狀을 同時에 最適化하였다.

1983년 Topping B.H.V⁽²²⁾는 80年 初까지의 形狀最適化 現況에 對한 紹介를 하였다.

1983년 U. Kirsch와 G.Toledano⁽²³⁾는 形狀의 變化가 斷面의 變化보다도 構造應答에 큰 影響을 주므로 形狀이 變함에 따라 미치는 影響을 近似化하여 形狀을 最適化할 수 있는 技法을 提是하고 있다.

國內에서는 70年 初에 最適設計에 關한 研究^(24, 25, 26, 27)를 發表하기 始作하였다.

1980년에는 Level 1에서는 SUMT法에 依한 Modified Newton-Raphson 法⁽²⁸⁾의 適用으로 트러스 部材 斷面의 最適化를 Level 2에서는 Rosenbrock 法⁽²⁹⁾의 適用으로 平面 트러스 構造物의 形狀最適化를 可能케 하는 分割 形狀最適化 알고리즘을 誘導하고 있다^(30, 31).

그 以後 多樣한 構造物에 多樣한 理論을 利用하여 最適問題를 形成한 後 여러가지의 알고리즘으로 形狀을 最適化하였다⁽³²⁻³⁸⁾.

2 形狀最適化 問題型式

트러스 構造物의 最適形狀을 얻기 위한 一般的인

最適化問題型式은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize : } & W = W(\{X\}, \{Y\}) \\ \text{subject to : } & H_i(\{X\}, \{Y\}) = \{0\} \quad i=1, \dots, k \\ & G_j(\{X\}, \{Y\}) \geq \{0\} \quad j=1, \dots, l \end{aligned} \quad (2-1)$$

$$\begin{aligned} \{X^L\} &\leq \{X\} \leq \{X^U\} \\ \{Y^L\} &\leq \{Y\} \leq \{Y^U\} \end{aligned}$$

여기서, $H_i(\{X\}, \{Y\}) =$ 解析制約條件式

$$G_j(\{X\}, \{Y\}) = \text{制約條件式}$$

本 研究에서는 트러스 構造物의 形狀最適設計를 위해 다음의 分割 最適化 技法을 使用한다.

1) Level 1

形狀이 固定된 트러스의 構造物의 最適化이므로 設計變數는 斷面積이 된다.

이 경우 最適化問題形式은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize : } & W = W(\{X\}, \{Y_0\}) \\ \text{subject to : } & H_i(\{X\}, \{Y_0\}) = \{0\} \\ & G_j(\{X\}, \{Y_0\}) \geq \{0\} \\ & \{X_L\} \leq \{X\} \leq \{X^U\} \end{aligned} \quad (2-2)$$

여기서, $\{X\}$: Level 1에서의 設計變數

$\{Y_0\}$: Level 2에서의 設計變數

2) Level 2

形狀最適化 過程이므로 設計變數는 節點 座標가 된다. 이 경우의 最適化問題型式은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize : } & W = W(\{X_0\}, \{Y\}) \\ \text{subject to : } & \{Y^L\} \leq \{Y\} \leq \{Y^U\} \end{aligned} \quad (2-3)$$

여기서, $\{Y\}$: Level 2에서의 設計變數
 $\{X_0\}$: Level 1에서의 設計變數

3. 最適化 모델

3.1 許容方向法에 依한 斷面 最適化問題型式

部材數 m , 自由度 n , 壓縮力을 받는 部材數가 f 인 트러스 構造物의 解析制約條件式, 壓縮制約條件式, 座屈應力, 制約條件式, 變位制約條件式, 固有值 (Eigen Value) 制約條件式, 設計變數의 上下限值 制約條件式 및 目的函數를 多載荷條件 (Multiple Loading Condition)과 함께 非線形計劃問題로 綜合하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize : } & M(A) = \{A\}^T [L] \\ \text{subject to : } & \{\sigma_m\} - [S_1] ([B] [\tilde{K}] [\beta] [K]^{-1} \\ & \quad \cdot \{Q^N\}) \geq \{0\} \\ & \{\sigma_m\} - [S_2] [B] [\tilde{K}] [\beta] [K]^{-1} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \{Q^N\} &\geq \{0\} \\ \{\sigma_m\} - [K]^{-1} \{Q^N\} &\geq \{0\} \\ \{\lambda\} - \{\lambda_0\} &\geq \{0\} \\ \{X_U\} - \{X\} &\geq \{0\} \\ \{X\} - \{X_L\} &\geq \{0\} \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

여기서,

$[S_1]_{(mm)}$: 引張力 抽出 行列 (i 部材가 引張이면 $S_i = 1$ 이고 $S_i = 0$)

$[S_2]_{(mm)}$: 壓縮力 抽出 行列 (i 部材가 壓縮이면 $S_i = 1$ 이고 $S_i = 0$)

$M(A)$: 目的函數

$\{A\}$ = 部材의 斷面積 行列 = $(A_1, \dots, A_m, \dots, A_m)^T$

$\{L\}$ = 部材의 길이의 行列 = $(L_1, \dots, L_m, \dots, L_m)^T$

$\{\sigma_m\}_{(m) \times (m-n)}$ = 許容 引張應力 行列

$\{\sigma_m\}_{(m)}$ = 許容 壓縮應力 行列

$[\beta]_{(mm)}$ = 位相連結 行列 (Topological Incidence Matrix)

$\{q_m\}$ = 許容 節點 變位の $(n \times 1)$ 行列 = $(q_1, \dots, q_n)^T$

$\{Q\}$ = 節點 荷重의 $(n \times 1)$ 行列 = $(Q_1, \dots, Q_n)^T$

$$[\tilde{K}] = \text{部材 剛性 對角行列} = \begin{bmatrix} k_1 & & & 0 \\ & k_2 & & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & & & k_m \end{bmatrix}$$

단 $k_i = (E \cdot A_i / L_i)$

$[K]$ = 剛性 行列 (Stiffness Matrix) = $[\beta]^T [\tilde{K}] [\beta]$

$[B]$ = $(m \times m)$ 의 各 部材 斷面의 逆의 行列 =

$$\begin{bmatrix} 1/A_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1/A_f & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1/A_m \end{bmatrix}$$

$\{\sigma_m\} = [C] \{\theta\}$

$[C]$ = $(f \times f)$ 의 壓縮 部材 斷面의 逆의 行列 =

$$\begin{bmatrix} 1/A_1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1/A_f & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1/A_r \end{bmatrix}$$

