

Pseudo Lagrangian方法에 의한 非線形 要素의 大變形 解析

Large Deformation Analysis of Nonlinear Beam Element
Based on Pseudo Lagrangian Formulation申 英 溟*
Shin, Young Shik

Abstract

A totally, new approach of Lagrangian formulation named 'Pseudo Lagrangian Formulation(PLF)' for large deformation analysis of continue and structures by the finite element method has been presented, and the efficiency and accuracy of nonlinear analysis beam element formulated by PLF has been discussed by solving several numerical examples. In PLF, the deformation of a body is measured by assigning a nonphysical 'Pseudo' configuration as reference. The Lagrangian deformation and the finite element mapping of the traditional Lagrangian approaches are then carried out directly at the same time. The result of numerical tests shows superior performance of PLF to the traditional Lagrangian methods. Applications of PLF to small and finite deformation problems indicate that PLF not only serves as an alternative but has certain implementational advantages over total or updated Lagrangian formulations.

要 旨

本 研究에서는 從來의 一般의 非線形 解析 方法인 Lagrangian方法을 改善한 새로운 Pseudo Lagrangian方法에 의한 幾何學的 非線形 要素의 정식화(Formulation)과정을 提示하고 例題解析을 통한 大變形 解析結果를 考察하여 Pseudo Lagrangian方法에 의한 要素의 大變形 解析의 妥當性과 正確度를 檢證하였다. Pseudo Lagrangian方法에서는 變形前 또는 變形後의 狀態를 基準으로 變形을 나타내는 Total Lagrangian方法과는 달리 어떠한 物理的인 意味가 없는 任意의 Pseudo(假想)變形狀態를 基準으로 變形을 나타낸다. 有限要素法에 의한 非線形 解析時 一般의 Lagrangian方法은 各 構造要素에 대한 有限要素 Mapping과 變形 Mapping을 따로 遂行하여야 하는데 비하여 Pseudo Lagrangian方法에서는 한번의 直接的인 Mapping으로 構造要素의 變形狀態를 나타낸다. 例題分析 結果는 이 PLF方法에 의한 非線形 정식화가 從來의 Lagrangian方法보다 適用性이 良好하며 誘導過程이 簡便함을 보여 주고 있으며 PLF方法에 의한 要素의 非線形 解析이 매우 正確한 結果를 나타내고 있음을 立證하고

* 正會員 · 嶺南大學校 工科大學 土木工學科 副教授

1. 序 論

그동안 連續體 및 構造體의 非線形 解析에 관한 많은 연구가 遂行되어 왔으나 初期值 問題 및 境界值 問題의 複雜性 때문에 正確한 解析의 인 해를 구하는 것이 거의 不可能하여 대부분 數值解析에 의한 近似解法으로 解析함이 普遍化되었다. 最近에는 高性能 컴퓨터의 出現으로 보다 正確한 非線形 解析이 可能하게 되어 有限要素法 등에 의한 材料學的 및 幾何學的 非線形 問題에 관한 연구가 매우 활발하며 이러한 非線形 問題에 대한 대부분의 연구는 주로 실제 問題에의 適用이 容易하고 보다 精確한 解析結果를 얻기 위한 效率的인 非線形 정식화 方法과 非線形 有限要素의 開發에 集中되어 있다.

工學的인 非線形 問題의 解析은 初期의 變形前 狀態를 基準으로 變形을 나타내는 TLF方法(Total Lagrangian Formulation)과 現在의 變形狀態를 基準으로 구하고자 하는 狀態의 變形을 나타내는 ULF方法(Updated Lagrangian Formulation)으로 遂行하는 것이 一般的이다. 이러한 Lagrangian 方法^(1, 2, 3)에서는 隣接한 두개의 變形狀態에 대하여 假想일의 定理을 適用하여 線形화된 支配方程式을 誘導하고 變形前 狀態에서 變形後의 狀態로의 變形 Mapping과 원래의 構造要素에서 基準狀態의 各各의 要素로의 有限要素 Mapping을 遂行하여 非線形 問題를 解析하게 된다.

TLF와 ULF方法은 材料의 性質이 같다면 理論的으로는 同一한 結果를 나타낸다고 알려져 있으나 Duphis⁽⁴⁾등과 Stricklin⁽⁵⁾등은 TLF와 ULF의 比較研究에서 同一한 結果를 얻지 못하였으며 ULF가 TLF에 비하여 適用範圍의 制限과 複雜한 計算過程을 包含하고 있다고 發表한 바 있다. 이러한 ULF의 短點들은 그 후 Bathe⁽⁶⁾등과 Powell⁽⁷⁾등에 의하여 改善되었는데 이들의 非線形 정식화는 非線形 連續體 力學에 바탕을 두고 있는 假想일의 定理에 의하여 誘導되었다. 그러나 이러한 정식화에서는 運動增分方程式을 線形化시키는 過程이 不必要하게 複雜하였는바 Frey⁽⁸⁾등은 이러한 不완전 線形

化過程의 短點을 보완하였다. 이 정식화는 마지막 段階의 增分方程式이 5개의 서로 다른 剛性度項을 包含하고 있을 뿐 아니라 增分 荷重벡터는 變位에 從屬의이라는 短點과 複雜性을 內包하고 있다. 1982年 Kanok-Nukulchal⁽⁹⁾는 Kegeration 技法으로 連續體 및 構造體의 靜的, 動的 非線形 解析에 適用할 수 있는 간편한 TLF方法을 提案하였다. 이 方法에서는 3次元 非線形 支配方程式을 非線形 連續體 力學으로부터 誘導하며 여기에 Galerkin加重 殘差法을 適用하여 支配方程式의 정식화를 얻고 있다. 또한 1983年 Yamatuchi⁽¹⁰⁾는 앞에 언급한 一般의인 Lagrangian方法들의 短點을 補完한 새로운 정식화 方法을 提案하였다.

