

減衰效果를 고려한 非保存力系の 安定性 解析

The Stability Analysis of Non-Conservative System including Damping Effects

金 文 榮 · 張 丞 弼
Kim, Moon Young · Chang, Sung Pil

Abstract

The finite element method for the investigation of the static and dynamic stability of the plane framed structures subjected to non-conservative forces is presented. By using the Hermitian polynomial as the shape function, the geometric stiffness matrix, the load correction stiffness matrix for non-conservative forces, and the matrix equation of internal and external damping are derived. Then, a matrix equation of the motion for the non-conservative system is formulated and the critical divergence and flutter loads are determined from this equation.

要 旨

2절점 유한 요소법을 사용하여 비보존력을 받는 평면뼈대 구조물의 안정성문제를 취급하였다. 포물선 분포를 이루는 축방향력에 대한 기하적인 강도매트릭스, 비보존력의 방향변화를 고려하는 load correction stiffness matrix 그리고 내적 및 외적감쇠효과를 고려하는 감쇠매트릭스들을 산정하고 이들을 고려한 매트릭스 운동방정식을 유도하였다. 이 방정식으로부터 얻어지는 고유치 문제들을 분석하므로써 감쇠하중의 영향이 고려된 비보존력계의 動的 安定성을 조사하였다. 문헌들에서 취급된 예제들의 해석 결과들과 본연구에 의한 결과들을 비교 분석하므로써 본 논문에서 제시한 이론의 정당성을 입증하였다.

1. 序 論

circulatory force를 받는 구조물의 안정성 문제는 정적 불안정 평형상태가 존재하여 정적 좌굴해석으로 취급될 수 있는 divergence system과 정적인 평형상태가 존재하지 않기 때문에 동적인 안정성 해석방법에 의해서만 취급 가능한 flutter sys-

tem으로 나눌 수 있다. 비보존력계의 안정성 문제를 다룬 이제까지의 문헌^(1, 2, 3)들은 주로 해석적인 방법을 사용하여 보의 임계하중 및 안정영역(stability region)을 결정하는 것들이 대부분이었으며, 유한요소법을 이용한 안정성 해석^(4, 5, 6)은 비교적 최근에 이루어졌다. 문헌 6은 유한요소법을 이용하여 linearly distributed non-conservative load를

*정희원 · 서울大學校 工科大學 土木工學科 講師

**정희원 · 서울大學校 工科大學 土木工學科 教授

받는 평면빔대 구조물의 안정성 문제를 해석하였지만 감쇠하중의 영향은 고려하지 못하였다.

본 논문에서는 유한요소법을 이용하여 감쇠하중의 영향을 고려할 수 있는 비보존력계의 안정성 해석이론에 대하여 연구하였다. 이를 위하여 질량매트릭스, 포물선 분포를 이루는 축방향력에 대한 기하적인 강도매트릭스, 그리고 circulatory non-conservative force의 방향변화로 인한 load correction stiffness matrix를 유도하였다. 내적 및 외적감쇠하중 (internal and external damping force)을 운동방정식에 포함시키므로써 감쇠효과를 고려하는 flutter system의 critical flutter load를 구하기 위한 2차고유치문제(quadratic eigen problem)를 취급하였다.

2. 비보존력을 받는 평면빔대의 매트릭스 운동방정식

circulatory linearly distributed load (g)와 재단력들 ($F_1^p, F_2^p, M^p, F_1^q, F_2^q, M^q$)을 받는 평면빔대요소(그림 1)의 운동에너지, 탄성에너지와 축방향력의 포텐셜을 포함하는 포텐셜에너지, 그리고 비보존력(내적 및 외적 감쇠하중과 circulatory force)

이 행한일들을 포함하는 비보존력계의 Hamilton원리⁽⁶⁾는 다음과 같이 표시된다.

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \rho A \cdot (\dot{u} \cdot \delta \dot{u} + \dot{v} \cdot \delta \dot{v}) - (EA \cdot u' \cdot \delta u' + EI \cdot v'' \cdot \delta v'' - F(x) \cdot v' \cdot \delta v') - (\gamma_1 \cdot \dot{u} - \gamma_2 \cdot \dot{u}') \cdot \frac{A}{I} \cdot \delta u - (\gamma_1 \cdot \dot{v} + \gamma_2 \cdot \dot{v}'''' + \alpha \cdot F' \cdot v') \cdot \delta v dx - (F_1^p \cdot \delta u^p + F_2^p \cdot \delta v^p + M^p \cdot \delta \omega^p + F_1^q \cdot \delta u^q + F_2^q \cdot \delta v^q + M^q \cdot \delta \omega^q) dt = 0 \quad (1)$$