$\{\theta\} = (\theta_1, \dots, \theta_f, \dots, \theta_r)^T$

$\theta_i = (\alpha_i \cdot I^2 \cdot E \cdot A_i) / L_i$

α_i = 部材의 形狀에 關係되는 常數

$[\phi] [K] [\phi] = [\omega_n^2]$

$$[\omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \omega_f^2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \omega_r^2 \end{bmatrix}$$

$\{\lambda\} = (2\pi)^2 \{\omega^2\}$
 $\{\lambda\} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots, \lambda_n) =$ 固有値의 行列(Matrix of eigen value)
 $\{\omega^2\} = (\omega_1^2, \dots, \omega_n^2, \dots, \omega_n^2) =$ 固有振動數 行列(Natural frequency matrix)
 $\{\lambda_0\} =$ 固有値의 下限值 行列
 $[\phi] =$ 振動型 行列(Modal Matrix)
 $\{X_U\} =$ 設計變數 上限值 行列
 $\{X_L\} =$ 設計變數 下限值 行列
 $NL =$ 載荷條件 數

4. 트러스 構造物의 形狀最適化 技法

4.1 許容方向法에 依한 斷面 最適化

式(3-1)에 주어진 最適化問題를 許容方向法에 依해 幾何學의 形狀이 固定된 트러스 構造物을 最適化할 경우 q番재 反復試行에서 設計變數의 값은 다음과 같이 주어진다.

$$\{X\}^q = \{X\}^{q-1} + \alpha * \{S\}_q \quad (4.1)$$

여기서,

$\{X\}^q$: 反復回數 q番재 反復試行에서의 設計變數의 값

$\{X\}^{q-1}$: 反復回數 q-1番재 反復試行에서의 設計變數의 값

$\{S\}_q$: 反復回數 q番재 反復試行에서의 探查方向

α : 設計變數의 값의 最大 移動 距離

探查方向 $\{S\}$ 는 다음의 最適化問題를 文獻에 주어진 特殊한 線形計劃問題로 變換한 後 解 알고리즘의 適用으로 얻는다.

$$\text{Minimize : } \{\nabla W\} \{S\}$$

$$\text{Subject to : } \{\nabla G_k\} \{S\} \leq 0, K=1, \dots, J \quad (4.2)$$

$$\{S\} \{S\} \leq 1$$

여기서,

J: 臨界制約條件式(Critical Constraint)의 數

$$\{\nabla W\} = (\partial W / \partial X_1, \dots, \partial W / \partial X_n)$$

$$\partial W / \partial X_i = \rho_i, i=1, \dots, N$$

$$\{\nabla G_k\} = (\partial G_k / \partial X_1, \dots, \partial G_k / \partial X_n)$$

全 制約條件式이 臨界制約條件이라 하고 이를 行列 形態로 表示하면 다음과 같다.

$$\left[\begin{array}{l} \partial(G_1) / \partial X_i \\ \vdots \\ \partial(G_2) / \partial X_i \\ \vdots \\ \partial(G_3) / \partial X_i \\ \vdots \\ \partial(G_k) / \partial X_i \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} -[S_1] \partial[B] / \partial X_i [\tilde{K}] [\beta] [K]^{-1} \{Q^N\} \\ -[S_1] [B] \partial[\tilde{K}] / \partial X_i [\beta] [K]^{-1} \{Q^N\} + [S_1] [B] [\tilde{K}] [\beta] [K]^{-1} \{Q^N\} \\ [\beta] \partial[\tilde{K}] / \partial X_i [\beta] [K]^{-1} \{Q^N\} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \partial(G_2) / \partial X_i \\ \vdots \\ \partial(G_3) / \partial X_i \\ \vdots \\ \partial(G_k) / \partial X_i \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} -[S_2] \partial[B] / \partial X_i [\tilde{K}] [\beta] [K]^{-1} \{Q^N\} \\ -[S_2] [B] \partial[\tilde{K}] / \partial X_i [\beta] [K]^{-1} \{Q^N\} + [S_2] [B] [\tilde{K}] [\beta] [K]^{-1} \{Q^N\} \\ [\beta] \partial[\tilde{K}] / \partial X_i [\beta] [K]^{-1} \{Q^N\} \\ [K]^{-1} [\beta] \partial[K] / \partial X_i [K] [\beta] [K]^{-1} \{Q^N\} \\ \partial[\phi] / \partial X_i [K] [\phi] + [\phi] \partial[K] / \partial X_i [\phi] [\phi] [K] \end{array} \right]$$

여기서, $\partial[B] / \partial X_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0, \dots, -1/A^2, \dots, 0 \\ 0, \dots & \dots & \dots, 0 \end{bmatrix} \text{ mxm}$

$\partial[\tilde{K}] / \partial X_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0, \dots, (E/L)_n, \dots, 0 \\ 0, \dots & \dots & \dots, 0 \end{bmatrix} \text{ mxm}$

$\partial[C] / \partial X_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0, \dots, -1/A^2, \dots, 0 \\ 0, \dots & \dots & \dots, 0 \end{bmatrix} \text{ fx1}$

$\partial[\phi] / \partial X_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi(E_n \alpha / L)_i \\ 0 \end{bmatrix} \text{ fx1}$

4.2 Powell法에 依한 形狀最適化

節點 座標을 設計變數로 하는 最適化問題의 最適解를 First Order Method의 利用으로 求하기 힘들다는 事實을 지금까지의 研究 結果로부터 알수 있어 本 研究에서는 勾配를 利用하지도 않고 解를 쉽사리 求할 수 있는 Powell法의 一方向 探查法에 依하여 目的函數값만이 最小가 되도록 트러스의 最適形狀을 求한다.

本 技法으로 解를 求하는 알고리즘은 文獻(29)에 收錄되어 있다.

4.3 最適化 알고리즘

本 研究에서 適用하는 Two-Levels技法에 依한 트러스 構造物의 形狀을 最適化하는 綜合的인 알고리즘은 다음과 같이 要約할 수 있다.

段階 1: 斷面의 初期值 $\{X_0\}$ 附與

段階 2: 許容方向法의 設計點 $\{X\}_q$ 의 收斂值는 다음과 같이 주어진다. $\{X\}_q = \{X\}_{q-1} + \alpha * \{S\}_q$

段階 3: 앞 過程의 收斂限界值를 代入한 目的函數만 가지고 Powell法의 一方向 探查法에 依해 目的函數값이 最小가 되도록 座標을 修正해 나간다 目的函數값이 收斂하거나 許容 反復回數에 到達하면 停止하거나 그렇지 않으면 段階 2로 되돌아 간다.

以上の 過程에 關한 Flow Chart는 그림 4.1과 같다.

