

현수 곡선부재의 면내 자유진동 해석

Planar Free Vibrations of Catenary Arcs

이 병 구* · 오 상 진** · 서 주 석**
 Lee, Byoung Koo* · Oh, Sang Jin** · Suh, Ju Suk**

Abstract

The main purpose of this paper is to present both fundamental and some higher natural frequencies of catenary arcs. The differential equations governing planar free vibrations for these arcs are derived, in which the rotatory inertia is included, as non-dimensional forms and solved numerically to obtain frequencies and mode shapes.

The hinged-hinged and clamped-clamped end constraints are applied in numerical examples. The lowest four natural frequencies are reported as the functions of non-dimensional system parameters; the slenderness ratio and the rise to span length ratio. The effects of rotatory inertia on natural frequencies are reported and some typical mode shapes are also presented.

요 지

현수 곡선부재가 면내 자유진동할 때 발생하는 변위에 의한 합응력과 질량을 갖는 부재의 미소요소에 작용하는 관성력에 대한 동적 평형방정식을 이용하여 현수 곡선부재의 면내 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하였다. 이 미분방정식에는 회전관성효과를 고려하였다.

이 미분방정식을 양단힌지 및 양단고정의 단부조건을 갖는 현수 곡선부재에 적용시키고 고유진동수와 진동형을 구하기 위하여 시행착오적 고유치문제와 Improved Euler method를 이용하여 수치해석 하였다.

수치해석 결과로 회전관성이 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하고, 고유 진동수와 곡선부재 높이와의 관계 및 고유진동수와 세장비와의 관계를 그림에 나타내었다. 또한 진동형의 예를 그림에 나타내었다.

1. 서 론

곡선부재는 토목, 건축, 기계, 선박, 항공등 여러

공학분야에서 기본구조 단위계로 사용되기 때문에 그에 대한 정적, 동적인 연구들이 많이 이루어 졌다.

*정회원 · 원광대학교 공과대학 토목공학과 부교수

**정회원 · 원광대학교 공업기술개발연구소 토목공학연구부 연구원

곡선부재를 동하중이 작용하는 구조물에 이용하는 경우에는 동적 거동에 대한 종합적인 검토가 필수적으로 요청된다. 특히 구조물의 고유한 특성중의 하나인 자유진동 특성을 해석하는 것은 동적 거동의 제 문제중에서도 가장 먼저 선행되어야 할 연구과제이다.

곡선부재의 면내 자유진동을 해석한 논문들은 많은 문헌들에서 찾아 볼수 있지만 대부분 곡률이 변화하지 않는 원호형 곡선부재를 연구 대상으로 하고 있으며, 변화곡률의 곡선부재는 상대적으로 적은 논문 편수를 보이고 있다.

원호형 곡선부재의 자유진동을 해석한 연구의 대표적인 논문들로는 다음의 문헌들을 들 수 있다. Wung⁽¹⁾은 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고 이를 양단힌지 아치에 적용시켰다. Wolf⁽²⁾는 곡선부재를 유한개의 요소로 나누어서 자유진동을 해석하였다. Veletsos⁽³⁾등은 위의 Wung의 논문을 더욱 진전시켜서 고유진동수를 근사적으로 구할 수 있는 고유진동수 방정식을 제안하였다. Austin⁽⁴⁾등은 회전관성과 전단변형이 고유진동수에 미치는 영향에 대하여 자세히 논의하였다.

한편 변화곡률 곡선부재의 자유진동을 해석한 연구의 대표적인 논문들로는 다음의 문헌들을 들 수 있다. Volterra⁽⁵⁾등과 Romanelli⁽⁶⁾등은 양단힌지인 곡선부재의 자유진동을 Rayleigh-Ritz method에 의하여 해석하였다. 실제의 수치해석에는 포물선, 현수선, 나선등의 곡선부재에 대하여 제1고유진동수만을 계산하였다. Wang⁽⁷⁾은 양단고정 타원곡선부재의 자유진동을 역시 Rayleigh-Ritz method에 의하여 해석하였으며, 제1고유진동수만을 계산하였다. Lee⁽⁸⁾등은 변화곡률 아치에 대한 자유진동을 단부조건에 상관없이 제3고유진동수까지 계산하였다. 이 논문은 일반적인 변화곡률을 갖는 아치의 면내 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하였으며 수치해석에는 포물선아치, 정현아치 및 타원아치를 택하고 있다.

본 논문은 곡선부재중에서 중요한 선형중의 하나인 현수 곡선부재의 면내 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 이를 수치해석할 수 있는 기법을 개발하는데 그 목적이 있다. 실제 수치해석에는 양단힌지 및 양단고정의 단부조건에 대하여 제

4무차원 고유진동수까지 해석한다.

2. 수학적 모델

그림 1은 현수 곡선부재(catenary arc)의 기하학적 형상을 나타내고 있으며, 단부는 힌지 또는 고정으로 지지되어 있다. 이 그림과 같이 현수 곡선부재에서 지간 길이를 l , 높이를 h , 점점에서의 곡률반경을 a 라 하면 이 현수 곡선부재의 선형식은 직교좌표계(x, y)에서 다음과 같이 주어진다⁽⁹⁾.

$$y = h + a - a \cosh\left(\frac{x - 0.5l}{a}\right) \quad (1)$$

부재축 임의점(x, y)에서의 곡률중심방향변위 w , 접선방향변위 v 및 단면 회전각 ϕ 가 역시 그림 1에 나타나 있으며 화살표 방향이 정(+),의 방향이다.