$$g(x) = F'(x) = (1-x/L) \cdot P_x^p + x/L \cdot P_x^q$$

$$F(x) = -F_1^p + P_x^p \cdot x + (P_x^q - P_x^p) \cdot x^2/2L$$

여기서, ρ 는 단위 체적당 질량, EI 는 보의 휨강성, $F(x)$ 는 요소 내 x 지점에서의 축력, 그리고 P_x^p 와 P_x^q 는 각각 왼쪽단과 오른쪽단에서 $g(x)$ 의 크기를 나타낸다. α 는 작용점의 변위에 따라 작용 방향이 바뀌는 $g(x)$ 의 방향 변화를 조절하는 파라미터, γ_1, γ_2 는 각각 external 및 internal damping factor를 나타낸다. $(\dot{\quad}) = d(\quad)/dt$, $(\quad)' = d(\quad)/dx$ 를 나타내며, $\langle U_0 \rangle = \langle u^p, v^p, \omega^p, u^q, v^q, \omega^q \rangle$ 는 재단변위벡터이고 $\langle F_0 \rangle = \langle F_1^p, F_2^p, M^p, F_1^q, F_2^q, M^q \rangle$ 는 재단력벡터를 표시한다(그림2 참조).

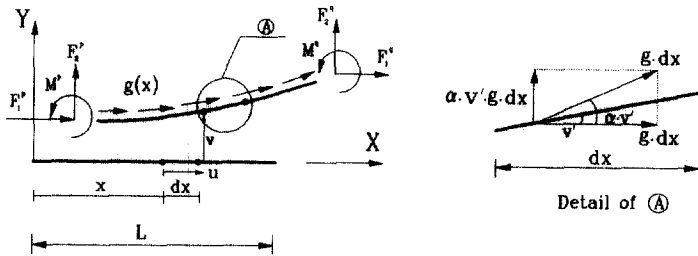


그림 1. Plane frame element subjected to circulatory distributed loads and member forces

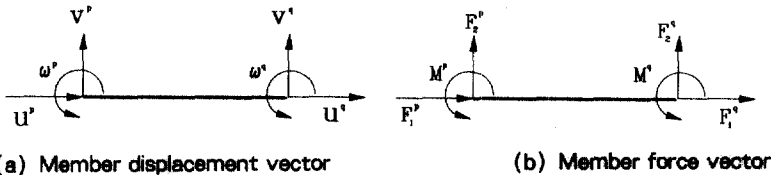


그림 2

평면빔대요소의 부재매트릭스들을 산정하기 위하여 축방향 변위에 대해서는 1차, 휨방향 변위에 대해서는 3차 Hermitian다항식을 식(1)에 대입하여

적분을 행하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \delta U_0 \rangle \cdot [M_0] \cdot \{U_0\} - \langle \delta U_0 \rangle \cdot ([K_0] + [K_0]) \cdot \{U_0\} \quad (2)$$

$$+\langle \delta U_e \rangle \cdot [K^c] \cdot \{U_e\} - \langle \delta U_e \rangle \cdot [C_e] \cdot \{U_e\} - \langle \delta U_e \rangle \cdot \{F_e\} dt = 0$$

식 (2)에서 질량매트릭스 $[M_e]$, 탄성강도 매트릭스 $[K_e]$, 포물선분포를 이루는 축방향력에 대한 기하적인 강도매트릭스 $[K_g]$, 그리고 load correction stiffness matrix $[K^c]$ 들에 대한 자세한 계산결과들을 부록에 제시하였으며 감쇠 매트릭스 $[C_e]$ 는 아래와 같은 계산결과를 얻는다.

$$C_e = r_1 \begin{bmatrix} e_1 & \cdot & \cdot & e_2 & \cdot & \cdot \\ & f_1 & f_2 & \cdot & f_3 & f_4 \\ & & f_5 & \cdot & -f_4 & -f_6 \\ & & & e_1 & \cdot & \cdot \\ \text{Symm} & & & & f_1 & -f_2 \\ & & & & & f_5 \end{bmatrix} + r_2 \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot & -a & \cdot & \cdot \\ & b & c & \cdot & -b & c \\ & & d & b & -c & e \\ & & & a & \cdot & \cdot \\ \text{Symm} & & & & b & -c \\ & & & & & d \end{bmatrix}$$

$$e_1 = L/3 \quad e_2 = L/6 \quad (3)$$

$$f_1 = \frac{156L}{420} \quad f_2 = \frac{22L^2}{420} \quad f_3 = \frac{54L}{420} \quad f_4 = \frac{-13L^2}{420} \quad f_5 = \frac{4L^3}{420}$$

$$f_6 = \frac{3L^3}{420}$$

$$a = A / (I \cdot L) \quad b = 12/L^3 \quad c = 6/L^2 \quad d = 4/L$$

$$e = 2/L \text{이다.}$$

식 (3)에서 $r_1 = \rho A \cdot \beta_1$, $r_2 = EI \cdot \beta_2$ 로 놓으면 감쇠 매트릭스는 다음과 같이 질량매트릭스와 탄성강도 매트릭스의 일차결합으로 나타낼 수 있다.