1984年 Wong⁽¹¹⁾등은 Yamaguchi의 非線形 정식화를 發展시킨 Pseudo Lagrangian Formulation(PLF)을 提案한 바 있다. 이 PLF方法은 一般의인 Lagrangian方法과 달리 全體 變形過程內의 任意的 假想(Pseudo) 變形狀態를 基準으로 減少시켜 주므로 TLF나 ULF方法보다 簡便하고 效率的인 方法으로 알려져 있다.

따라서 본 연구에서는 아무런 物理的인 의미를 갖지 않는 任意的 假想 變形狀態를 基準狀態로 變形을 表示하는 PLF方法에 의한 非線形 정식화를 提示하고 이러한 PLF方法에 의한 要素의 大變形 解析을 研究하여 PLF方法에 의한 非線形 解析의 正確도와 效率性을 考察하고자 한다. 非線形 支配方程式은 連續體로부터 Degeneration技法으로 誘導하며 이러한 非線形 方程式은 Newton-Raphson方法으로 線形化하여 푼다. 또한 보의 變形은 任意的 假想變形狀態를 基準으로 有限要素法으로 離散化하여 나타나며 모든 積分은 有限의 副領域(Subdomain)에 대한 積分變換을 통하여 遂行한다. 線形 및 非線形 問題에 대한 여러가지 例題를 解析하여 그 結果를 既存의 解析의 인 해와 다른 方法에 의한 해와 比較 考察한다.

2. 大變形 要素의 Pseudo Lagrangian Formulation

2.1 PLF모드의 Kinematics

PLF方法에 의한 非線形 정식화에는 모든 Kinematic變數나 量을 任意的 假想變形狀態를 基準으로 하는 PLF모드로 表示하게 되는데 Cartesian座標系 ξ 로 나타내는 原來要素의 Pseudo變形狀態 \bar{B} 에서 變形前 狀態 B_0 또는 變形後의 狀態 B_t 로의 變形 Mapping은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\underline{X} = \underline{X}(\xi, t) \quad (1)$$

$$\underline{x} = \underline{x}(\xi, t) \quad (2)$$

여기서, \underline{X} 와 \underline{x} 는 각각 變形前 狀態와 變形後 狀態를 나타내기 위한 Cartesian座標系이다. 각각의 變形 Mapping에 대한 Pseudo變形 Gradient를 다음과 같이 定義하면

$$f_{i\alpha} = \partial x_i / \partial \xi_\alpha = x_{i,\alpha} \quad (3)$$

$$F_{i\alpha} = \partial X_i / \partial \xi_\alpha = X_{i,\alpha} \quad (4)$$

따라서 變形狀態間의 Mapping을 통하여 ξ 座標系는 \underline{X} 座標系 대신 要素의 變形과 運動을 나타내는 基準座標계의 役割을 하게 된다. 이러한 假想基準座標系 ξ 로서 要素內의 任意的 質點의 運動을 나타내면 다음과 같이 된다.

$$x_i(\xi, t) = \delta_{ij} X_j(\xi, t) + d_i + u_i(\xi, t) \quad (5)$$

여기서 ξ 는 \underline{X} 와 \underline{x} 사이의 Grtesian shifter, d 는 \underline{X} 의 原點에서의 位置벡터이고 u 는 B_0 에서 B_t 로의

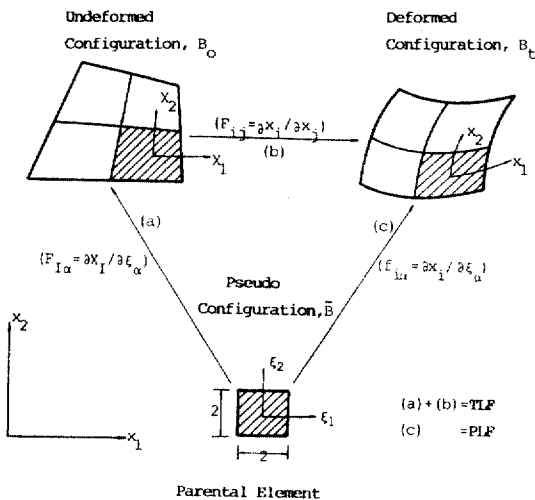


그림 1. Comparison of deformation mapping between PLF and TLF

質點의 變位를 나타낸다.

要素內의 變形을 나타내기 위하여 Pseudo 變形度 텐서 \bar{E} 를 定義하면

$$\bar{E}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (x_{i,\alpha} x_{i,\beta} - X_{i,\alpha} X_{i,\beta}) \quad (6)$$

또는

$$\bar{E}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (f_{i\alpha} f_{i\beta} - F_{i\alpha} F_{i\beta}) \quad (7)$$

이 되며 Green 變形도 텐서 E_{ij} 와의 관계는 다음과 같은 텐서 變換으로 나타낼 수 있다.

$$\bar{E}_{\alpha\beta} = X_{i,\alpha} X_{i,\beta} E_{ij} \quad (8)$$

2.2 PLF모드의 運動方程式

變形後의 狀態 B_t 에서의 運動量 平衡方程式은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{B_t} \rho_i u_i dv \right) = \int_{B_t} \rho_i b_i dv + \int_{\partial B_t} t_i da \quad (9)$$

여기서 b_i 는 體力벡터, t_i 境界表面 ∂B_t 에 作用하는 表面力이다. 그리고 ρ_i 는 B_t 狀態에서의 質量密度로서 質量保存의 法則(ρ_i/J_i : J_i 는 B_0 에서 B_t 동안의 運動에 대한 變形 Gradient의 Determinant)으로 부터 구해진다. (9)식을 PLF모드로 나타내기 위하여 \underline{X} 座標系에 대한 第1, 第2 Piola-Kirchhoff應力텐서와 같은 2개의 應力텐서를 ξ 座標系에 대하여 導入하여야 한다. 第1 假想應力텐서 $\bar{P}_{\alpha i}$ 를 變形된 狀態의 單位面積 x_i 방향으로 作用하는 힘으로 定義하면

$$\bar{P}_{\alpha i} = \sigma_{ij} \bar{J}_i \partial \xi_\alpha / \partial x_j \quad (10)$$

여기서 σ_{ij} 는 Cauchy應力이고 $\bar{J} = \det(\bar{f}) = \det(\partial x_i / \partial \xi_\alpha)$ 이다.