부재가 면내 자유진동을 하게 되면 부재 단면에는 그림 2와 같이 축방향력 N , 전단력 V 및 휨 모멘트 M 의 합용력이 발생하고, 질량을 갖는 부재 미소요소에는 곡률 중심방향의 관성력 P_r , 접선방향의 관성력 P_t 및 회전관성우력 T 가 작용하게 된다. 그림 2에서 합용력 N, V, M 및 관성력 P_r, P_t, T 는 모두 화살표 방향이 정(+),의 방향이다.

그림 1에서 임의점 (x, y)에 대한 현수곡선의 곡률반경을 ρ , 곡률반경과 x 축이 이루는 각도를 ϕ 라 하면 합용력 N, M 과 단면회전각 ϕ 는 다음과 같이 변위 w, v 의 ϕ 에 대한 미분식들로 주어진다⁽¹⁰⁾.

$$N = EA\rho^{-1}[(v' + w) + r^2\rho^{-2}(w'' + w)] \quad (2)$$

$$M = -EA r^2 \rho^{-2}(w'' + w) \quad (3)$$

$$\phi = \rho^{-1}(w' - v) \quad (4)$$

윗 식들에서 '는 $d/d\phi$, $d^2/d\phi^2$ 을 의미하며, 이 후에도 동일한 의미를 갖는다. 또한 E 는 탄성계수,

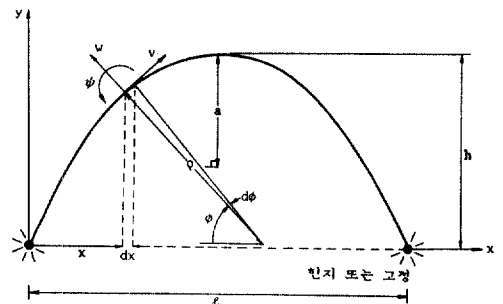


그림 1. 현수 곡선부재의 기하학적 형상 및 제변수

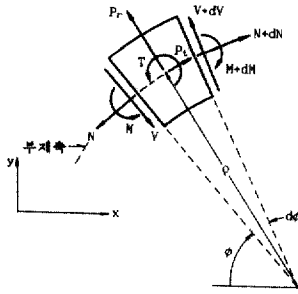


그림 2 부재 미소요소에 작용하는 합응력 및 관성력

A는 단면적, r은 단면회전반경이다.

이 연구에서 부재의 자유진동은 $w(\phi, t) = w \sin \omega t$, $v(\phi, t) = v \sin \omega t$, $\psi(\phi, t) = \psi \sin \omega t$ 등으로 표시되는 조화진동을 한다고 가정한다. 이 식들에서 t는 시간, ω 는 고유각진동수이다.

부재의 자유진동으로 인한 부재 미소요소에는 그림 2와 같이 단위길이당 관성력 P_n , P_t 및 T가 발생하며 이 식들은 다음과 같이 표시된다⁽¹¹⁾.

$$P_n = m\omega^2 w \quad (5)$$

$$P_t = m\omega^2 v \quad (6)$$

$$T = m\omega^2 r^2 \psi \\ = m\omega^2 r^2 \rho^{-1}(w^i - v) \quad (7)$$

윗 식들에서 m은 부재축의 단위길이당 질량이다.

그림 2에서 부재 미소요소에 작용하는 합응력과 관성력 사이의 동적 평형방정식을 세우면 다음과 같다.

$$N^i + V + \rho P_n = 0 \quad (8)$$

$$V^i - N + \rho P_t = 0 \quad (9)$$

$$\rho^{-1} M^i - V - T = 0 \quad (10)$$

(2), (3)식을 각각 ϕ 에 대하여 미분하여 N^i , M^i 를 구하면 다음 식들과 같다.

$$N^i = EA\rho^{-1} [(v^i + w^i) + r^2 \rho^{-2} (w^{iii} + w^i) \\ - \rho^{-1} \rho'(v + w) - 3r^2 \rho^{-3} \rho'(w^i + w)] \quad (11)$$

$$M^i = -EA r^2 \rho^{-2} [(w^{iii} + w^i) - 2\rho^{-1} \rho'(w^i + w)] \quad (12)$$

(10)식에 (7), (12)식을 대입하고 전단력 V에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$V = \rho^{-1} M^i - RT \\ = -EA r^2 \rho^{-3} [(w^{iii} + w^i) - 2\rho^{-1} \rho'(w^i + w)] \\ - Rm\omega^2 r^2 \rho^{-1} (w^i - v) \quad (13)$$

윗 식에서 R은 회전관성우력 T의 고려여부를 나

타내는 지표로서, 그 내용은 다음과 같다.

$$R=0: \text{회전관성을 무시하는 경우} \quad (14.1)$$

$$R=1: \text{회전관성을 고려하는 경우} \quad (14.2)$$

(13)식을 ϕ 에 대하여 미분하여 V를 구하면 다음과 같다.