$$[C_e] = \beta_1 \cdot [M_e] + \beta_2 \cdot [K_e] \quad (4)$$

위와 같이 부재 매트릭스들이 계산되면, 각 매트릭스들을 전체 좌표계로 좌표변환시키고 이들을 직접강도법에 의해서 더하면 다음과 같이 전체 좌표계에 대한 매트릭스 운동방정식을 얻는다.

$$[M] \cdot \{\dot{U}\} + [C] \cdot \{U\} + [K_e + K_g - K^c] \cdot \{U\} = \{F\} \quad (5)$$

여기서, M , C , K_e , K_g , 그리고 K^c 는 각각 전체 좌표계에 대한 질량, 감쇠, 탄성강도, 기하적인 강도매트릭스 load correction stiffness matrix(L. C. S. M)를 나타내며 F 는 절점하중벡터를 의미한다. 그리고 U , \dot{U} , \ddot{U} 는 절점변위, 절점속도, 그리고 절점가속도 벡터를 나타낸다.

K^c 에는 절점에 작용하는 circulatory force에 대한 L. C. S. M를 포함하고 있으며 이에 대한 계산결과들은 문헌 7에 나타나 있다.

3. 평면배대 구조물의 안정성 해석

3장에서는 비보존력계의 임계하중을 산정하는 방법을 고찰한다. 3.1절에서는 divergence system과 감쇠하중이 없는 경우의 flutter system, 3.2절에서는 감쇠하중을 고려하는 경우에 대한 flutter system을 생각한다.

비보존력의 영향으로 강도매트릭스가 비대칭이 되므로 본 논문에서는 이러한 비대칭행렬의 고유치를 일반적으로 구할 수 있는 IMSL의 subroutine들을 사용하였다.

3.1 Divergence System과 Flutter System의 臨界荷重算定法

정적인 불안정 평형상태가 존재하는 경우에 절점속도 및 가속도벡터가 0이므로 관성력과 감쇠하중을 무시하면 식(5)는 다음과 같이 표시된다.

$$[K_E] \cdot \{U\} = P \cdot [K_G - K^c] \cdot \{U\} \quad (6)$$

여기서, P 는 하중파라미터를 나타낸다.

식(6)에서 고유치 (P)를 구하므로써 divergence system의 임계하중을 결정한다.

Flutter System을 해석하기 위해서는 질량매트릭스를 고려해야 하며, 감쇠하중을 무시할 수 있는 경우에 식 (5)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M \cdot \{\ddot{U}\} + [K_E - P \cdot (K_G - K^c)] \cdot \{U\} = 0 \quad (7)$$

$\{U\} = e^{i\omega t} \cdot \{H\}$ 로 놓으면 위식은 아래와 같이 된다.

$$[K_E - P \cdot (K_G - K^c)] \cdot \{H\} = \omega^2 \cdot [M] \cdot \{H\} \quad (8)$$

여기서, ω 는 구조물의 고유진동수를 나타낸다.

flutter system의 경우에 flutter load는 식 (8)의 이중고유치곡선 ($P - \omega^2$ 관계곡선)을 분석하여 구할 수 있다. 즉, 가장 작은 두개의 고유진동수에 대응하는 고유치곡선들이 P 값이 증가함에 따라 가까워져서 서로 만나게 되고 P 값이 더 증가하면 고유진동수가 실수에서 복소수로 변화하는 경계의 P 값으로 결정한다. 가장 작은 flutter load를 산정하는 알고리즘은 다음과 같다.

1) P 의 범위를 $[A_0, B_0]$ 로 설정한다.

여기서, $P = A_0$ 는 식 (8)의 고유주기들이 모두 양일 때의 하중파라미터 값이고 $P = B_0$ 는 가장 작은 두개의 고유주기들이 복소수일 때의 하중파라미터 값이다.

- 2) $C_i = (A_i + B_i)/2$ $i=0, 1, 2, 3, \dots$ 를 계산한다.
- 3) 식 (8)의 P에 C_i 를 대입하여 고유주기를 산정한다.
- 4) 단계 3)에서 계산한 고유주기들 중에서 가장 작은 두개의 고유주기값이 허용오차 범위내에서 같으면 C_i 를 임계하중에 대응하는 P로 결정하고 반복계산을 정지시킨다.
- 4) 고유주기들 중에서 가장 작은 두개의 고유주기값이 복소수이면 $A_{i+1} = C_i$, $B_{i+1} = B_i$ 로 놓고 모두 $\frac{1}{2}$ 보다 크면 $A_{i+1} = A_i$, $B_{i+1} = C_i$ 로 놓는다.
- 5) $[A_{i+1}, B_{i+1}]$ 의 간격이 허용범위보다 작으면 $C_{i+1} = (A_{i+1} + B_{i+1})/2$ 를 임계하중에 대응하는 P로 결정하고 반복계산을 정지시킨다. 만일 $[A_{i+1}, B_{i+1}]$ 의 간격이 허용범위보다 크면 단계 2)로 돌아가서 허용범위보다 작게 될때까지 반복계산한다.