그리고 第2 假想應力텐서 $\bar{S}_{\alpha\beta}$ 를 다음과 같이 定義하면

$$\bar{S}_{\alpha\beta} = \bar{P}_{\alpha\beta} \pm \partial \xi_\alpha / \partial x_i = \sigma_{ij} \bar{J}_i (\partial \xi_\alpha / \partial x_j) (\partial \xi_\beta / \partial x_i) \quad (11)$$

으로 되며 \bar{S} 와 \bar{E} 의 관계는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{S}_{\alpha\beta} = \bar{\rho} (\partial \psi / \partial \bar{E}_{\alpha\beta}) \quad (12)$$

여기서, Ψ 는 변형에너지 함수이고 $\bar{\rho} = \rho_0 \bar{J}_0$ 이다. 앞에서 설명한 PLF모드의 Kinematic變數들을 이용하여 (9)식을 PLF모드로 나타내면 다음과 같다.

$$(\bar{f}_{i\alpha} \bar{S}_{\beta\alpha})_{,\beta} + \bar{\rho} b_i - \bar{\rho} \ddot{u}_i = 0 \quad (13)$$

또한 表面力 經界條件은

$$\bar{T}_i = f_{i\beta} \bar{N}_\alpha \quad (14)$$

여기서 \bar{S} 는 Pseudo應力텐서, \bar{N} 는 經界表面에 작용하는 單位벡터이다.

이와같이 PLF모도로 나타내어진 運動量 平衡方程式, 應力-變形度 關係, 變位-變形度 關係와 初期條件 및 境界條件들은 初期值 問題를 이루게 되며 이러한 初期值 問題는 假想일의 定理나 Galerkin加重殘差法을 이용한 有限要素法으로 解析함이 一般的이다.

23 PLF모드의 應力-變形度 關係

PLF모드에서 Pseudo應力과 Pseudo變形度間的 關係는 앞의 (12)식과 같이 나타내어진다. 便宜上 4階 Pseudo彈性텐서를 利用하면

$$\bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \bar{S}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{E}_{\gamma\delta}} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{S}_{\alpha\beta} \partial \bar{E}_{\gamma\delta}} \quad (15)$$

(15)식의 Pseudo彈性텐서는 (8)식과 (11)식을 利用하여 一般的인 4階 彈性텐서 C_{ijkl} 으로부터

X : Material Coordinates
 x : Spatial Coordinates
 r, s : Natural Coordinates

●: Reference Nodes (1,2,3)
 ○: Relative Nodes (4,5,6)

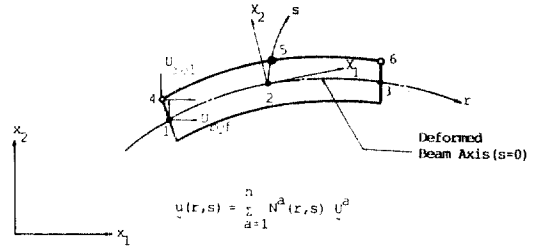


그림 2. Six-nods nonlinear degenerated beam element

다음과 같이 計算한다.

$$\bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \bar{J}_0 \xi_\alpha \xi_\beta \xi_\gamma \xi_\delta \kappa_{\xi\delta}^{-1} C_{ijkl} \quad (16)$$

여기서 $\bar{J}_0 = \det(\bar{F}) = \det(\partial X_i / \partial \xi_\alpha)$

表 1에는 TLF, ULF 및 PLF모드에서의 變形을 支配하는 여러가지 式들에 대한 比較가 說明되어 있다. 또한 그림 2는 본 연구에서 誘導할 6節點 非線形 보要素의 形態를 보여주고 있다.

3. 非線形 보要素에의 適用

3.1 運動方程式의 離散化

앞에서 설명한 PLF방법은 連續體로부터 非線形 舉動을 하는 連續體 要素를 誘導하는 效率的인 方法이다. PLF方法에는 運動量 平衡方程式, 應力-

표 1. Equations governing the deformed body in the three modes of description.

Item	Spatial Coordinates x (ULF)	Material Coordinates X (TLF)	Natural Coordinates ξ (PLF)
Motion of the body	x_i	$x_i(X, t) = \delta_i X_i(X, t) + d_i + u_i(X, t)$	$x_i(\xi, t) = \delta_i X_i(\xi, t) + d_i + u_i(\xi, t)$
Deformation Measurement	Almansi's strain tensor $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - \frac{\partial X_i \partial X_j}{\partial x_i \partial x_j})$	Green's strain tensor $E_{ij} = \frac{1}{2} (\frac{\partial x_i}{\partial X_i} \frac{\partial x_j}{\partial X_j} - \delta_{ij})$	Pseudo strain tensor $\bar{E}_{ij} = \frac{1}{2} (\frac{\partial X_i}{\partial \xi_i} \frac{\partial X_j}{\partial \xi_j} - \frac{\partial X_i}{\partial \xi_i} \frac{\partial X_j}{\partial \xi_j})$
Constitutive law	$C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}}$	$C_{ijkl} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}}$	$\bar{C} = \frac{\partial \bar{S}_{ij}}{\partial \bar{E}_{ij}}$
Balance of linear momentum	$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0$	$(S_{ij} F_{j,i})_{,i} + \rho b_i - \rho \ddot{u}_i = 0$	$(\bar{E}_{ij} f_{j,i})_{,i} + \bar{\rho} b_i - \bar{\rho} \ddot{u}_i = 0$
Boundary traction	$t_i = \sigma_{ij} n_j$	$T = F_{ij} S_{ij} N_j$	$\bar{T}_i = f_{i\beta} \bar{S}_{\beta\alpha} \bar{N}_\alpha$