$$V^i = -EA r^2 \rho^{-3} [(w^{iv} + w^{ii}) - 5\rho^{-1} \rho'(w^{iii} + w^i) \\ + 2\rho^{-1} (4\rho^{-1} \rho'' - \rho'^2)(w^{ii} + w)] \\ - Rm\omega^2 r^2 \rho^{-1} [(w^{iv} - v') - \rho^{-1} \rho'(w^i - v)] \quad (15)$$

이상에서 (2)-(13), (15)의 식들은 일반적인 변화곡률 곡선부재에 적용되는 극좌표계(ρ, ϕ)에서의 미분방정식들로 유도되어 있다. 이 식들을 직교좌표계(x, y)에서 (1)식으로 표시되는 현수 곡선부재에 적용시키기 위해서는 ϕ 에 대한 미분방정식들을 x에 대한 미분방정식들을 변수변화하여야 하며, ρ 를 x의 함수로 나타내어야 한다.

이를 위하여 그림 1에서 ϕ 를 x의 함수로 나타내면 다음과 같다.

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{dy}{dx} \right) \\ = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left[-\sinh \left(\frac{x-0.5l}{a} \right) \right] \quad (16)$$

(16)식으로부터 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$d\phi = \frac{dx}{a \cosh \left(\frac{x-0.5l}{a} \right)} \\ = \frac{dx}{a\epsilon_1} \quad (17)$$

ϵ_1 은 (17)식에 나타낸 바와 같이 (18.1)식과 같고, 앞으로 유도되는 식들을 간단하게 표시하기 위하여 ϵ_2 를 (18.2)식과 같이 정의하여 사용한다.

$$\epsilon_1 = \cosh \left(\frac{x-0.5l}{a} \right) \quad (18.1)$$

$$\epsilon_2 = \sinh \left(\frac{x-0.5l}{a} \right) \quad (18.2)$$

(17)식을 이용하면 ϕ 에 대한 미분방정식을 x에 대한 미분방정식으로 변환시킬 수 있는 다음의 미분연산자들을 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{d\phi} = a\epsilon_1 \frac{d}{dx} \quad (19.1)$$

$$\frac{d^2}{d\phi^2} = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{d}{d\phi} \right) \\ = a\epsilon_1 (a\epsilon_1 \frac{d^2}{dx^2} + \epsilon_2 \frac{d}{dx}) \quad (19.2)$$

$$\frac{d^3}{d\phi^3} = \frac{d}{d\phi} \left(-\frac{d^2}{d\phi^2} \right)$$

$$= a\epsilon_1 [a^2\epsilon_1^2 \frac{d^3}{dx^3} + 3a\epsilon_1\epsilon_2 \frac{d^2}{dx^2} + (2\epsilon_1^2 - 1) \frac{d}{dx}] \quad (19.3)$$

$$\frac{d^4}{d\phi^4} = \frac{d}{d\phi} \left(-\frac{d^3}{d\phi^3} \right)$$

$$= a\epsilon_1 [a^3\epsilon_1^3 \frac{d^4}{dx^4} + 6a^2\epsilon_1^2\epsilon_2 \frac{d^3}{dx^3} + a\epsilon_1(11\epsilon_1^2 - 7) \frac{d^2}{dx^2} + \epsilon_2(6\epsilon_1^2 - 1) \frac{d}{dx}] \quad (19.4)$$

또한 그림 1에서 ρ 를 x 의 함수로 표시하면 다음과 같다.

$$\rho = \frac{[1 + (\frac{dy}{dx})^2]^{3/2}}{|\frac{d^2y}{dx^2}|}$$

$$= a\epsilon_1^2 \quad (20)$$

ρ, ρ^i 를 (20)식과 (19.1), (19.2)식을 이용하여 x 의 함수로 나타내면 다음과 같다.

$$\rho^i = \frac{d\rho}{d\phi}$$

$$= a\epsilon_1 \frac{d}{dx} (a\epsilon_1^2)$$

$$= 2a\epsilon_1^2\epsilon_2 \quad (21)$$

$$\rho^{ii} = \frac{d\rho^i}{d\phi}$$

$$= a\epsilon_1 \frac{d}{dx} (2a\epsilon_1^2\epsilon_2)$$

$$= 2a\epsilon_1^2(3\epsilon_1^2 - 2) \quad (22)$$

현수 곡선부재의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 이용한다.

$$\bar{x} = x/l, \quad \bar{y} = y/l \quad (23)$$

$$\bar{w} = w/l, \quad \bar{v} = v/l \quad (24)$$

$$f = h/l, \quad k = l/a \quad (25)$$

$$s = l/r \quad (26)$$

이상의 무차원 변수들을 간단히 설명하면 다음과 같다.

(23)식의 \bar{x}, \bar{y} 는 직교좌표계 (x, y) 를 지간길이 l 에 대하여, (24)식의 \bar{w}, \bar{v} 는 변위 w, v 를 지간길이 l 에 대하여 각각 정규화시킨 것이다.