5. 數值例 및 結果 分析

5.1 文獻(30), (34)에 適用한 7部材 7部材 트러스(第1型)

文獻(30), (34) 및 本 研究에 適用한 그림 5.2(a)의 7 部材 트러스의 設計條件은 表 5-1, 適用 알고리즘은 表 5-2와 같고 適用 構造에 對한 文獻(30), (34)의 研究와 本 研究와의 比較表는 表 5-3에, 本 研究方法에 衣한 最適解는 表 5-4에 收錄되어 있고 表 5-3의 結果를 表示하면 그림 5-1과 한편 文獻(30), (34)의 研究 알고리즘에 依한 最適形狀을 圖示하면 그림 5-2와 같다.

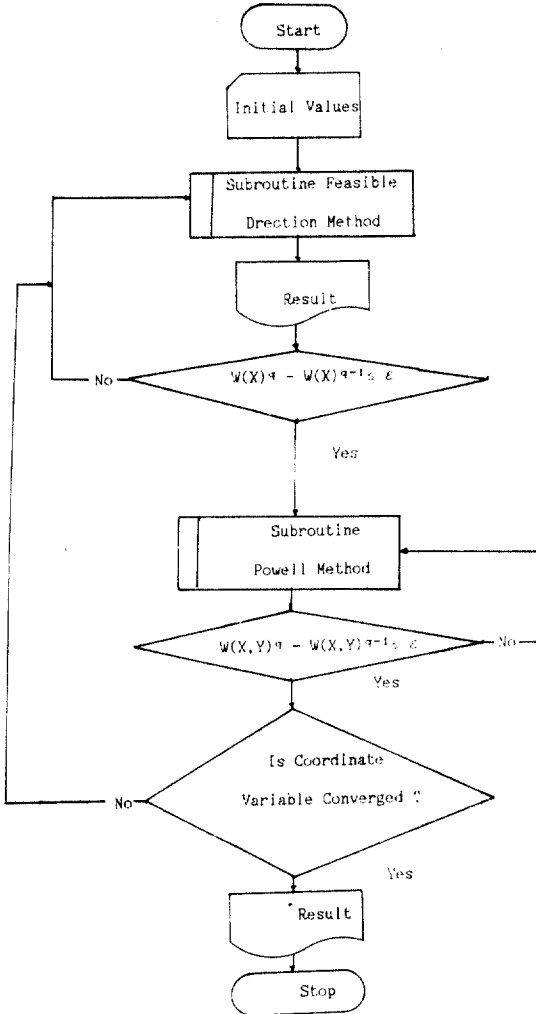


그림 4.1 分割 技法를 利用한 形狀最適化 Flow Chart

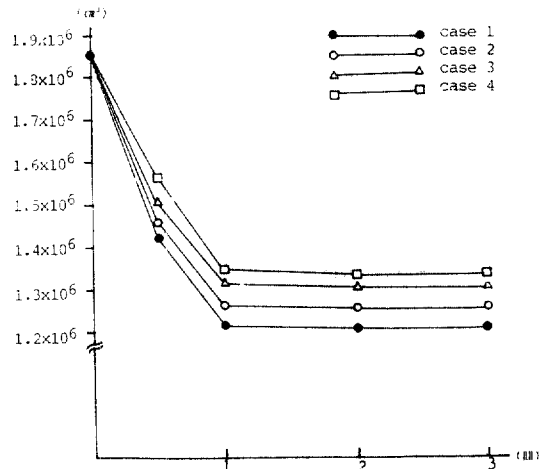


그림 5.1 7部材 트러스의 Level 反復試行에 따른 目的 函數 값

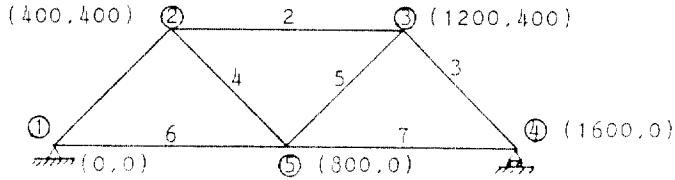
表 5-1 文獻(30), (34)의 構造模型에 對한 設計條件

文獻(30), (34)의 設計條件			本 研究의 設計條件			
制約條件의 種類	節點		Case1	Case2	Case3	Case4
載荷條件	第一 載荷條件	2	-5×10^5	-5×10^5	-5×10^5	-5×10^5
	第二 載荷條件	4	-5×10^5	-5×10^5	-5×10^5	-5×10^5
		3	-7×10^5	-7×10^5	-7×10^5	-7×10^5
制約條件	許容應力(壓縮)		-1900	-1900	-1900	-1900
	(引張)		1900	1900	1900	1900
	座 屈 應 力			示方書	示方書	示方書
	變 位(Y方向)	4			2.2	2.2
固有值의 下限值						44
彈性係數(kg/cm ²)			2100000			

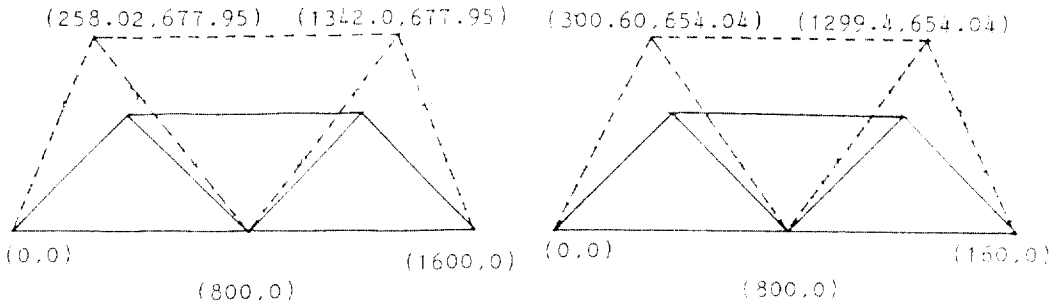
本 研究에서는 道路橋 示方書의 構造 鋼材 許容應力中 SWS 50을 採하였음

表 5-2 文獻(30) 및 文獻(34)의 構造型에 對한 適用 알고리즘

構造模型	文獻(30)		文獻(34)의 研究		本 研究	
	Level1	Level2	Level1	Level2	Level1	Level2
7部材 트러스	SUMT法	Rosenbrock法	幾何計劃法	Powell法	許容方向法	Powell法