變形度關係, 變位-變形度관계와 初期 및 境界條件들은 初期 境界值 問題를 形成하게 되는데, 大變形 舉動을 하는 非線形 要素를 誘導하기 위하여 變形後의 狀態가 B인 連續體 要素를 생각하면 (13)式과 (14)式에 Galerkin 加重殘差法을 適用시켜 하나의 要素에 대한 Weak-form 方程式을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$G^e(u, \eta) = \int_{\bar{v}} \{ (\bar{S}_{\alpha\beta} f_{i\beta})_{, \alpha} + \bar{\rho} b_i - \bar{\rho} \dot{u}_i \} \eta_j d\bar{v} + \int_{\bar{a}} \bar{S}_{\alpha\beta} f_{i\beta} \bar{N}_{\alpha} - \bar{T}_i \eta_j d\bar{a} = 0 \quad (17)$$

여기서 η 는 u 와 같은 벡터空間을 갖는 加重函數이다. 위 式에 Gauss-Green定理을 利用하고 部分積分을 遂行하면 (17)式의 Canonical form은

$$G^e(u, \eta) = \int_{\bar{v}} \bar{S}_{\alpha\beta} f_{i\beta} \eta_{, \alpha} + d\bar{v} b_i - \int_{\bar{v}} \bar{\rho} (b_i - \dot{u}_i) \eta_j d\bar{v} - \int_{\bar{a}} \bar{T}_i \eta_j f_i d\bar{a} = 0 \quad (18)$$

變位函數 u 와 加重函數 η 가 要素境界에 대한 連續條件을 만족한다면 全體 시스템에 대한 Galerkin 函數는 各 要素의 Galerkin 函數의 總和로 쓸 수 있다.

$$G(u, \eta) = \sum_e G^e(u, \eta) \quad (19)$$

Isoparametric要素인 경우 變位函數 u 와 座標 x 는 同一한 形狀函數를 利用하여 各各의 節點값 U^a 와 X^a 로 나타낼 수 있다.

$$u = \sum_a N^a(\xi) U^a \quad (20)$$

$$x = \sum_a N^a(\xi) X^a \quad (21)$$

또한 加重函數 η 에도 Galerkin加重殘差法을 適用시키면 η 도 節點값 H^a 로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\eta = \sum_a N^a(\xi) H^a \quad (22)$$

따라서 (20), (21), (22)式을 (18)式에 代入하여 整理하면 다음과 같은 PLF모드의 Galerkin函數를 얻을 수 있다.

$$G(U, H) = \sum_a \sum_b H^b (M^{ba} U^a + K^b - R^b) \quad (23)$$

여기서 要素內力벡터, 要素質量매트릭스 및 要素外力벡터는 각각 다음과 같다.

$$K^b = \int_{\bar{v}} \bar{S}_{\alpha\beta} f_{i\beta} N^b d\bar{v} \quad (24)$$

$$M^{ba} = \int_{\bar{v}} \bar{\rho} N^a N^b d\bar{v} \delta_i \quad (25)$$

$$R^b = \int_{\bar{v}} \bar{T}_i N^b d\bar{a} + \int_{\bar{v}} \bar{\rho} b_i N^b d\bar{v} \quad (26)$$

여기서 上部添字는 節點, 下部添字는 座標를 나타낸다. (19)式에 의하여 각각의 要素들의 Galerkin 函數를 組合하면 全體 시스템에 대한 Galerkin 函數는

$$G(U, H) = H^T (MU + K(U) - R) = 0 \quad (27)$$

그런데 H 는 任意的 값이므로 위 式을 整理하여 다시 쓰면 節點變位 U 로 나타내는 다음과 같은 離散化된 運動方程式을 얻을 수 있다.

$$MU + K(U) - R = 0 \quad (28)$$

3.2 內力벡터의 線形化

(28)式에서 慣性力項을 除去하면 (28)式은 다음과 같은 非線形 類似靜的 問題의 支配方程式으로 쓸 수 있다.

$$K(U) - R = 0 \quad (29)$$

여기서 內力벡터 $K(U)$ 는 變位 U 의 非線形 函數이므로 이러한 非線形 方程式을 풀기 위해서는 非線形項인 $K(U)$ 를 U 에 대하여 線形化 하여야 한다. 一般的인 非線形 方程式의 線形化는 다음과 같은 式으로부터 任意的 變位 U^0 에 대한 接線剛性도를 구하여 이에 대응하는 變位增分 ΔU^0 을 계산하고 다음 荷重段階의 U^0 를 구하는 過程을 反復한다.

$$DK(U^0) \Delta U^0 = R_n - K(U^0) \quad (30)$$

(30)式의 $DK(U^0)$ 은 m 번째 荷重段階에 對應하는 變位, U^0 에 대한 接線 剛性도 매트릭스로서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$DK^b(U^0) = \frac{\partial K^b}{\partial U^a} \Big|_{U=U^0} \quad (31)$$

變位增分 ΔU^0 은 위 式으로부터 計算되며 다음 荷重段階의 變位 U^0 를 計算하는데 利用된다. (24)式을 (31)式에 代入하여 整理하면 要素接線剛性도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$DK_{ij}^b(U^a) = \int_{\bar{B}} \left(\frac{\partial \bar{S}_{ij}}{\partial U^a} F_{ij} N^b_{,a} + \bar{S}_{ij} \frac{\partial \bar{F}}{\partial U^a} N^b_{,a} \right) d\bar{v} \quad | \quad \bar{U} = U^a \quad (32)$$

그런데 (3), (5)식과 (20)식으로부터 f_{ij} 는

$$f_{ij} = \sum_{\alpha} N^a_{,i} (x^a + U^a) \quad (33)$$

이 되므로 (33)식에 連續法則 $\partial \bar{S}_{ij} / \partial U^a = (\partial \bar{S}_{ij} / \partial \bar{E}_{ij}) (\partial \bar{E}_{ij} / \partial U^a)$ 을 利用하고 (7), (15)식 및 (33)식을 代入하여 整理하면 接線剛性度매트릭스 DK 는 다음과 같이 나타내어진다.

$$DK^b(U) = \int_{\bar{B}} \{ f_{ij} (UN^b_{,ij}) \} \{ \bar{C}_{\alpha\beta\gamma} \} \{ f_{\alpha} (U) N^b_{,\gamma} \} d\bar{v} + \int_{\bar{B}} \delta_{ij} N^b_{,i} \bar{S}_{ij} N^b_{,j} d\bar{v} \quad (34)$$

여기서 (34)식의 右邊의 첫번째 項은 有限運動의 影響, 그리고 두번째 項은 初期應力の 影響을 意味하며 $\bar{C}_{\alpha\beta\gamma}$ 는 (15)식과 (16)식의 應力-變形度 關係에서 구할 수 있다. 表 2는 TLF, ULF 및 PLF모드에서의 要素 매트릭스들을 比較한 것이다.