(25)식의 f, k 는 현수 곡선부재의 기하학적 형상

을 정의해 주는 무차원 변수들로서 f 는 지간길이 l 에 대한 높이 h 의 비이며, k 는 곡선부재 정점에서의 곡률변경 a 에 대한 지간길이 l 의 비이다. 이들 f 와 k 는 서로 종속적인 관계에 있다. 즉 (23)식을 이용하여 현수 곡선부재의 선형식인 (1)식을 정규화시키면 $\bar{y} = f + k^{-1} - k^{-1} \cosh[k(\bar{x} - 0.5)]$ 가 되고, $\bar{x} = 1$ 에서 $\bar{y} = 0$ 이므로 이 식에 $\bar{x} = 1, \bar{y} = 0$ 를 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$fk - \cosh(0.5k) + 1 = 0 \quad (27)$$

(27)식은 f 와 k 가 종속적인 관계임을 의미하며, 지간길이에 대한 높이의 비 f 값을 주면 k 값은 적당한 방법의 수치해석법으로 구할 수 있다. 본 연구에서는 f 값에 대한 k 값을 구하기 위하여 반분법(bisection method)⁽¹²⁾을 이용한다.

마지막으로, (26)식의 s 는 부재단면의 크기를 정의해 주는 지간길이 l 에 대한 세장비이다.

이제 위에서 유도한 식들을 이용하면 현수 곡선부재의 면내 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도할 수 있다.

동적 평형방정식 (9)식에 (2)식의 N , (5)식의 P , 및 (15)식의 V 를 대입하고 미분연산자 (19.1) - (19.4)식, ρ, ρ^i, ρ^{ii} 의 (20) - (22)식 및 무차원 변수 (23) - (26)식을 이용하면 (28)식의 미분방정식을 얻을 수 있다.

마찬가지 방법으로, 동적 평형방정식 (8)식에 (6)식의 P_0 , (11)식의 N^i 및 (13)식의 V 를 대입하고 미분연산자 (19.1) - (19.3)식, ρ, ρ^i, ρ^{ii} 의 (20) - (22)식 및 무차원 변수 (23) - (26)식을 이용하면 (29)식의 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\bar{w}'''' = a_1 \bar{w}'''' + (a_2 + Ra_3 C_n^2) \bar{w}''$$

$$+ (a_4 + Ra_5 C_n^2) \bar{w}' + (a_6 + a_7 C_n^2) \bar{w}$$

$$+ (a_8 + Ra_9 C_n^2) \bar{v}' + Ra_{10} C_n^2 \bar{v} \quad (28)$$

$$\bar{v}'' = a_{11} \bar{w}'' + (a_{12} + Ra_{13} C_n^2) \bar{w}' + a_{14} \bar{w}$$

$$+ a_{15} \bar{v}' + (a_{16} + Ra_{17} C_n^2) \bar{v} \quad (29)$$

(28), (29)식에서 프라임(')은 \bar{x} 에 대한 미분을 의미하며, 이후에도 같은 의미를 갖는다. $a_1 - a_{17}$ 의 계수는 (30.1) - (30.17)식과 같고 이 식들 속에 포함되어 있는 η_1, η_2, η_3 는 (31.1) - (31.3)식과 같다.

$$a_1 = 4k\eta_1\eta_2 \quad (30.1)$$

$$a_2 = -k^2(\eta_2^2 + 1) \quad (30.2)$$

$$a_3 = -s^{-2}\eta_3^2 \quad (30.3)$$

$$a_4 = -k^3\eta_1\eta_2^3(6\eta_1^2 - 17) \quad (30.4)$$

$$a_5 = s^{-2}k\eta_1\eta_3 \quad (30.5)$$

$$a_6 = -k^4\eta_2^4(s^2k^{-2}\eta_3^4 + 20\eta_3^2 - 23) \quad (30.6)$$

$$a_7 = \eta_3^4 \quad (30.7)$$

$$a_8 = -s^{-2}k\eta_3 \quad (30.8)$$

$$a_9 = s^{-2}k\eta_3 \quad (30.9)$$

$$a_{10} = -2s^{-2}k^2\eta_1 \quad (30.10)$$

$$a_{11} = 2s^{-2}k^2\eta_1\eta_2^4 \quad (30.11)$$

$$a_{12} = -s^{-2}k^3\eta_2^5(s^2k^{-2}\eta_3^4 - 2\eta_1^2) \quad (30.12)$$

$$a_{13} = s^{-4}k\eta_2 \quad (30.13)$$

$$a_{14} = 2s^{-2}k^4\eta_1\eta_2^6(s^2k^{-2}\eta_3^4 + 1) \quad (30.14)$$

$$a_{15} = k\eta_1\eta_2 \quad (30.15)$$

$$a_{16} = -s^{-2}\eta_3^2 \quad (30.16)$$

$$a_{17} = -s^{-4}k^2\eta_2^2 \quad (30.17)$$

여기서,

$$\eta_1 = \sinh[k(\bar{x}-0.5)] \quad (31.1)$$

$$\eta_2 = \operatorname{sech}[k(\bar{x}-0.5)] \quad (31.2)$$

$$\eta_3 = \cosh[k(\bar{x}-0.5)] \quad (31.3)$$

(28), (29)식의 미분방정식에서 C_n 는 다음 식으로 주어지는 무차원 고유진동수이다.

$$C_n = \omega_n \frac{r}{r} \sqrt{\frac{m}{EA}} = \omega_n s l \sqrt{\frac{r}{E}}, \quad n=1, 2, 3, 4 \dots \quad (32)$$

(32)식에서 $r = m/A$ 로 부재재료의 단위체적당 질량이며, n 는 모드(mode)수이다.