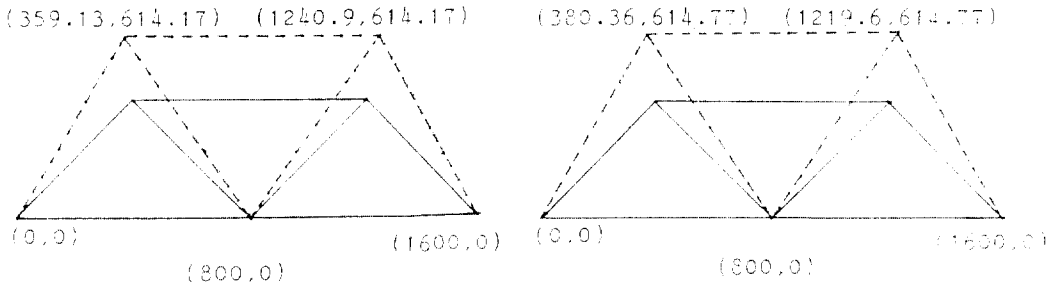


(a) 文獻(30), (34) 및 本 研究의 構造模型



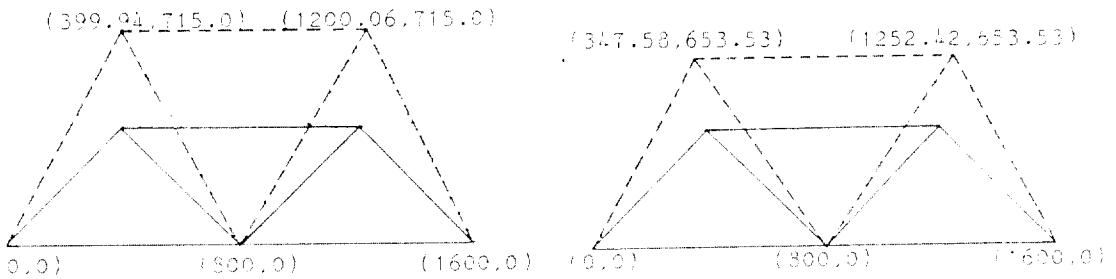
(b) Case 1

(c) Case 2



(d) Case 3

(e) Case 4



(f) 文獻(30)의 結果

(g) 文獻(34)의 結果

그림 5.2 文獻(30), (34) 및 本 研究의 最適形狀

表 5-3 文獻(30) 및 文獻(34)의 研究 結果와 本 研究 結果

	反復回數	本 研究의 結果	(30)의 結果	(34)의 結果
Case 1	初 期 值	1865096.6		
	形 狀이 固 定	1431600.0		
	1	1213798.4		
	2	1213772.2		
Case 2	3	1213772.2		
	形 狀이 固 定	1458513.5	1942856.50	1433221.25
	1	1266811.9	1728467.25	1252665.00
	2	1265902.9	1728467.25	1252665.00
Case 3	3	1265902.9		
	형상이 고정	1563760.9		
	1	1323184.1		
	2	1318508.5		
Case 4	3	1318413.6		
	形 狀이 固 定	1574651.6		
	1	1330698.9		
	2	1324189.1		
Case 4	3	1320000.7		

Case. 2, Case. 3, Case. 4의 初期値는 Case 1과 同一

表 5-4 研究의 알고리즘에 對한 文獻(30), (34)의 構造模型의 計算結果值

部材	初期值	形 狀이 固 定	節點	初期值座標		最適形狀座標		最適形狀의 面積
				X	Y	X	Y	
1.6	400	372.163	2	400	400	258.02	677.95	281.574
2.7	400	263.158	4	1200	400	1342.0	677.95	100.158
3.5	400	260.513						235.893
4	400	368.421						217.375

(a)Case 1의 경우

部材	初期值	形 狀이 固 定	節點	初期值座標		最適形狀座標		最適形狀의 面積
				X	Y	X	Y	
1.6	400	377.560	2	400	400	300.60	654.04	304.321
2.7	400	263.159	4	1200	400	1299.4	654.04	120.948
3.5	400	260.153						235.893
4	400	394.455						217.375

(b)Case 2의 경우

部材	初期值	形 狀이 固 定	節點	初期值座標		最適形狀座標		最適形狀의 面積
				X	Y	X	Y	
1.6	400	378.933	2	400	400	359.13	614.17	325.536
2.7	400	263.158	4	1200	400	1240.9	614.17	153.626
3.5	400	315.486						226.915
4	400	446.324						274.253

(c)Case 3의 경우

部材	初期値	形状이 固定	節點	初期値座標		最適形状座標		最適形状의 面積
				X	Y	X	Y	
1.6	400	391.370	2	400	400	380.36	614.77	331.120
2.7	400	263.160	4	1200	400	1219.6	614.77	162.905
3.5	400	318.660						251.800
4	400	420.950						270.648
$(\lambda)_{opt} = 44.88$				初期固有値 = 51.33, $\lambda_0 = 44$				$(\lambda)_{opt} = 44.10$

(d) Case 4의 경우

5. 2 文獻(32) 및 文獻(39)에 適用한 7部材 트러스 (第2型)

文獻(32) 및 文獻(39) 및 本 研究에 適用한 그림 5.4(a)의 7部材 트러스의 設計條件은 表 5-5, 適用 알고리즘은 表 5-6과 같고 適用 構造에 對한 文獻(32) 및 文獻(39)의 研究와 本 研究와의 比較表는 表 5-7에, 本 研究方法에 依한 最適解는 表 5-8에 收錄되어 있고 表 5-7의 結果를 表示하면 그림 5-3과 같다.

한편 文獻(32) 및 文獻(39)의 研究 알고리즘에 依한 最適形状을 圖示하면 그림 5-4와 같다.