3.3 應力-變形度 關係

一般的인 2次元 보의 應力-變形度 關係를 行列의 形態로 나타내면 다음과 같다.

$$S = CE \quad \text{또는} \quad \begin{matrix} S_{11} & & \bar{\lambda} + 2\mu \bar{\lambda} 0 & E_{11} \\ S_{22} & = & \bar{\lambda} \bar{\lambda} + 2\mu 0 & E_{22} \\ S_{21} & & 0 \ 0 \ \mu & E_{12} \end{matrix} \quad (35)$$

(16)식을 利用하면 (35)식의 C 에 對應하는 Pseudo 彈性텐서 $\bar{C}_{\alpha\beta\gamma}$ 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{C} = \bar{J} \cdot \begin{matrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} \\ \bar{C}_{31} & \bar{C}_{32} & \bar{C}_{33} \end{matrix} \quad (36)$$

여기서

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} &= (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 (\bar{\lambda} + 2\mu) \\ \bar{C}_{11} = \bar{C}_{21} &= (\xi_1^2 + \xi_2^2) (\xi_1^2 + \xi_2^2) \bar{\lambda} + (\xi_{1.1} \xi_{2.1} + \xi_{1.2} \xi_{2.2})^2 2\mu \\ \bar{C}_{22} &= (\xi_1^2 + \xi_2^2) (\bar{\lambda} + 2\mu) \\ \bar{C}_{13} = \bar{C}_{31} &= (\xi_1^2 + \xi_2^2) (\xi_{1.1} \xi_{2.1} + \xi_{1.2} \xi_{2.2}) (\bar{\lambda} + 2\mu) \\ \bar{C}_{23} = \bar{C}_{32} &= (\xi_1^2 + \xi_2^2) (\xi_{1.1} \xi_{2.1} + \xi_{1.2} \xi_{2.2}) (\bar{\lambda} + 2\mu) \\ \bar{C} &= (\xi_{1.1} \xi_{2.1} + \xi_{1.2} \xi_{2.2})^2 \bar{\lambda} + \{ (\xi_1^2 + \xi_2^2) (\xi_1^2 + \xi_2^2) + (\xi_{1.1} \xi_{2.1} + \xi_{1.2} \xi_{2.2})^2 \} \mu \end{aligned}$$

여기서 $\xi_{m.1} = \partial \xi_m / \partial X_1$ 이고 $\bar{\lambda}$ 이고 $\bar{\lambda}$ 는 Lamé의 常數이다.

3.4 數値積分

(29)식을 Newton-Raphson方法으로 풀기 위해서는 荷重段階마다 구하고자 하는 해가 충분히 收斂될 때까지 數値積分과 더불어 反復計算을 遂行하여야 한다. 따라서 非線形 解析 問題에서는 해의 正確성에 못지 않게 計算量을 減少시키는 問題가 매우 중요하다. 本 研究에서는 방대한 計算量을 줄이고 數値積分의 正確度를 위하여 Gauss積分法에 의한 選擇的 減差積分을 遂行한다. 이러한 選擇的 減差積分을 위하여 (24)식의 內力벡터와 (34)식의 接線剛性度를 다음과 같이 行列의 形態로 나타내어 Decomposition시킨다.

$$K^b = \int_{\bar{B}} f_{ij} \bar{S} \nabla N^b d\bar{v} \quad (37)$$

$$DK^b = \int_{\bar{B}} (B^b)^T C B^b d\bar{v} + \int_{\bar{B}} (\nabla N^b)^T \bar{S} \nabla N^b d\bar{v} \quad (38)$$

여기서 各各의 行列의 $(\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3)$ 座標系 대신 (r, s, t) 의 自然座標系를 利用하여 나타내면

표 2. Element characteristics in TLF, ULF and PLF

Item	Internal force vector, K^b	Generalized force vector, R^b	Tangent stiffness, DK^b
TLF	$\int_{B_0} S_{ij} F_{ij} N^b_{,a} dV$	$\int_{B_0} T_j N^b dA + \int_{B_0} \rho^a d_j N^b dV$	$\int_{B_0} (F_{ij} N^b_{,i} \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{KL}} N^a_{,k} + \delta_{ij} N^b_{,i} S_{ij} N^a_{,j}) dV$
ULF	$\int_{B_0} \sigma_{ij} N^b_{,i} dV$	$\int_{B_0} \bar{T}_j N^b da + \int_{B_0} \rho_b b_j N^b dV$	$\int_{B_0} (\frac{\partial S_{Kj}}{\partial E_{ij}} + \sigma_{ij}) N^b_{,i} N^a_{,k} dV$
PLF	$\int_{\bar{B}} \bar{S}_{ij} f_{ij} N^b_{,a} d\bar{v}$	$\int_{\bar{B}} \bar{T}_j N^b d\bar{a} + \int_{\bar{B}} \bar{\rho}_b b_j N^b d\bar{v}$	$\int_{\bar{B}} (f_{ij} N^b_{,i} \frac{\partial \bar{S}_{ij}}{\partial E_{\alpha\beta\gamma}} N^a_{,\alpha} + \delta_{ij} N^b_{,i} \bar{S}_{ij} N^a_{,j}) d\bar{v}$