이상의 (28), (29)식이 현수 곡선부재의 면내 자유진동을 지배하는 미분방정식이다.

힌지단의 경계조건은 곡선부재의 좌단($x=0$) 또는 우단($x=l$)에서 $w=v=M=0$ 이며 이 식들은 (3), (19.2), (23.1), (24.1), (24.2), (25.2)식을 이용하면 다음과 같이 유도된다.

$$\bar{w}=0, \text{ 좌단}(\bar{x}=0) \text{ 또는 우단}(\bar{x}=1) \text{ 에서} \quad (33)$$

$$\bar{v}=0, \text{ 좌단}(\bar{x}=0) \text{ 또는 우단}(\bar{x}=1) \text{ 에서} \quad (34)$$

$$\bar{w}'' + k\eta_1\eta_2\bar{w}' = 0, \text{ 좌단}(\bar{x}=0) \text{ 또는 우단}(\bar{x}=1) \text{ 에서} \quad (35)$$

고정단의 경계조건은 곡선부재의 좌단($x=0$) 또는 우단($x=l$)에서 $w=v=\psi=0$ 이며 이 식들은 (4), (19.1), (23.1), (24.1), (24.2)식을 이용하면 다음과 같이 유도된다.

$$\bar{w}=0, \text{ 좌단}(\bar{x}=0) \text{ 또는 우단}(\bar{x}=1) \text{ 에서}$$

$$\bar{v}=0, \text{ 좌단}(\bar{x}=0) \text{ 또는 우단}(\bar{x}=1) \text{ 에서} \quad (36)$$

$$\bar{w}'=0, \text{ 좌단}(\bar{x}=0) \text{ 에서} \quad (37)$$

$$\bar{w}'=0, \text{ 좌단}(\bar{x}=0) \text{ 에서} \quad (38)$$

이상의 힌지단의 경계조건 (33)–(35)식, 고정단의 경계조건 (36)–(38)식을 이용하여 수치해석적 방법으로 미분방정식 (28), (29)식을 풀면 무차원 고유진동수 C_n 및 그에 대응하는 진동형 $\bar{w}=\bar{w}_n(\bar{x})$ 및 $\bar{v}=\bar{v}_n(\bar{x})$ 를 구할 수 있다.

3. 수치해석 방법

미분방정식 (28), (29)식의 엄밀해는 존재하지 않으므로 수치해석법에 의하여 수치해를 구하여야 한다.

(28), (29)식의 미분방정식에는 미지의 무차원고유진동수 C_n 항이 포함되어 있으므로 이 C_n 값을 가정하여 먼저 미분방정식에 대입한 후에 미분방정식의 수치적분을 시행한다.

미분방정식의 수치적분 문제는 초기치문제이므로 곡선부재 좌단($\bar{x}=0$)의 경계조건(힌지단 또는 고정단)을 이용하여 수치적분을 시행하고 앞에서 가정한 C_n 값이 자유진동의 고유치인지는 곡선부재 우단($\bar{x}=1$)의 경계조건(힌지단 또는 고정단)을 이용하여 판단한다. 즉 자유진동의 고유치 C_n 값을 찾기 위하여 시행착오적 고유치문제⁽⁴³⁾를 이용한다. 미분방정식의 수치적분법은 여러가지 방법들이 있으나 본 연구에서는 Improved Euler method⁽⁴⁴⁾를 이용한다.

이상과 같은 수치해석 방법으로 C_n 값을 찾으면 (32)식으로부터 고유각진동수 ω_n 을 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\omega_n = \frac{C_n}{sl} \sqrt{\frac{E}{r}}, \quad n=1, 2, 3, 4 \dots \quad (39)$$

실제의 수치적용예를 실행하기 전에 수렴해석을 시행하여 미분방정식의 수치적분을 위한 단계길이(step size) $\Delta\bar{x}$ 를 산정하여야 한다. 그림 3은 $f=0.3$, $s=100$ 인 곡선부재의 $C_n-1/\Delta\bar{x}$ 의 곡선을 나타내고 있다. 이 그림에서 $1/\Delta\bar{x}$ 는 단계길이 $\Delta\bar{x}$ 의 역수로서 곡선부재 지간길이의 분할 갯수를 의미한다. 이 그림이 보여주는 마와 같이 $1/\Delta\bar{x}$ 가 40이상이면 C_n 값은 충분한 정도로 수렴이 된다. 그러나 이 연구에서는 수치해의 정도를 강화하기 위하여 $1/\Delta\bar{x}$ 를 100으로 즉 단계길이 $\Delta\bar{x}$ 를 0.01로 하여 수치해석하였다.