表 5-6 文獻(32) 및 文獻(39)의 構造模型에 對한 適用 알고리즘

構造模型	문헌(32)	文獻(39)의 研究	本 研究	
			Level 1	Level 2
7部材 트러스	幾何計劃法	SLP	許容方向法	Powell法

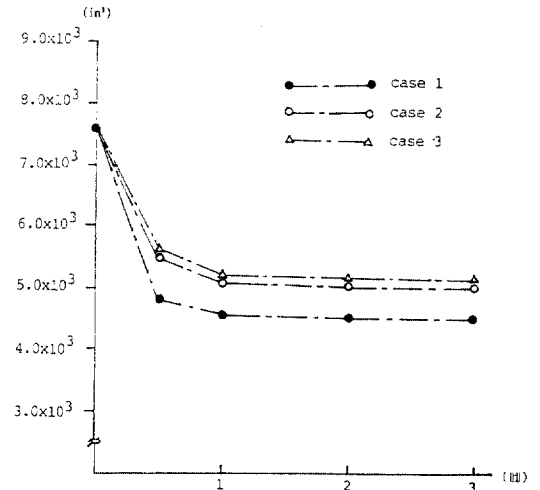


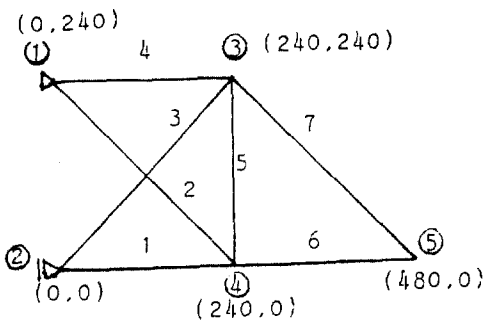
그림 5.3 7 部材 트러스의 Level 反復試行에 따른 目的 函數 값

表 5-7 文獻(32) 및 文獻(39)의 研究 結果와 本 研究의 結果

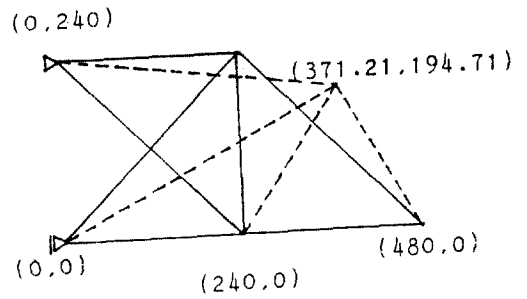
	反復回數	本 研究의 結果	文獻(32) 및	文獻(39)의 研究結果
Case 1	初期 值	7608.29		
	形状이 固定	4880.03		
	1	4747.20		
	2	4623.06		
	3	4623.06		
Case 2	初期 值	7608.29		
	形状이 固定	5526.69	4879.27	4879.27
	1	5165.15		
	2	5080.31		
	3	5074.99		
Case 3	初期 值	7608.29		
	形状이 固定	5550.16		
	1	5186.79		
	2	5116.61		
	3	5116.61		

表 5-5 文獻(32) 및 文獻(39)의 構造模型에 對한 設計條件

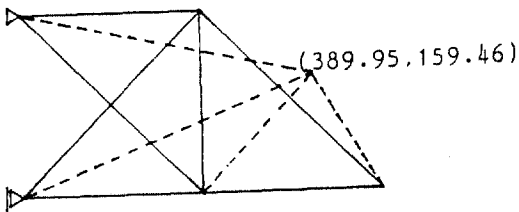
文獻(32) 및 文獻(39)의 設計條件				本 研究의 設計條件		
制約條件의 種類		節點		Case 1	Case 2	Case 3
載荷條件	第一 載荷條件	4	40	40	40	40
	第二 載荷條件	5	40	40	40	40
制約條件	許容應力(壓縮)		-15	-15	-15	-15
	(引張)		20	20	20	20
	變位(Y方向)	5	30		30	30
	固有值의 下限值					0.13
	彈性係數(ksi)			1000		



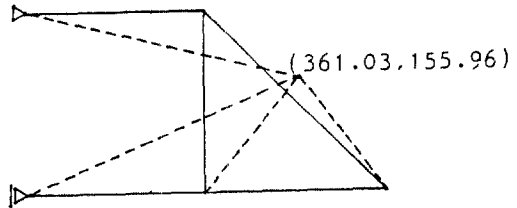
(a) 文獻(32), (39) 및 本 研究의 構造模型



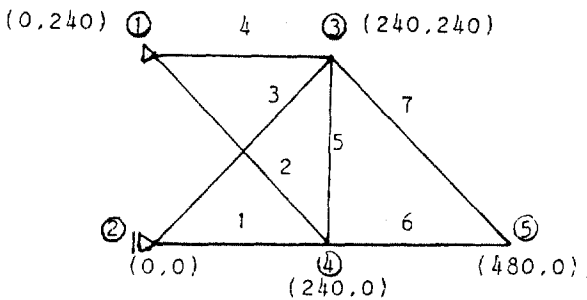
(b) Case 1



(c) Case 2



(d) Case 3



(e) 文獻(32)의 結果 및 文獻(39)의 結果

그림 5.4 文獻(32) 및 文獻(39) 및 本 研究의 最適形狀

表 5-8 本研究의 알고리즘에 대한 文獻(32), (39)의 構造模型의 計劃結果值

部材	初期值	形狀이 固定	節點	初期值座標		最適形狀座標		最適形狀의 面積
				X	Y	X	Y	
1	3.846	3.45801	3	240	240	371.21	194.71	5.25911
2	3.846	1.48075						2.77890
3	3.846	2.65436						0.09243
4	3.846	3.40768						2.28635
5	3.846	0.95317						2.77696
6	3.846	2.66667						1.40554
7	3.846	2.82843						2.26081

(a)Case 1의 경우

部材	初期值	形狀이 固定	節點	初期值座標		最適形狀座標		最適形狀의 面積
				X	Y	X	Y	
1	3.846	3.57899	3	240	240	389.95	159.46	5.24037
2	3.846	2.36336						3.69311
3	3.846	2.48101						0.14764
4	3.846	4.07324						2.79125
5	3.846	0.91233						2.64076
6	3.846	2.66667						1.50587
7	3.846	3.49711						2.46127

(b)Case 2의 경우

部材	初期值	形狀이 固定	節點	初期值座標		最適形狀座標		最適形狀의 面積
				X	Y	X	Y	
1	3.846	3.51071	3	240	240	389.95	159.46	5.22604
2	3.846	2.04228						3.66330
3	3.846	3.01800						0.17643
4	3.846	4.19600						2.87037
5	3.846	1.27226						2.62509
6	3.846	2.66667						1.93654
7	3.846	3.05708						2.47008

$(\lambda)_{cr}=0.16$

初期固有值=0.14, $\lambda_0=0.13$

$(\lambda)_{cr}=0.16$

(c)Case 3의 경우

5.3 文獻(15) 및 文獻(31)에 適用한 11部材 트러스

文獻(15) 및 文獻(31) 및 本 研究에 適用한 그림 5.6(a)의 11部材 트러스의 設計條件은 表 5-9, 適用 알고리즘은 表 5-10과 같고 適用 構造에 大한 文獻(15) 및 文獻(31)의 研究와 本 研究와의 比較 表는 表 5-11에, 本 聯句方法에 依한 最適解는 表 5-12에 收錄되어 있고 表 5-11의 結果를 表示하면 그림 5-5와 같다.

한편 文獻(15) 및 文獻(31)의 研究 알고리즘에 依한 最適形狀을 圖示하면 그림 5-6과 같다.

5.4 結果 分析

Two-Levels 技法에 依한 本 研究의 알고리즘을 實際 構造物에 適用하여 얻어진 結果를 바탕으로 本 알고리즘을 分析하면 다음과 같다.