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{rr} & \bar{S}_{rs} & \bar{S}_{rt} \\ \bar{S}_{sr} & \bar{S}_{ss} & \bar{S}_{st} \\ \bar{S}_{tr} & \bar{S}_{ts} & \bar{S}_{tt} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} x_{,r} & x_{,s} & x_{,t} \\ y_{,r} & y_{,s} & y_{,t} \\ z_{,r} & z_{,s} & z_{,t} \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\nabla \bar{N}^b = \begin{pmatrix} N^b_{,r} \\ N^b_{,s} \\ N^b_{,t} \end{pmatrix}$$

$$B^a = \begin{bmatrix} f_{11}N^a_{,r} & f_{21}N^a_{,r} & f_{31}N^a_{,r} \\ f_{12}N^a_{,r} & f_{22}N^a_{,r} & f_{32}N^a_{,r} \\ f_{13}N^a_{,r} & f_{23}N^a_{,r} & f_{33}N^a_{,r} \\ f_{11}N^a_{,s} + f_{12}N^a_{,t} & f_{21}N^a_{,s} + f_{22}N^a_{,t} & f_{31}N^a_{,s} + f_{32}N^a_{,t} \\ f_{12}N^a_{,t} + f_{13}N^a_{,s} & f_{22}N^a_{,t} + f_{23}N^a_{,s} & f_{32}N^a_{,t} + f_{33}N^a_{,s} \\ f_{13}N^a_{,r} + f_{14}N^a_{,t} & f_{23}N^a_{,r} + f_{24}N^a_{,t} & f_{33}N^a_{,r} + f_{34}N^a_{,t} \end{bmatrix} \quad (42)$$

그리고 \bar{I} 는 단위행렬이다. 그런데 Pseudo 應力 매트릭스는 다음과 같이 휨項과 剪斷項으로 나누어 쓸 수 있다.

$$\bar{S} = \bar{S}_m + \bar{S}_s \quad (43)$$

여기서 $\bar{S}_m = \bar{C}_m \bar{D}_m \bar{S}_m \bar{C}_m$ 이다. 따라서 (37)식과 (38)식의 內力벡터와 接線剛性度 매트릭스는 다음과 같이 휨項과 剪斷項으로 區分하여 쓸 수 있다.

$$K_m^b = \int_B \bar{I} \bar{S}_m \nabla \bar{N}^b d\bar{v} \quad (44)$$

$$K_s^b = \int_B \bar{I} \bar{S}_s \nabla \bar{N}^b d\bar{v} \quad (45)$$

$$DK_m^{ba} = \int_B \bar{I} (B^b)^T \bar{C}_m B^a d\bar{v} + \int_B \bar{I} (\nabla \bar{N}^b)^T \bar{S}_m N^a d\bar{v} \quad (46)$$

$$DK_s^{ba} = \int_B \bar{I} (B^b)^T \bar{C}_s B^a d\bar{v} + \int_B \bar{I} (\nabla \bar{N}^b)^T \bar{S}_s N^a d\bar{v} \quad (47)$$

윗 式의 K 와 DK 는 Gauss積分法을 利用하여 휨項은 Exact積分으로, 剪斷項은 $(2 \times 2 \times 1)$ 積分點을 利用한 減差積分으로 積分하여 計算한다.

4. 例題 解析 및 考察

PLF方法에 의한 幾何學的 非線形 解析의 效率性과 正確性을 檢討하기 爲하여 線形 및 非線形問題에 대한 여러가지 例題를 解析하였다. 例題解析의 結果는 既存의 解析의 解 및 다른 方法에 의한 解와 比較하여 그 結果를 考察하였다. 非線形問題의 解는 Newton-Raphson方法으로 反復計算하여 구하였으며 變位增分の Euclidean norm과 現在 變位の Norm의 比를 收斂條件으로 택하여 FEAP⁽¹²⁾ 프로그램으로 모든 例題를 解析하였다.

표 3. Normalized tip displacements(w) and end rotations(θ) of a cantilever beam subjected to an end point load

Number of elements	Thick beam(h/L=0.5)				Thin beam(h/L=0.001)			
	Exact integration		Reduced integration		Exact integration		Reduced integration	
	w	θ	w	θ	w	θ	w	θ
1	0.9366	1.0000	1.0000	1.0000	0.7500	1.0000	1.0000	1.0000
4	0.9996	1.0000	1.0000	1.0000	0.9844	1.0000	1.0000	1.0000
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9969	1.0000	1.0000	1.0000
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9990	1.0000	1.0000	1.0000

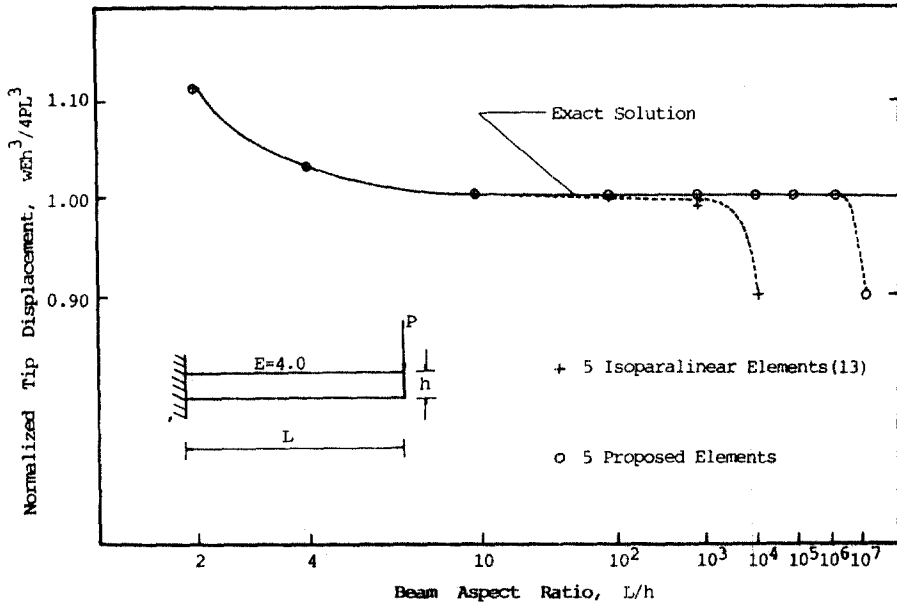


그림 3. Convergence behavior of a cantilever beam subjected to an end point load

4.1 集中荷重을 받는 線形 캔틸레버 보

그림 3에서 보는 바와 같이 自由端에 하나의 集中荷重을 받는 캔틸레버 보를 보의 두께가 두꺼운 경우($h/L=0.5$)와 얇은 경우($h/L=0.001$)에 대하여 解析하였다. 表 3에서 보는 바와 같이 PLF方法에 의한 解는 보의 두께에 關係없이 상당히 正確하여 특히 選擇的 減差積分으로 구한 結果는 하나의 要素만으로도 正確解를 얻을 수 있음을 알 수 있으며 다른 要素들보다도 廣範圍한 h/L 에 대하여 正確解에 대한 收斂성이 良好함을 그림 3에서 보여주고 있다.