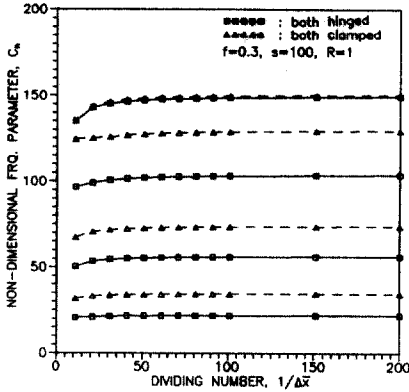


그림 3. 수렴해석

본 연구의 모든 계산결과는 PRIME 750시스템을 이용하여 실행하였다.

본 연구의 미분방정식과 수치해석 방법의 타당성을 검증하기 위하여 참고문헌 [5, 6]의 현수 곡선부재의 결과 및 구조해석용 범용 프로그램인 SAP80의 해석 결과를 본 연구의 결과와 비교하였다.

먼저 문헌 [5, 6]의 결과와 본 연구의 계산 결과를 표 1에 비교하였다. 문헌 [5, 6]은 양단힌지 부재의 제1고유진동수만 계산하였으므로, 본 연구에서도 양단힌지 부재의 제1고유진동수만 계산하여 비교하였다.

표 1에서 보인 바와 같이 두 문헌들의 결과와 본 연구의 결과는 아주 우수하게 접근하여 본 연구 결과의 타당성을 검증할 수 있다. 특이한 점은 본 연구의 계산 결과가 두 문헌의 계산 결과 보다 모두 작게 나타나고 있는 점이다.

이는 두 문헌이 Rayleigh-Ritz method에 의하여 해석된 결과이며, Rayleigh-Ritz method에 의한 해석 결과는 통상적으로 진해의 고유진동수 보다 다소 크게 계산되는 특징이 있으므로 이러한 특이한 점은 오히려 본 연구의 정확성을 더 입증하는 것이라 할 수 있다.

표 2는 동일한 곡선부재의 모델에 대하여 제4고유각진동수(rad/sec)까지 계산한 본 연구의 결과와 SAP80의 결과를 비교한 표이다. SAP80의 해석시에 3차원 보요소 사용했으며, 요소수는 100으로 하여 계산하였다.

표 1. 본 연구와 타 문헌들과의 제1무차원고유진동수 비교

f (양단힌지, s=100)	제1무차원고유진동수, $C_{n=1}$		
	본 연구	문헌[5]	문헌[6]
0.0439	38.75	38.79	38.90
0.0666	37.93	37.97	38.21
0.0900	36.81	36.92	37.28
0.1146	35.38	35.69	36.17
0.1408	33.64	34.36	34.91
0.1691	31.60	33.02	33.56
0.2002	29.27	31.73	32.18

주: 무차원고유진동수를 문헌[5, 6]에서도 본 연구에서와 같은 (32)식으로 나타내었음.

표 2에서 보인 바와 같이 두 방법의 고유각진동수는 아주 우수하게 접근한 것을 알 수 있으며, 따라서 본 연구에서 유도한 현수 곡선부재의 자유진동을 지배하는 미분방정식과 수치해석 방법의 타당성을 입증할 수 있다.

4. 수치해석에

표 3은 회전관성이 고유진동수에 미치는 영향을 분석하기 위하여 회전관성을 무시한 경우($R=0$)와 회전관성을 고려한 경우($R=1$)에 대하여 무차원고유진동수를 비교한 표이다. 이 표에서 볼 수 있듯이 회전관성은 고유진동수를 감소시키는 요인이며, 그 영향은 약 2%정도로 매우 작음을 알 수 있다.

그림 4, 5는 세장비 $s=100$ 인 현수 곡선부재에 대하여 단부조건이 각각 양단힌지 및 양단고정인 경우의 무차원고유진동수 C_n 과 지간길이에 대한 높이비 f 와의 관계를 그림에 나타낸 것이다.

현수 곡선부재의 높이비 f 가 0으로 수렴하게 되면 직선보로 수렴되므로 그림 4, 5에서 $f=0$ 일 때 무차원고유진동수는 각각 양단힌지 및 양단고정 직선보의 무차원고유진동수로 수렴하여야 한다. 그림 4의 □표 및 그림 5의 △표의 C_n 값들은 $f=0$ 인 직선보로 수렴되었을 때 무차원고유진동수이며, 이 값들은 참고문헌 [15]의 직선보의 값들과 일치되는 것을 보여준다. 이는 본 연구에서 유도한 미분방정식과 수치해석기법이 직선보에도 적용될

표 2 본 연구와 SAP80과의 고유각진동수 ω_n (rad/sec)의 비교

단 부 조 건	계 원	n	본연구(R=1)		SAP80 $\omega_n(B)$	오 차(%)
			C_n	$\omega_n(A)$		
양단힌지	f=0.1 s=50	1	35.13	363.4	365.4	0.55
		2	36.04	372.8	372.6	0.05
		3	82.92	857.8	870.1	1.41
		4	142.6	1475.	1508.	2.19
	f=0.3 s=100	1	21.88	113.2	110.7	0.23
		2	56.00	289.6	287.7	0.66
		3	103.2	533.8	535.1	0.24
		4	148.7	769.1	778.2	1.17
양단고정	f=0.1 s=50	1	37.75	390.5	392.9	0.61
		2	56.20	581.4	588.6	1.22
		3	112.3	1161.	1186.	2.11
		4	154.2	1595.	1600.	0.31
	f=0.3 s=100	1	35.30	182.6	184.3	0.92
		2	73.52	380.3	387.9	1.96
		3	128.8	666.2	679.0	1.89
		4	149.6	773.8	782.7	1.14

※고유각진동수(ω_n)계산시에 $r=7850 \text{ N-sec}^2/\text{m}^4$, $E=2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $l=10\text{m}$ 를 사용하였음.