(1) 本 研究에서는 多載荷條件 및 여러가지의 制約條件을 考慮한 트러스構造物의 形狀最適化를 試圖하였다.

그 結果 그림 5-2, 그림 5-4, 그림 5-6에서 보는 바와 같이 最適形狀은 考慮한 制約條件式에 따라 大端히 相異하나 적용 알고리즘에 따라서는 若干의

表 5-9 文獻(15) 및 文獻(31)의 構造模型에 對한 設計條件

文獻(15) 및 文獻(31)의 設計條件				本 研究의 設計條件		
制約條件의 種類		節點		Case 1	Case 2	Case 3
載荷條件	第一 載荷條件	4	-2×10^4	-2×10^4	-2×10^4	-2×10^4
制約條件	許容應力(壓縮)		-2×10^4	-2×10^4	-2×10^4	-2×10^4
	(引張)		-2×10^4	-2×10^4	-2×10^4	-2×10^4
	變 位(Y方向)	4			1.2	1.2
固有值의 下限值						100
彈性係數(PSI)			1000000	單位重量(1b/m ³)		0.1

表 5-10 文獻(15) 및 文獻(31)의 構造模型에 對한 適用 알고리즘

構造模型	文獻(15) 및	文獻(31)의 研究		本 研究	
11部材트리스	許容方向法	Level 1	Level 2	Level 1	Level 2
		SUMT 法	Rosen Brock 法	許容方向法	Powell 法

表 5-11 文獻(15) 및 文獻(31)의 研究 結果와 本 研究의 結果

	反復回數	本 研究의 結果	文獻(15) 및	文獻(31)의 研究結果
Case 1	初 期 值	237.274	79.712	237.274
	形狀이 固定	80.006		80.048
	1	69.469		65.377
	2	62.469		65.377
	3	62.355		
		62.259		
Case 2	初 期 值	237.274		
	形狀이 固定	107.154		
	1	69.865		
	2	66.845		
	3	65.429		
Case 3	初 期 值	237.274		
	形狀이 固定	107.485		
	1	69.735		
	2	66.589		
	3	66.589		

表 5-12 本 研究의 알고리즘에 對한 文獻(15), (31)의 構造模型의 計劃結果值

部材	初期值	形狀이 固定	節點	初期值座屈		最適形狀座屈		最適形狀의 面積
				X	Y	X	Y	
1.5	1.0	0.50004	2	0	120	149.01	146.55	0.71615
2.4	1.0	0.47142	3	120	240	213.27	171.37	0.70875
3	1.0	0.50000	5	360	240	266.74	171.37	0.70024
6.9	1.0	0.37268	6	480	120	330.10	146.55	0.28341
7.8	1.0	0.37268						0.26227
10.11	1.0	0.0001						0.0001

(a) Case 1

部材	初期値	形状이 固定	節點	初期値座屈		最適形状座屈		最適形状의 面積
				X	Y	X	Y	
1.5	1.0	0.67920	2	0	120	149.43	143.33	0.72499
2.4	1.0	0.62815	3	120	240	219.00	176.79	0.70416
3	1.0	0.66402	5	360	240	260.00	176.79	0.62957
6.9	1.0	0.49488	6	480	120	344.57	143.33	0.31136
7.8	1.0	0.49489						0.27186
10.11	1.0	0.0001						0.0001

(b)Case 2

部材	初期値	形状이 固定	節點	初期値座屈		最適形状座屈		最適形状의 面積
				X	Y	X	Y	
1.5	1.0	0.65700	2	0	120	138.21	133.13	0.73034
2.4	1.0	0.73348	3	120	240	205.96	162.82	0.78679
3	1.0	0.60472	5	360	240	274.04	162.82	0.75000
6.9	1.0	0.47118	6	480	120	341.79	133.13	0.273895
7.8	1.0	0.49100						0.305007
10.11	1.0	0.0001						0.0001
$(\lambda)_{cr}=108.22$			初期固有値=329.25, $\lambda_0=100$					$(\lambda)_{cr}=608.88$

(c)Case 3

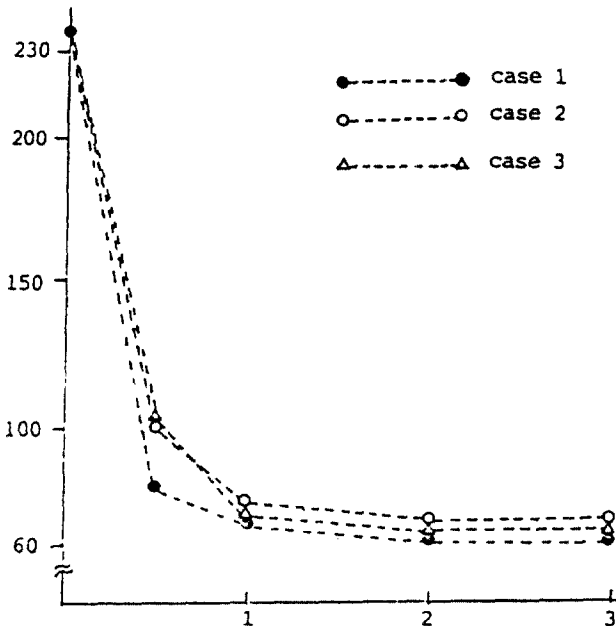


그림 5. 5 11部材 트러스의 Level 反復試行에 따른 目的 函數 값

差異를 나타내고 있음을 알 수 있다.

適用 알고리즘에 따라서는 若干의 差異를 나타내고 있는 原因은 適用 알고리즘의 收斂方法 差異때문

으로 생각된다.

(2) 本 研究의 方法에 依한 形状最適化는 그림 5-1, 그림 5-3, 그림 5-5, 및 表 5-3, 表 5-7, 表 5-11, 表에서 알 수 있듯이 2회내지 3회反復試行으로 最適解에 收斂하고 있다.

(3) 本 研究의 方法에 依한 形状最適化의 경우 그림 5-6에서와 같이 部材力이 零인 部材가 있으면 最適解를 求하는 데에 相異한 어려움이 있었다.

이러한 問題를 解決하기 위해서 設計變數의 下限 值를 使用하였다.

(4) 本 研究의 方法은 그림 5-1, 그림 5-3, 그림 5-5에서 보는 바와 같이 트러스의 種類 載荷條件 制約條件式의 種類에 拘束받지 않고 效率的으로 收斂함을 알 수 있다.