4.2 集中荷重을 받는 두꺼운 非線形 캔틸레버 보

그림 4에서 보는 바와 같은 두꺼운 非線形 캔틸레버 보를 解析하여 Bisshopp⁽¹⁴⁾에 의한 解析的인 解 및 Bathe⁽¹⁵⁾등에 의한 有限要素 解와 比較하였다. a/h 는 2이고 보의 3개의 要素로 分割하여 荷重 段階마다의 自由端의 처짐을 구하였다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이 同一한 數의 要素를 使用하여 解析한 경우 Bathe 등의 有限要素 解보다 PLF方法에 의한 解가 Bisshopp의 解析的인 解에 近接한 結果를 보여주고 있으며 보다 많은 數의 要素로 分割하여 解析하면 解析的인 解와 거의 一致할 것임을 알 수 있다.

4.3 集中荷重을 받는 얇은 非線形 캔틸레버 보

그림 5에서 보는 바와 같은 얇은($L/h=300$) 캔틸레버 보를 3개와 8개의 要素로 分割하여 大變形 解析을 遂行하였다. 이 問題의 正確解는 最近 橢圓積分에 의하여 解를 구한 Mattiasson⁽¹⁶⁾의 解析的인

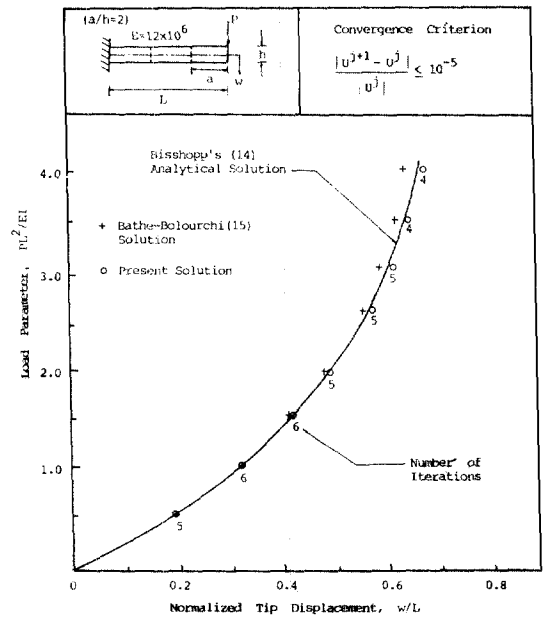


그림 4. Comparisons of load-deflection curves of a thick cantilever beam subjected to a transverse tip load

표 4. Normalized tip displacements of a thin cantilever beam subjected to a transverse tip point load

load $\frac{PL^2}{EI}$	Vertical Displ w/L		Horizontal displ u/L		End Rotation θ (Radian)	
	Analytical ⁽¹⁰⁾	Present	Analytical ⁽¹⁰⁾	Present	Analytical ⁽¹⁰⁾	Present
1.0	0.30712	0.3016	0.05643	0.0564	0.46135	0.4613
2.0	0.49346	0.4931	0.16064	0.1605	0.78175	0.7815
2.5	0.55566	0.5551	0.20996	0.2097	0.89500	0.8948
3.0	0.60325	0.6026	0.25442	0.2540	0.98602	0.9857
3.5	0.64039	0.6396	0.29394	0.2935	1.06012	1.0600
4.0	0.66996	0.6691	0.32894	0.3284	1.12124	1.1210
4.5	0.69397	0.6930	0.35999	0.3593	1.17228	1.1720
5.0	0.71379	0.7027	0.38763	0.3869	1.21537	1.2151
5.5	0.73042	0.7293	0.41236	0.4116	1.25211	1.2519
6.0	0.74457	0.7433	0.43459	0.4337	1.28370	1.2834
6.5	0.75676	0.7554	0.45468	0.4538	1.31107	1.3108
7.0	0.76737	0.7660	0.47293	0.4720	1.33496	1.3347
7.5	0.77670	0.7752	0.48957	0.4885	1.35593	1.3558
8.0	0.78498	0.7834	0.50483	0.5037	1.37443	1.3742

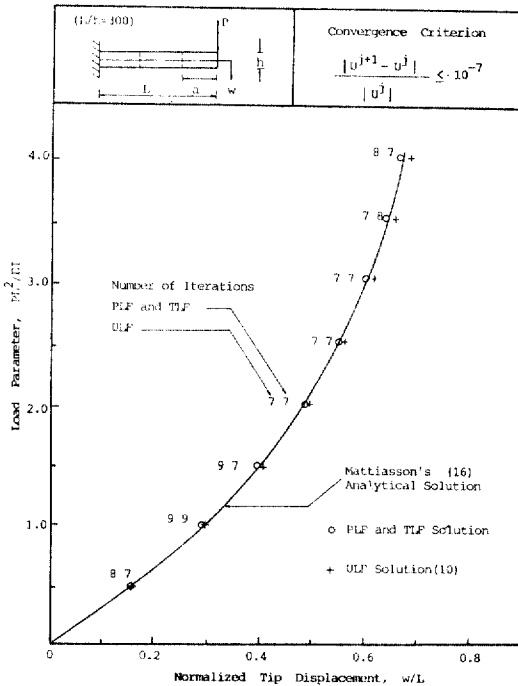


그림 5. Comparisons of load-deflection curves of a thin cantilever beam subjected to a transverse tip load

解로 택하였다. 그림 5에서 알 수 있는 바와 같이

3개의 요소로 分割하여 PLF方法으로 구한 解는 TLF方法으로 구한 解와 一致하였으며 ULF方法으로 구한 解보다 解析的인 解에 近接하고 있다. 또한 보를 8개의 요소로 分割하여 分析한 結果는 表 4에서 보는 바와 같이 PLF方法에 의한 解가 Mattiasson의 解析的인 解에 비하여 큰 誤差없이 比較的 正確한 結果를 나타내고 있음을 알 수 있다. 이러한 結果를 얻는데는 하나의 荷重段階에서 大개 7회의 反復計算이 要求되었다.