3.2 감쇠하중을 고려한 Flutter System의 臨界荷重 算定法

flutter system에서 감쇠효과를 고려하는 경우에 식(5)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[M] \cdot \{U\} + [C] \cdot \{\dot{U}\} + [K_E - P \cdot (\underline{K}_G - \underline{K}^{NC})] \cdot \{U\} = \{0\} \quad (9)$$

절점속도 벡터 ($V=U$)를 독립변수로 취하면 다음과 같이 변수는 2배로 늘어나지만 1차의 연립미분방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} [M] \cdot \{\dot{U}\} &= +[M] \cdot \{V\} \\ [M] \cdot \{V\} &= -[C] \cdot \{V\} - [K_E + K_S - P \cdot (\underline{K}_G - \underline{K}^{NC})] \cdot \{U\} \end{aligned} \quad (10)$$

$\{U\} = e^{st} \cdot \{R\}$, $\{V\} = e^{st} \cdot \{S\}$ 로 놓으면 윗식은 다음과 같이 된다.

$$\omega \cdot [A] \cdot \{D\} = [B] \cdot \{D\} \quad (11)$$

$$\text{여기서, } [A] = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M' \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & M \\ -K_E - P \cdot (\underline{K}_G - \underline{K}^{NC}) & -C \end{bmatrix}$$

그리고 $\{D\} = \{R, S\}$

식 (11)에서 $[B]$ 매트릭스가 일반적으로 비대칭 행렬이므로 고유치는 복소수로 계산된다. 감쇠 하중을 고려하는 경우에 임계하중은 식 (11)의 고유치에서 실수부가 음수에서 양수로 바뀌는 지점으로 계산되며 이에 대한 알고리즘은 다음과 같다.

- 1) P의 범위는 $[A_0, B_0]$ 로 설정한다.

여기서, $P=A_0$ 는 식 (11)의 고유주기들의 실수부가 모두 음일 때의 하중파라미터 값이고 $P=B_0$ 는 실수부가 가장 큰 두개의 고유주기들이 양수일 때의 하중파라미터 값이다.

- 2) $C_i = (A_i + B_i)/2$ $i=0, 1, 2, 3, \dots$ 를 계산한다.
- 3) 식 (11)의 P에 C_i 를 대입하여 고유주기를 산정한다.
- 4) 단계 3)에서 계산한 고유주기의 실수부분들 중에서 가장 큰 값이 허용오차 범위내에서 $\frac{1}{2}$ 과 같으면 C_i 를 임계하중에 대응하는 P로 결정하고 반복계산을 정지시킨다.
- 4) 고유주기들 중에서 실수부가 가장 큰 두개의 고유주기 값이 양수이면 $A_{i+1} = C_i$, $B_{i+1} = B_i$ 로 놓고, 모두 음이면 $A_{i+1} = A_i$, $B_{i+1} = C_i$ 로 놓는다.
- 5) 3.1절의 경우와 동일하다.

4. 수치계산결과

4장에서는 본 연구에서 제시한 이론을 사용하여 여러가지 경계조건과 하중조건을 갖는 평면배대 구조물의 divergence load (P_d) 및 flutter load (P_f)들을 산정하였으며 문헌의 해석결과들과 비교하였다.

4.1 직각 배대 구조물의 Divergence load 및 Flutter load

그림 3은 양단의 경계조건들이 이동단-회전단 및 이동단-고정단인 경우에 작용점이 회전변위 (θ)를 일으킴에 따라 작용방향이 $\alpha \cdot \theta$ 만큼 회전하는 비보존력이 작용하는 직각배대 구조물들을 나타낸 것이다. 수평 및 수직부재들은 각각 8개의 유한요소를 사용하였으며, 해석에 사용된 제원은 다음과 같다.

길이 $L=100\text{cm}$, 탄성계수 $E=2.1 \times 10^7 \text{N/cm}^2$

단면적 $A=20\text{cm}^2$, 단면 2차모멘트 $I=1.6666667\text{cm}^4$

표 1은 양단 모두 회전단, 왼쪽은 이동단(roller)이고 오른쪽은 회전단, 왼쪽은 회전단이고 오른쪽은 고정단, 그리고 왼쪽은 이동단이고 오른쪽은 고정단의 네가지 경계조건을 갖는 직각 배대 구조물의 임계하중 값들을 비보존력의 방향변화를 조절하는 파라미터 α 값이 1.0, 0.0, -1.0인 세가지 경우에 대하여 본 연구에서 제시한 유한요소이론을 사용하여 산정한 임계하중값들을 나타낸 것이다. 여기서 임계하중의 크기를 무차원량으로 표시하기 위하여