※※ 오차(%) = $|B-A| \times 100/B$

표 3. 회전관성이 무차원고유진동수에 미치는 영향

단 부 조 건	계 원	n	무차원고유진동수, C_n		영 향(%)
			R=0(A)	R=1(B)	
양단힌지	f=0.1 s=50	1	35.20	35.13	-0.20
		2	36.28	36.04	-0.67
		3	84.26	82.92	-1.62
		4	145.9	142.6	-2.31
	f=0.3 s=100	1	21.89	21.88	-0.05
		2	56.14	56.00	-0.25
		3	103.7	103.2	-0.48
		4	149.0	148.7	-0.02
양단고정	f=0.1 s=50	1	37.84	37.75	-0.24
		2	56.65	56.20	-0.80
		3	114.3	112.3	-1.78
		4	154.5	154.2	-0.19
	f=0.3 s=100	1	35.34	35.30	-0.11
		2	73.72	73.52	-0.27
		3	129.5	128.8	-0.54
		4	149.8	149.6	-0.13

주) 영향(%) = $(B-A) \times 100/B$

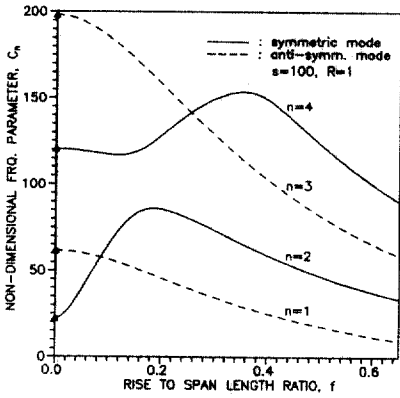
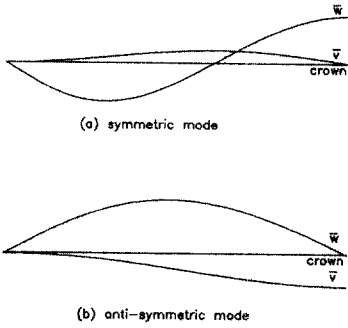


그림 4. 무차원 고유진동수와 높이비와의 관계 (양단힌지)



(a) 대칭진동형 ($C_2=56.0$) (b) 역대칭진동형 ($C_1=21.9$)

그림 6. 진동형의 예(양단힌지, $f=0.3, s=100, R=1$)

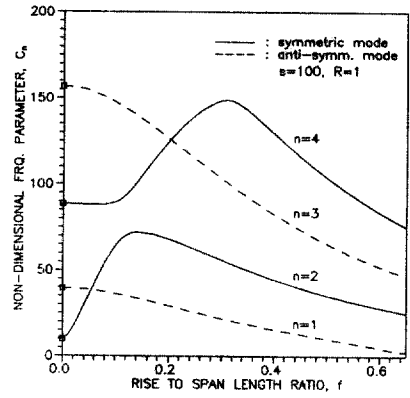
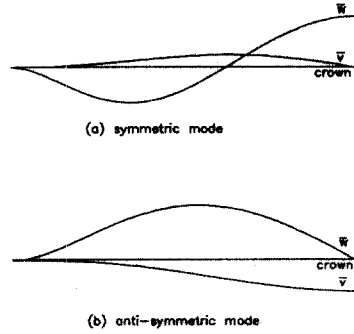


그림 5. 무차원 고유진동수와 높이비와의 관계 (양단고정)



(a) 대칭진동형 ($C_2=73.5$) (b) 역대칭진동형 ($C_1=35.3$)

그림 7. 진동형의 예(양단고정, $f=0.3, s=100, R=1$)

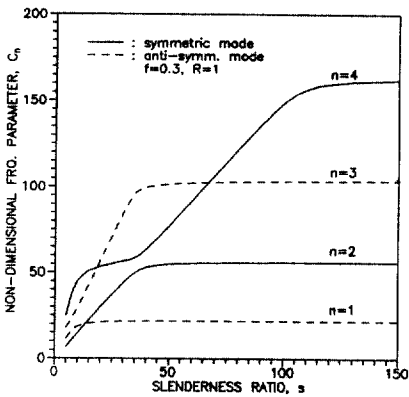


그림 8. 무차원 고유진동수와 세장비와의 관계 (양단힌지)

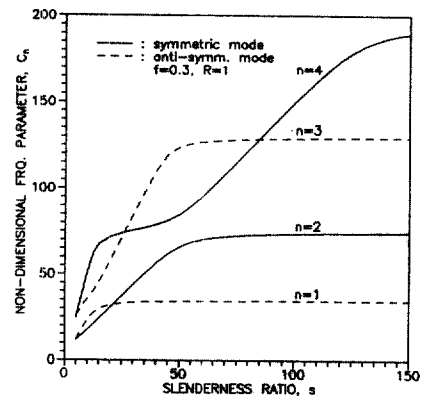


그림 9. 무차원 고유진동수와 세장비와의 관계 (양단고정)

수 있음을 의미한다.