5. 結 論

本 研究에서는 從來의 一般的인 Lagrangian方法과는 달리 任意의 假想 變形狀態를 基準으로 構造體의 變形을 나타냄으로써 變形Mapping과 有限要素 Mapping을 同時에 한번의 Mapping으로 遂行하여 정식화 過程과 計算을 보다 簡便하게 하는 새로운 PLF方法으로 幾何學的 非線形 보의 大變形 解析을 遂行하였다. 여러가지 例題를 解析하여 이러한 PLF方法에 의한 보의 非線形 解析의 效率성과 正確性を 考察한 結果를 要約하면 다음과 같다.

(1) PLF方法에 의한 보要素를 誘導하여 보의 線形 解析을 遂行한 結果 選擇的 減差積分을 使用하면 하나의 要素만으로도 正確한 解를 얻을 수 있었으

며 보의 두께에 關係없이 넓은 h/L 의 範圍에서 正確性에 대한 收斂性이 매우 良好하게 나타났다.

(2) PLF方法으로 두께가 두꺼운 보와 얇은 보의 大變形 解析을 遂行한 結果 PLF方法에 의한 解는 從來의 TLF 및 ULF方法에 의한 解보다 正確함을 보여주었으며 다른 有限要素들의 解보다도 解析의 正確解에 近接한 結果를 보여주었다.

따라서 이러한 例題 解析 結果는 非線形 정식화 과정이 簡便하고 反復計算이 많지 않은 PLF方法의 優秀性和 效率性을 立證하고 있는 바 앞으로 이러한 PLF方法에 의한 連續體 및 構造體의 靜的 및 動的 非線形 解析에 廣範圍하게 利用될 수 있을 것으로 判斷된다.

謝 辭

本 研究는 韓國科學財團의 1989年度 基礎研究費 支援로 遂行되었기에 同財團에 깊은 感謝의 뜻을 표하는 바이다.

參 考 文 獻

1. J.T. Oden, *Finite Elements of Nonlinear Continua*, McGraw-Hill (1972)
2. W. Kanok-Nukulchai, R.L. Taylor and T.J.R. Hughes, "A large deformation formulation for shell analysis by the finite element method", *Comp. Str.*, 13, 19-27 (1981)
3. 申英滉, "2次元 보 有限要素의 非線形 解析", *大韓土木學會 論文集*, 4(3), 53-61(1984)
4. G.A. Duphis, H.D. Hibitt, S.F. McNamara and P. V. Marcal, "Nonlinear material and geometric behaviour of shell structures", *Comp. Str.*, 1, 233-239 (1971)
5. J.A. Strickin, W.A. Von Riesmann, J.H. Tillerson and W.E. Haisler, "Static geometric and material nonlinear analysis" in *Advances in Computational Method in Structural Mechanics and Design*, Univ. of Alabama Press, 301-324 (1972)
6. K.J. Bathe, E. Ramm and E.L. Wilson, "Finite element formulations for large deformation dynamic analysis", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 9, 353-386 (1975)
7. G.H. Powell and D.P. Mondkar, "Finite element analysis of nonlinear static and dynamic response", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 11, 499-520 (1977)
8. F. Frey and S. Cescottc, "Some new aspects of

the incremental total Lagrangian description in nonlinear analysis" in *Finite Element in Nonlinear Mechanics*, Univ. of Trondheim (1978)

9. W. Kanok-Nukulchai, "Formulation of degenerated finite elements for large deformation analysis—a unified approach", *Proc. of 8th Australian Conference on Mechanics of Structures and Materials*, Univ. of New Castle, 43.1-43.7 (1982)
10. E. Yamaguchi, "A Lagrangian formulation for elastic and elasto-viscoplastic analysis", M. Eng Thesis, Asian Institute of Technology (1983)
11. W.W. Wong, "Pseudo Lagrangian formulation of large deformation analysis of continua and structures", M. Eng Thesis, AIT (1984)
12. O.C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, 3rd Edn., McGraw-Hill (1977)
13. R.D. Wood and O.C. Zienkiewicz, "Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells", *Comp. Str.*, 7, 725-735 (1977)
14. K.E. Bisshopp and D.C. Drucker "Large deflection of cantilever beams", *Quart. Appl. Math.*, 3, 272-275 (1945)
15. K.J. Bathe and S. Bolourchi, "Large displacement analysis of three dimensional beam structures", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 14, 961-986 (1979)
16. K. Mattiasson, "Numerical results from large deflection beam and frame problems analysis by means of elliptic integrals", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 17, 145-154 (1981)
17. A.C. Eringen, *Continuum Physics*, Vol. I & II, Academic Press (1974)
18. W. Kanok-Nukulchai, A. Hasegawa and F. Nishino, "Generic formulation procedure for large deformation analysis of structural elements", *Proc. JSCE.*, 368/I-5, 53-61 (1986)
19. T.J.R. Hughes and K.S. Pister, "Consistent linearization in mechanics of solids and structures", *Comp. Str.*, 8, 391-397 (1978)
20. O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor and J.M. Too, "Reduced integration technique in general analysis of plates and shells", *Int. J. Num. Eng.*, 3, 275-290 (1971)
21. 申英滉, "高次 板 有限要素의 幾何學의 非線形 解析", *大韓土木學會 論文集*, 8(3), 1-10 (1988)
22. R.W. Ogden, *Non-Linear Elastic Deformations*, Ellis Horwood Press (1984)

(接受: 1990. 5. 14)