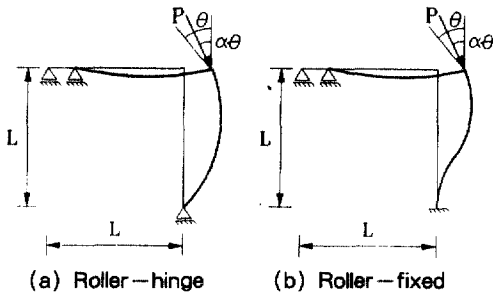


그림 3. Right-angle frame subjected to sub-tangentially circulatory force

계산된 임계하중값들을 Π/L^2 로 나누어서 그 결과들을 표 1에 나타내었다. $\alpha=1.0$ 이고 이동단-고정단인 경계조건을 갖는 경우만 flutter에 의해서 불안정한 상태로 전이하고 나머지 경우에는 divergence에 의해서 좌굴을 일으켰다. $\alpha=0.0$ 인 경우에 팔호 속의 값들은 Timoshenko⁽⁹⁾의 엄밀해를 나타낸 것이며 본 연구의 결과와 비교해 볼때 거의 일치함을 알 수 있다. 비보존력의 이동단-고정단의 경계조건을 갖는 직각뿔대 구조물의 경우에는 비보존력의 방향변화로 인한 임계하중값의 변화가 현저한 반면에 회전단-회전단, 회전단-고정단의 경계조건을 갖는 경우에는 임계하중값들은 변화가 거의 없음을 볼 수 있다. 이는 구조물의 왼쪽 경계조건이 이동단인 경우에는 단면의 회전변위로 인하여 발생하는 비보존력의 수평방향성분을 지지할 수 없지만 왼쪽 경계조건이 회전단인 경우에는 회전단의 수평반력에 의해서 수평방향성분을 상쇄시킬 수 있기 때문이라고 판단된다. $\alpha=1.0$ 이고 이동단-회전단인 경우에 Panayotounakos와 Kounadis⁽¹⁰⁾의 해석결과를 ()*속에 표시하였는데, 본 연구의 결과와 거의 동일한 결과를 나타내었다. $\alpha=1.0$ 이고 이동단-고정단인 경우에 Kounadis와 Avraam⁽¹¹⁾의 해석결과는 ()**속에 보였으며, 이것 또한 본 연구의 결과와 서로 근접한 결과를 나타내었다.

4.2 Flutter load의 산정에 있어서 감쇠하중의 영향

4.2.1 자유단에 집중 비보존력을 받는 외팔보 flutter시스템의 경우에 미소한 크기의 내적 감쇠하중(internal damping force)에 의해서 임계하중값이 현저히 감소할 수 있다는 것은 잘 알려진

표 1. Divergence load & Flutter load of Right-angle frame according to variation of sub-tangentiality α

	$\alpha=1.$	$\alpha=0.0$	$\alpha=-1.00$
Hinged-Hinged	13.885465	13.886305 (13.886)	13.887145
Roller-Hinged	2.4674061 (2.4674011)*	1.4219144 (1.4219)	0.9765768
Hinged-Fixed	26.965540	26.962998 (26.958)	26.960454
Roller-Fixed	23.64427 (25.439)**	6.0300965 (6.030)	3.4311941

사실이다^(2, 3). 본 절에서는 비보존력을 받아서 flutter에 의해 불안정 상태로 전이하는 외팔보에 대한 두가지 예제들을 통해서 감쇠하중의 영향을 조사한다. 이때 사용된 재원은 그림 3의 수평부재와 동일한 것을 사용하였으며, 8개의 유한요소로 분할하여 해석하였다.

그림 4는 자유단에 집중 비보존력을 받는 외팔보를 나타낸 것이다. 표 2는 내적 및 외적감쇠계수 값의 변화에 따른 critical flutter load의 변화를 표로 정리한 것이다. 이때 임계하중의 크기를 무차원량으로 표시하기 위하여 계산된 임계하중값들을 Π/L^2 로 나누어서 표에 나타내었다. 표에서 팔호속의 값은 감쇠효과를 고려하지 않는 경우에 Timoshenko⁽⁹⁾의 결과를 나타낸 것이며 본 연구의 결과와 1.2%의 차이를 보이고 있다. β_2 값(내적감쇠계수)이 미소하고($10^{-5}-10^{-4}$), β_1 값(외적감쇠계수)이 0인 경우의 flutter load(10.939)는 감쇠효과를 무시한 경우의 flutter load(20.054)에 비하여 45.5%나 감소하는 것을 볼 수 있으며 내적감쇠계수 값이 점차 커짐에 따라 flutter load값도 증가하는 양상을 보여준다. 외적감쇠하중을 포함시키는 경우에 flutter load값은 일반적으로 증가하는 양상을 나타내므로 비보존력계의 안정성을 향상시키는 방향으로 작용하는 것을 알 수 있다.