부재의 기하학적 형상이 좌우대칭이면 자유진동의 모드(mode)는 대칭진동과 역대칭진동으로 구분할 수 있다⁶⁾. 그림 4, 5에서 대칭진동은 실선으로 역대칭진동은 점선으로 나타내었다. 이 그림들에서 볼 수 있듯이 자유진동 모드는 대칭진동과 역대칭진동이 서로 번갈아 발생하고 있다. 그림 4의 양단힌지인 경우에 $n=1, 2$ 가 서로 만나는 f 값은 0.053이며, $n=3, 4$ 가 만나는 f 값은 0.203이다. 따라서 f 값이 0~0.053의 범위이면 대칭, 역대칭, 대칭, 역대칭의 순서로, f 값이 0.053~0.203의 범위에서는 역대칭, 대칭, 대칭, 역대칭의 순서로 f 값이 0.203이상에서는 역대칭, 대칭, 역대칭, 대칭의 순서로 자유진동 모드가 발생함을 보여준다.

또한 참고로 $s=100$ 인 곡선부재에 대하여 양단힌지와 양단고정의 대칭진동형과 역대칭진동형을 각각 그림 6, 7에 나타내었다.

그림 8, 9는 높이비 $f=0.3$ 인 현수 곡선부재에 대하여 단부조건이 각각 양단힌지 및 양단고정인 경우의 무차원 고유진동수 C_n 과 세장비 s 의 관계를 그림에 나타낸 것이다. 이 그림들에서도 그림 4, 5에서와 마찬가지로 대칭진동을 실선으로 역대칭진동은 점선으로 표시하였으며, 역시 진동모드는 대칭진동과 역대칭진동 모드가 번갈아 발생하는 것을 알 수 있다.

5. 결 론

이 논문은 현수 곡선부재의 면내 자유진동에 관한 연구로서 이 연구를 통하여 얻어진 결론은 다음과 같다.

1) 현수 곡선부재의 면내 자유진동을 지배하는 미분방정식과 경계조건을 유도하였다.

2) 이 미분방정식을 시행착오적 고유치문제와 Improved Euler method를 이용하여 수치해석하였다.

3) 본 연구 결과와 문헌 [5, 6] 및 SAP80의 결과를 비교하여 본 연구의 타당성을 입증하였다.

4) 본 연구에서 유도한 미분방정식과 수치해석기법은 직선보($f=0$)에 대해서도 적용시킬 수 있다.

5) 자유진동 모드는 대칭진동과 역대칭진동이 서로 교호하며 발생한다.

참 고 문 헌

1. Shyr-jen wung, *Vibration of Hinged Circular Arches*, Master of Science Thesis, Rii University, U. S. A., 1967.
2. J. A. Wolf, Jr., "Natural Frequencies of Circular Arches", *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 97, No. ST9, 1971, pp.2337-2350.
3. A. S. Veletsos, W. J. Austin, C. A. L. Pereira and Shyr-jen Wung, "Free In-Plane Vibration of Circular Arches", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 98, No. EM2, 1972, pp.311~329.
4. W. J. Austin and A. S. Veletsos, "Free Vibration of Arches Flexible in Shear", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 99, No. EM4, 1973, pp.735~753.
5. E. Volterra and J. D. Morell, "Lowest Natural Frequencies of Elastic Hinged Arcs", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 33, 1961, pp.1787~1790.
6. E. Romanelli and P. A. Laura, "Fundamental Frequencies of Non-Circular, Elastic, Hinged Arcs", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 24, No. 1, 1972, pp.17~22.
7. T. M. Wang and J. A. Moore, "Lowest Natural Extensional Frequency of Clamped Elliptic Arcs", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 30, 1973, pp.1~7.
8. Byoung Koo Lee and James F. Wilson, "Free Vibrations of Arches with Variable Curvature", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 136, No. 1, 1989, pp.75~89.
9. Ralph G. Hudson, *The Engineer's Manual*, John Wiley & Sons, Inc., 1953, pp. 67.
10. S. F. Borg and J. J. Gennaro, *Advanced Structural Analysis*, D. Van Nostrand Company, 1965, pp.21~33.
11. Josef Henrych, *The Dynamics of Arches and Frames*, Elsevier Scientific Publishing Company, 1981, pp.33~42.

12. Melvin J. Maron, *Numerical Analysis*, Macmillan Publishing Co., Inc., 1982, pp.58~60.
13. Shyr-jen Wung, *ibid.*
14. Melvin J. Maron, *ibid.*, pp.337~341.
15. Mario Paz, *Structural Dynamics*, Van Nostrand Reinhold Company, 1980, pp.365~374.
16. Timoshenko, Young and Weaver, *Vibration Problems in Engineering*, John Wiley & Sons, 1974, pp.253~254.

(接受：1990. 3. 31)