(5) 數值例를 通하여 同一한 設計條件下에서 트러스의 幾何學的形態를 固定시키고 斷面만을 最適化한 경우 보다 트러스의 形状까지도 最適化한 경우에는 트러스의 初期의 幾何形態와 設計條件에 따라 多少 差異가 있겠지만 本 數值例만을 基準으로 할때 表 5-13과 같이 大略 5.27%에서 38.05% 程度로 重量이 減少한다는 事實을 알 수 있으므로 트러스의 形状最適化는 트러스 構造物의 經濟的인 設計에 도움을 줄 수 있을 것으로 思料된다.

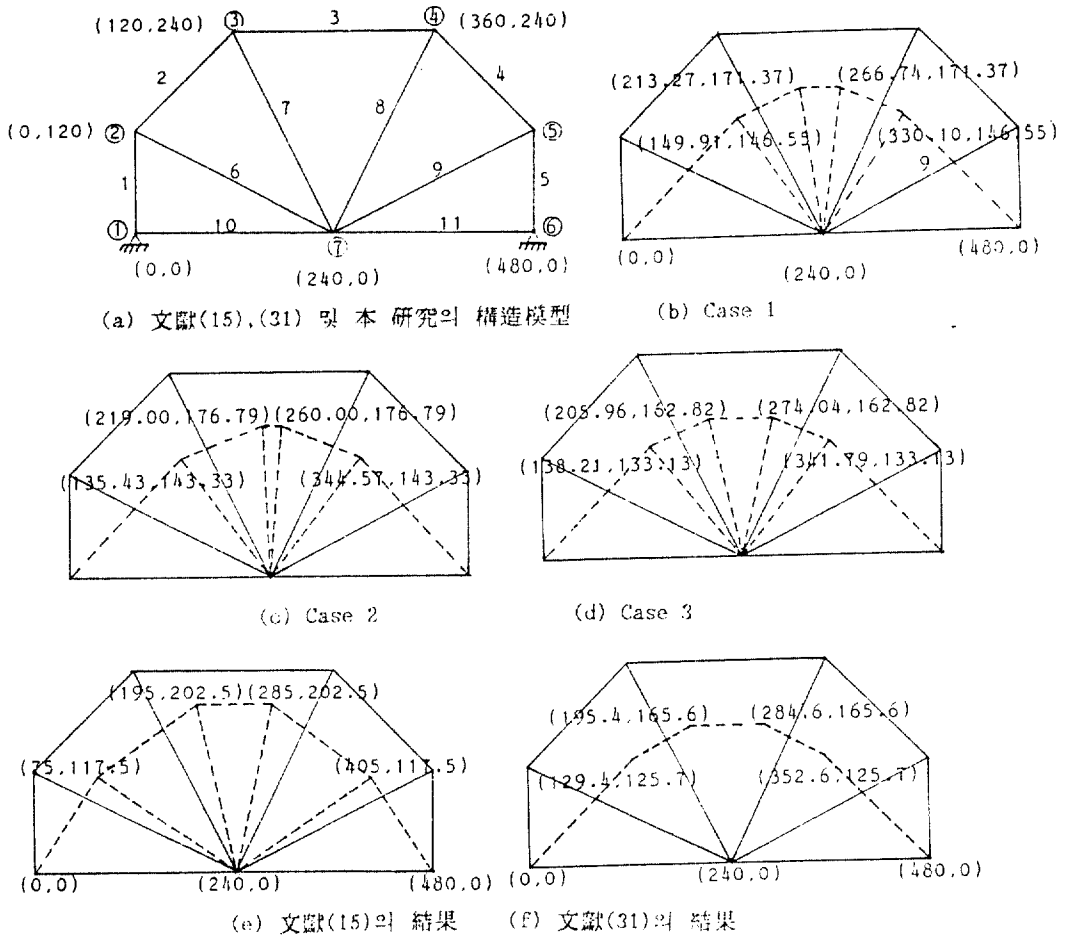


그림 5.6 文獻(15) 및 文獻(31) 및 本 研究의 最適形狀

5-13 形狀이 固定된 最適化와 形狀最適化의 目的函數 比較表

構造形態	Case	形狀이 固定된 最適化	形狀最適化	重量減少率(%)
7部材트러스 (第1型)	1	1431600.0	1213772.2	34.92
	2	1458513.5	1265902.9	13.21
	3	1563760.9	1318413.6	15.69
	4	1574651.6	1320000.7	16.71
7部材트러스 (第2型)	1	4880.03	4623.06	5.27
	2	5526.69	5074.99	8.28
	3	5550.16	5116.61	7.82
11部材트러스 (第1型)	1	80.006	62.259	22.19
	2	107.154	65.429	41.90
	3	107.485	66.589	38.05

6. 結 論

本 研究의 Two-Levels 分割 最適化 技法을 利用하는 알고리즘을 4種의 트러스의 構造模型에 適用하여 얻어진 研究 結果를 要約하면 다음과 같다.

1. Level 1에서는 許容方向法에 依한 斷面 最適化, Level 2에서 Powell法의 一方向 探查法에 依해 目的函數만이 最小가 되도록 하는 形狀 最適化 技法으로 構成된 本 研究의 알고리즘은 트러스의 形態, 載荷條件, 靜的制約條件, 固有振動數 制約條件 등에 拘束받지 않고 效率的으로 收斂함을 알 수 있다.

2. 트러스 構造物의 最適形狀은 考慮되는 制約條件式에 따라 大端히 相異함을 알 수 있다.

3. 同一한 設計條件下에서 트러스의 幾何學的形態를 固定시키고 斷面만을 最適化한 경우보다 本 研究의 알고리즘에 依하여 트러스의 形狀까지도 最適化한 경우에는 트러스의 初期의 幾何形態와 設計條件에 따라 多少 差異가 있겠지만 重量을 相當히 減少시킬 수 있다는 事實을 알 수 있으므로 本 研究에 依한 트러스 構造物의 形狀最適化는 트러스 構造物의 經濟的인 設計에 도움을 줄 수 있을 것으로 思料된다.

謝 辭

이 論文은 1988年度 文敎部 學術 研究助成費에 依한 自由公募 課題로 選定되어 研究되었으며 本 研究를 支援해주신 韓國學術振興財團에 感謝드립니다.

參 考 文 獻

1. Maxwell, "Scientific Paper", 1869, Reprinted by Dover Publication, New York, 1952.
2. Schmit, L.A., "Structural Synthesis. 1959~1969, A Decade of Progress", Paper Presented at the U.S.Japan Seminar at Tokyo in August 1969.
3. Zoutendijk, J., "Methods of Feasible Direction" Elsevier Am Ams dam, 1960
4. Fiaco, A.V., and McCormick, O.P., "Nonlinear Programming, Sequential Unconstrained Minimization", Jhon Wiley & Sons, Inc. New York. N.y., 1968.
5. Wasitynski Abigniew and Brandt, Andrezj, "The Present of Knowledge in the Field of Optimum Design of Structures", Applied Mechanics

Reviews, Vol. 16, NO. 5, May 1963, pp. 150~341.