4.2.2 균일하게 분포하는 비보존력을 받는 외팔보

그림 5는 균일하게 분포하는 비보존력을 받는 외팔보를 나타낸 것이다. 4.2.1 절의 예제와 마찬가지로 표 3은 내적 및 외적감쇠계수 값의 변화에 따른

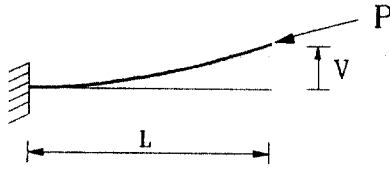


그림 4. Cantilever subjected to circulatory force at free end

표 2. Flutter load of cantilever subjected to circulatory force at free end including damping effects

β_2	β_1			
	0.0	1.0	10.0	100.0
0.000	20.054 (19.818)	20.055	20.078	22.189
10^{-5}	10.939	19.555	20.069	22.204
10^{-4}	10.939	15.822	19.595	22.318
0.002	11.182	11.762	14.924	23.797
0.004	11.908	12.263	14.745	25.637
0.006	13.110	13.408	15.721	27.964
0.008	14.777	15.063	17.392	30.677
0.010	16.899	17.189	19.616	33.714
0.012	19.463	19.766	22.330	37.041
0.014	22.459	22.778	25.501	40.639
0.016	25.879	26.217	29.107	44.496
0.018	29.715	30.073	33.135	48.612
0.020	33.962	34.339	37.574	52.987
0.024	43.671	44.088	47.663	62.540
0.030	61.239	61.715	65.783	79.018

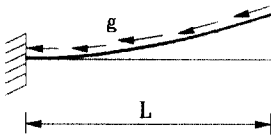


그림 5. Cantilever subjected to uniformly distributed circulatory load

critical flutter load의 변화를 표로 정리한 것이다. 이때 계산된 임계하중값들을 EI/L^3 로 나누어서 표에 나타내었다. 표에서 괄호 속의 값은 감쇠효과를 고려하지 않는 경우에 Leipholz⁽³⁾의 결과를 나타

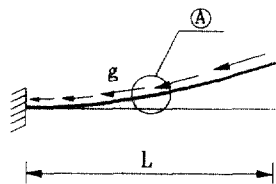
낸 것이며 본 연구의 결과와 거의 일치하였다. 자유단에 집중 비보존력을 받는 외팔보의 경우와 마찬가지로 β_2 값이 미소하고 β_1 값이 큰 경우의 flutter load는 감쇠효과를 무시한 경우의 flutter load에 비하여 큰 폭으로 감소하는 것을 볼 수 있으며 내적감쇠계수 및 외적감쇠계수 값이 점차 커짐에 따라 flutter load도 증가하는 양상을 나타내었다.

4.3 Circulatory force의 方向파라미터 α 의 影響

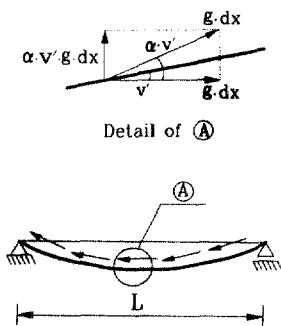
그림 6a는 외팔보에 선형분포를 이루는 비보존력이 작용하는 경우를 나타낸 것이며, 그림 6b는 단순보에 균일하게 분포하는 비보존력이 작용하는 경우를 나타낸 것이다. 이때 비보존력의 방향변화를 고려하기 위하여 비보존력의 방향변화를 조절하는 파라미터 α 를 도입하였다. α 가 큰 경우는 작용하중의 방향변화가 없기 때문에 보존력에 해당하고 α 가 1이면 단면이 회전함에 따라 접선방향으로 작용하는 비보존력(follower force)에 대응한다. 외팔보의 자

표 3. Flutter load of cantilever subjected to uniformly distributed circulatory load including damping effects

β_2	β_1			
	0.0	1.0	10.0	100.0
0.000	40.059 (40.05)	40.066	40.113	44.333
10^{-5}	21.821	39.064	40.096	44.361
10^{-4}	21.822	31.581	39.144	44.587
0.002	22.304	23.461	29.777	47.482
0.004	23.749	24.458	29.408	51.089
0.006	26.142	26.737	31.346	55.665
0.008	29.460	30.030	34.667	61.011
0.010	33.783	34.260	39.088	67.002
0.012	38.783	39.386	44.485	73.564
0.014	44.744	45.379	50.788	80.657
0.016	51.546	52.217	57.957	88.262
0.018	59.175	59.885	65.962	96.372
0.020	67.620	68.369	74.785	104.988
0.024	86.924	87.751	94.837	123.781
0.030	121.844	122.787	130.839	156.146



(a) cantilever subjected to subtangential linearly circulatory distributed loads



(b) Simple beam subjected to subtangential uniformly circulatory distributed loads

그림 6

유단에 집중 비보존력이 작용하는 경우와 균일하게 분포하는 비보존력이 작용하는 경우에 비보존력의 방향 파라미터 α 의 영향은 이전의 문헌 6에서 제시한 바 있다.

그림 7은 α 값이 0.0에서 1.0까지 변화함에 따라 divergence load P_{d1} , P_{d2} 와 flutter load P_{f1} , P_{f2} 값들의 변화를 나타낸 것이다. α 값이 0.0에서 0.1666까지는 divergence system (D. S.), α 값이 0.1666에서 0.5까지는 divergence flutter system (D. F. S.), 그리고 α 값이 0.5보다 클 때에는 flutter system (F. S.)에 해당하며 특히 α 값이 0.5에서 P_{d2} 값의 불연속이 나타난다.

그림 8은 균일하게 작용하는 비보존력하에서 α 값의 변화에 따른 균일하게 분포하는 단순보(그림 6b)의 임계하중값들을 곡선으로 나타낸 것이다. α

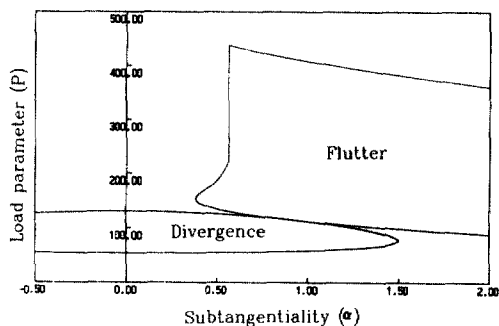


그림 8. Critical load of simple beam as function of the subtangentiality α

값이 0.0에서 0.385235까지는 DS, 0.385235에서 1.5까지는 DFS, 그리고 1.5보다 큰 구간에서는 F. S.에 대응한다는 것을 알 수 있다. 또한 α 값이 0.564755 전후에서 P_{d2} 값의 불연속이 발생한다.

5. 결론

Hermitian polynomial을 형상함수로 사용하는 2절점 유한요소법을 평면띠대 구조물에 적용하므로써 Hamilton의 원리로부터 매트릭스 운동방정식을 유도하였다. 본 이론에 의한 해석의 적용범위를 확장시키기 위하여 탄성강도 매트릭스 및 질량매트릭스뿐만 아니라 포물선분포를 이루는 축방향력에 대한 기하적인 강도매트릭스, circulatory force의 방향 변화를 고려하는 load correction stiffness matrix, 그리고 감쇠효과를 고려하는 매트릭스들

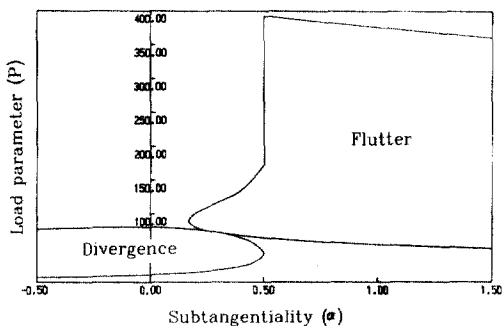


그림 7. Critical load of cantilever as function of the subtangentiality α

을 방정식에 포함시켰다. 여러가지 예제들을 취하여 구조물의 divergence load 또는 flutter load들을 본 연구에 의하여 계산한 결과들과 문헌의 산정 결과들을 비교 분석한 결과 다음과 같은 결론에 도달하였다.

- 1) 구조물을 충분한 갯수의 유한요소로 나누었을 때, 본 연구에 의하여 보존력 및 비보존력을 받는 평면뼈대 구조물의 divergence load 및 flutter load를 계산한 결과들과 해석해 또는 문헌의 결과들이 서로 잘 일치하였다.
- 2) flutter system의 경우에 내적감쇠 (internal damping)와 외적감쇠(external damping)효과를 조사한 결과 문헌2와 3에 나타난 결과들과 대체로 일치하는 결과들을 얻었다. 즉 미소한 내적감쇠계수값에서 critical flutter load 값의 급격한 감소가 일어났으며 내적감쇠계수값이 증가함에 따라 flutter load값은 다시 증가하였으며 외적감쇠하중은 시스템의 안정성을 증가시키는 방향으로 작용함을 알 수 있었다.
- 3) 보존력 및 비보존력을 받는 평면뼈대의 안정성을 결정하는데 있어서 경계조건, 포물선분포를 이루는 축방향력, 그리고 circulatory force의 방향변화들의 영향을 충분한 정확도로 고려할 수 있었다.

참 고 문 헌

1. H.Ziegler, "Principles of structural stability", 2nd ed., Birkhauser, Bbasel/Stuttgart, 1977, pp.91-115
2. V.V.Bolotin, "Nonconservative problems of the theory of elastic stability", Moscow, 1961 English translation published by Pergamon Press, Nework, 1963,
3. H.H.E.Leipholz, "Stability of elastic systems", universities press, Belfast, 1980, pp312-388
4. R.S.Barsoum, "Finite element method applied to the problem of stability of a non-conservative system", *Internat.J.Numer.Meth.Eng.*3, 1971, pp. 63-87
5. G.V.Rao and R.V.N.Raio "Galerkin finite element solution for the stability of cantilever columns subjected to tangential loads", *AIAA*