6. Shew C.Y. and prager W. "Recent Development in Optimal Structural Design", Applied Mechanics Reviews. Vol. 21, No. 5, May, 1963.
7. Callagher, R., and Zienkiewicz, O.C., eds. *Optimum Structural Design, Theory and Applications*, John Wilcy and sons, Inc. New York N.Y., 1973.
8. Majid, K.I., *Optimum Design of Structures Butter Worths*, London, 1924.
9. Lucien, A., Schmit, Thoms P. Kicher. "Synthesis of Material and Configuration Selection", *Journal of Structural Division*, ASCE, Proc. VOL. 88, NO. ST3, June 1962, pp. 79~102.
10. William S. Dorn, Relph E, Gomory., Greenbery, H.J., "Automatic Design of optimal Structures", *Journal de Mecanique*. Vol. 3, NO. 1, Mars, 1964, pp. 25~52.
11. Dobbs, M.W. Felton, L.P., "Optimization of Truss Geometry. " *Journal of Structural Division*, " ASCE, Proc. Vol. 95, No. ST10 Oct. 1969, pp. 2105~2117.
12. Pedersen, P., "On the Minimum Mass Layout of Trusses," AGARD Symposium on Struct. OPT - Istanbul, Turkey, Oct 1961, AGARDAG149 -71, Feb 1971.
13. Pedersen, P., "On the Optimal Layout of Multi-Purposi Trusses." *Computers and Structures*, Vol. 2, 1972.
14. Pedersen, P., "Optimal Joint Positions for Space Trusses". *Journal of the Structural Divisions*, ASCE, Prot. Vol.99, ST12, 1973, pp. 2459~2476.
15. Vanderplaats, G.N., and Moses, F., "Automated Design of Trusses for Optimum Geometry", *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 98, ST3, Proc. Paper 8795, Mar., 1972, pp.671~690.
16. Spillers, W.R., "Iterative design for optimal Geometry." *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 101, NO. ST7, Proc. paper 11439, July. 1975, pp. 1435~1442.
17. Friedland, L.R., "Geometric Structural Behavior." Thesis Presented to Colombia University. at New York. N.Y., In 1971 in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of

- Philosophy.
18. Oviada.E., Lev., "Structural Optimization : Recent Developments and Applications." ASCE, 1981
 19. Cheny. F.Y. "Recent Developments in Structural Optimization." ASCE, 1986.
 - 20 Saka, M.P., "Shape Optimization of Trusses" *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 106, No.ST5 Proc. PAPER 15437 May 1980, pp. 1155~1173.
 21. Kanji Imai, and Schmit, F., "Configuration Optimization of Trusses." *Journal of Structural Division*, ASCE, Proc. Vol. 107, No. ST 5, May, 1981. pp. 745~756.
 22. Topping, B.H.V., "Shape Optimization of Sdeletal Structures : a Review", *Journal of the Structursl Devision*. ASCE Vol. 109. No. 8, proc. Paper 18187 August., 1983, pp. 1933~1951.
 23. Kirsch and G. Toledano., "Approximate Reanalysis for Modifications of Structural Geometry", *Journal of Computers and the Structures*. Vol. 16, No. 1~4, 1983, pp. 269~277.
 24. 趙孝男：“뿔대構造物의 離散形 最適設計에 관한 研究”，大韓土木學會誌 第21圈，第3號，1973,9，. 107~120.
 25. 邊根周：“鐵筋 콘크리트 뿔대 構造物의 最適化를 위한 最適斷面의 決定에 관한 研究”，延世大學校 大學院(博士學位 論文). 1975.
 26. 邊根周, 黃鶴周, 趙孝男：“多制約條件下의 뿔대 構造物의 離散形 最適設計” 延世論叢 第12輯 延世大學校 大學院 1975,pp.195~213.
 27. 邊根周, 趙孝男, 黃鶴周：鐵筋 콘크리트 斷面의 最小經費設計를 위한 最適 關한 研究, 大韓土木學會誌, 第23卷 第3號, 1975, pp.131~137.
 28. 李奎遠, 邊根周, 黃鶴周：“SUMT法에 의한 鋼材 트러스의 最適設計에 관한 研究, 大韓土木學會誌 第28圈, 第4號, 1980,8, pp.119~130.
 29. James L.K., "Optimization Techniques with Fortran" Mcgraw-Hill Book Company., 1973
 30. 李奎遠：“平面 트러스 構造物의 形狀最適化에 관한 研究”，延世大學校 大學院(博士學位 論文). 1980, 12.
 31. 李奎遠, 邊根周, 黃鶴周：“平面 트러스 構造物의 形狀最適化에 관한 研究”，大韓土木學會論文集, 第5卷, 第3號 1985, 9, pp.49~59.
 32. 鄭海駿, 李奎遠：“幾何的 設計法에 의한 鋼材 트러스 構造物의 最適化에 관한 研究”，大韓土木學會論文集, 第3卷, 第2號 1983, 6, pp. 31~44
 33. 裴主星：“確率制約을 考慮한 平面 트러스 構造物의 形狀最適化에 관한 研究”，全北大學校 大學院(博士學位 論文), 1983, 2.
 34. 鄭海駿：“幾何的 計劃法 및 Powell法에 의한 鋼材 트러스構造物의 形狀最適化에 관한 研究”，全北大學校 大學院(博士學位 論文). 1984, 2.
 35. 韓상훈：“두 設計空間에 의한 아치 構造의 形狀最適化 研究”，延世大學校 大學院(博士學位 論文), 1985, 6
 36. 金成完, 李奎遠：“平面 트러스 構造物의 形狀最適化”，大韓土木學會論文集, 第6卷, 第2號 1986, 6.
 37. 李奎遠, 林秉龍：“破壞確率을 考慮한 트러스 構造物의 形狀最適化”，大韓土木學會論文集, 第7卷, 第3號 1987, 9
 38. 金경승：“케이블의 最適引張力을 考慮한 斜張橋의 形狀最適化에 관한 研究”，延世大學校 大學院(博士學位 論文)1988, 6.
 39. Kenneth F. Reinschmidt Alan K. Russell, "Linear Methods in Structural Optimization", Research Report R70~41, The Department of Civil Engineering Massachusetts Institute of Technology Cavbridge, Massachusetts, July, 1970.

(接受：1990. 3. 19)