Journal, Vol. 13, No. 5, 1975, pp690-691

6. 金文榮, 張丞弼, "保存力 및 非保存力을 받는 平面 뼈대 構造物의 安定性에 關한 研究", *韓國 鋼構造學會 論文集*, 제 2권, 제 1호, 1988년 6월, pp111-122
7. 金文榮, 張丞弼, "Circulatory force를 받는 平面 뼈대 構造物의 動的 後挫屈 舉動에 關한 研究", *大韓 土木學會 論文集*, 제 8권, 제 2호, 1988년 6월 pp13-24
8. K.Huseyin, *Vibration and Stability of Multiple-parameter system*", Sijthoff & Noordhoff Int. Pub., the Netherlands, 1978
9. S.P.Timoshenko and J.M.Gere, "*Theory of Elastic stability*", McGraw-Hill, New York, 1961
10. D.E.Panayotoukos and A.N.Kounadis, "Elastic Stability of a Simple Frame subjected to a Circulatory load", *Journal of Sound and Vibration* 64 (2), 1979, pp179-186
11. A.N.Kounadis and T.P.Avraam, *Linear and Nonlinear Analysis of a Nonconservative Frame of Divergence Instability*", *AIAA Journal* 19(6), June, 1981, pp761-765

부 록

1) 彈性剛度 매트릭스 (K_e)

$$K_e = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot & -a & \cdot & \cdot \\ & b & c & \cdot & -b & c \\ & & d & b & -c & e \\ & & & a & \cdot & \cdot \\ \text{Symm} & & & & b & -c \\ & & & & & d \end{bmatrix} \begin{matrix} a = EA/L \\ b = 12EI/L^3 \\ c = 6EI/L^2 \\ d = 4EI/L \\ e = 2EI/L \end{matrix}$$

2) 幾何的인 剛度 매트릭스 (K_g)

$$K_g = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & A & B & \cdot & -A & C \\ & & D & \cdot & -B & G \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{Symm} & & & & A & -C \\ & & & & & H \end{bmatrix} \begin{matrix} A = -1.2F_1^p/L + 18P_x^p/30 + 72P_x^q/420 \\ B = -F_1^p/10 + P_x^p \cdot L/10 + 15P_x^q \cdot L/420 \\ C = -F_1^p/10 - 6P_x^q \cdot L/420 \\ D = -2F_1^p \cdot L/15 + P_x^p \cdot L^2/30 + 4P_x^q \cdot L^2/420 \\ G = F_1^p \cdot L/30 - P_x^p \cdot L^2/60 - 3P_x^q \cdot L^2/420 \\ H = -2F_1^p \cdot L/15 + P_x^p \cdot L^2/10 + 18P_x^q \cdot L^2/420 \end{matrix}$$

$P_x^q = P_x^a - P_x^p$

3) Load correction stiffness matrix for the linearly distributed circulatory load (K^{nc}).

$$K^{nc} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & b_2 & b_3 & \cdot & b_5 & b_6 \\ \cdot & c_2 & c_3 & \cdot & c_5 & c_6 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & e_2 & e_3 & \cdot & e_5 & e_6 \\ \cdot & f_2 & f_3 & \cdot & f_5 & f_6 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = -P_x^p/2 - 78P_x^*/420$$

$$b_3 = (P_x^p/10 - 4P_x^*/420) \cdot L$$

$$b_6 = (-P_x^p/10 - 11P_x^*/210) \cdot L$$

$$b_5 = -b_2$$

$$c_2 = (P_x^p/10 + 9P_x^*/210) \cdot L$$

$$c_3 = -P_x^p \cdot L^2/210$$

$$c_5 = -c_2$$

$$c_6 = -(P_x^p/60 + P_x^*/210) \cdot L^2$$

$$e_2 = -P_x^p/2 - 66P_x^*/210$$

$$e_3 = -(P_x^p/10 - 31P_x^*/420) \cdot L$$

$$e_6 = (P_x^p/10 + 23P_x^*/210) \cdot L$$

$$e_5 = -e_2$$

$$f_2 = (P_x^p/10 + 24P_x^*/420) \cdot L$$

$$f_3 = (P_x^p/60 + 5P_x^*/420) \cdot L^2$$

$$f_6 = -P_x^p \cdot L^2/120, f_5 = -f_2$$

$$P_x^* = P_x^c - P_x^p$$

4) 質量 매트릭스 (M_e)

$$M_e = \rho AL \begin{bmatrix} a_1 & \cdot & \cdot & a_2 & \cdot & \cdot \\ & b & c & \cdot & d & e \\ & & f & \cdot & -e & -g \\ & & & e_1 & \cdot & \cdot \\ \text{Symm} & & & & b & -c \\ & & & & & f \end{bmatrix}$$

$$a_1 = 1/3$$

$$a_2 = 1/6$$

$$b = 156/420$$

$$c = 22 \cdot L/420$$

$$d = 54/420$$

$$e = -13 \cdot L/420$$

$$f = 4 \cdot L^2/420$$

$$g = 3 \cdot L^2/420$$

(接受: 1990. 8. 8)