

## 減衰效果를 고려한 非保存力系の 動的 後挫屈 解析

The Dynamic Post-Buckling Analysis of  
the Non-Conservative System including Damping Effects

金 文 榮 · 張 丞 弼  
Kim, Moon Young · Chang, Sung Pil

## Abstract

A geometrically nonlinear analysis procedure including the damping effects is presented for the investigation of the dynamic post-divergence and post-flutter behavior of a non-conservative system. The dynamic nonlinear analysis of plane frame structure subjected to conservative and non-conservative forces is carried out by solving the equations of motion using Newmark method. Numerical results are presented to demonstrate the effects of the internal and external damping forces in the conservative and non-conservative systems.

## 要 旨

보존력 및 비보존력을 받는 평면뼈대 구조물의 동적 후좌굴거동을 추적하기 위하여 비보존력의 방향 변화를 고려할 수 있는 기하적인 비선형 유한 요소해석 방법을 제시하였다. 보존력계와 비보존력계에 대하여 내적 및 외적감쇠효과를 고려하는 비선형 패트릭스 운동 방정식을 유도하고 Newmark 방법을 사용하여 수치적으로 직접 적분하였다. Post-divergence 및 Post-flutter 현상들을 보여주는 해석예제들을 통하여 내적 및 외적감쇠하중이 이러한 비선형 동적 후좌굴거동들에 미치는 영향들을 조사하였다.

## 1. 序 論

비보존력을 받는 평면 뼈대구조물은 divergence (정적인 좌굴현상) 또는 flutter(시간이 지남에 따라 진폭이 폭발적으로 증가하는 현상)에 의해서 불안정 상태로 전이하며 이러한 flutter현상<sup>(1)</sup>을 다루기 위해서는 동적해석이 반드시 필요하다는

것은 잘 알려진 사실이다.

이전의 논문에서는 대부분 선형한계 내에서 임계하중을 구하는데 초점을 맞추었으나 구조물의 안정성 문제는 본질적으로 비선형이므로 구조물의 완전한 거동을 이해하기 위해서는 임계하중 이후의 후좌굴 거동 (post-divergence, post-flutter)을 추적하는 정적 및 동적 비선형해

\* 정희원 · 서울대학교 工科大学 土木工學科 講師

\*\* 정희원 · 서울대학교 工科大学 土木工學科 教授

석이 필요하다.

Argyris<sup>(2)</sup>는 circulatory force를 받는 뼈대구조물의 후좌굴 거동을 파악하기 위하여 natural mode formulation을 이용한 비선형 유한 요소법을 개발하였다. 그러나 Argyris는 충분한 시간영역에 걸쳐서 post-flutter 거동을 추적하지 못하였으며 비보존력을 받는 뼈대구조물의 동적 후좌굴 거동을 해석하는 경우에 중요성을 가지는 내적 및 외적감쇠하중의 영향을 조사하지 못하였다.

본 논문은 이전에 발표된 문헌<sup>(3, 4, 5)</sup>의 확장으로서, 보존력 및 비보존력을 받는 평면 뼈대구조물의 기하적인 비선형 매트릭스 운동 방정식을 도입하고 Newmark 방법을 사용하여 수치적으로 직접 적분하였다. 유도한 비선형 운동방정식의 해를 구함으로써 보존력 또는 비보존력이 작용하는 경우에 내적 및 외적감쇠하중들이 평면 뼈대구조물의 동적 후좌굴 거동에 미치는 영향들을 추적하였다.

## 2 평면 뼈대구조물의 매트릭스 운동방정식

본 연구에서는 각 하중단계에서 반복계산을 행할 때 마다 새로이 접선강도 매트릭스를 계산하는 Newton-Raphson 방법을 사용하였다. 구조물은 비례하중 (proportional loading)을 받는다고 가정하며, 하중의 변화상태는 하중파라미터  $\lambda$ 를 사용하여 나타내었다.

### 2.1 保存力系の非線形運動方程式

구조계를 유한요소로 나누어 각 요소들에 대한 요소매트릭스들 (부재질량매트릭스, 감쇠매트릭스 그리고 부재강도매트릭스)을 구하여 전체좌표계로 변환시켰을때 관성력, 내부용력으로 인한 재단력, 감쇠력 그리고 외부에서 작용하는 보존력 및 비보존력들은 동적인 평형(dynamic equilibrium)을 이루어야 한다. 시간  $t$ 와  $t+\Delta t$  사이의 하중파라미터의 증분이  $\Delta\lambda (= {}^{t+\Delta t}\lambda - \lambda)$ 로 주어졌을때 이에 대응하는 변위증분벡터  $\Delta U (= {}^{t+\Delta t}U - U)$ 를 산정하기 위한 기본 증분방정식<sup>(6)</sup>은 다음과 같다.

$$[M] \cdot {}^{t+\Delta t}U^{(i)} + [C] \cdot {}^{t+\Delta t}U^{(i)} + [K_E^{(i)} + K_G^{(i)}] \cdot \Delta U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}F^{(i)} - P - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \cdot {}^{t+\Delta t}U^{(i)} = {}^{t+\Delta t}U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)} \quad (1)$$

$$\text{초기조건: } {}^{t+\Delta t}U^{(0)} = U, \quad {}^{t+\Delta t}U^{(0)} = F$$

여기서,  $M$ 과  $C$ 는 질량, 감쇠매트릭스이고  $K_E^{(i)}$ 는 (i)번째 반복계산시 구조물의 탄성강도 및

기하적인 강도매트릭스를 나타낸다.  ${}^{t+\Delta t}F$  ·  $P$ 는 외부에서 가해지는 절점하중벡터이며,  $P$ 는 하중성분들의 비율만을 나타내는 하중벡터를 의미한다.  ${}^{t+\Delta t}F$ 는 부재 내력에서 기인하는 절점력벡터이고  $U, \dot{U}, \ddot{U}$ 와  $\Delta U^{(i)}$ 는 시간  $t$ 에서의 절점가속도, 절점속도, 절점변위 그리고 절점증분변위벡터를 나타낸다. 식(1)에서 필요한 요소 매트릭스들에 대한 유도과정 및 계산결과들은 문헌 5를 참조할 수 있다.

보존력인 경우 절점하중벡터의 방향은 일정하게 유지되므로 식(1)의 하중벡터는 각 하중단계의 반복계산 과정에서 크기와 방향이 변하지 않는다. 식(1)의 오른쪽 두항들은 첫번째 반복계산에서는 증분하중벡터를, 두번째 반복계산부터는 불평형 하중벡터를 구성한다. Modified Newton-Raphson 방법을 적용하는 경우에 접선강도 매트릭스 ( $K^{(i)}$ )는 반복계산을 수행할 때마다 새로이 구성하지않고 첫번째 반복계산에서 얻은 강도매트릭스( $K^{(0)}$ )를 그대로 사용한다.

식(1)의 감쇠매트릭스는 문헌<sup>(6)</sup>에서 유도한 바와 같이 질량매트릭스와 탄성강도매트릭스의 일차결함으로 가정한다.

$$[C] = \beta \cdot [M] + \beta_E \cdot [K_E] \quad (2)$$

여기서,  $M$ 은 각 하중단계의 구조를 형상에 관계없이 처음에 한번만 계산하며,  $K_E$ 는 초기상태에 대한 탄성강도 매트릭스를 나타낸다.  $\beta$ 은 외적감쇠계수,  $\beta_E$ 는 내적감쇠계수를 표시한다.

### 2.2 非保存力系の非線形運動方程式

보존력이 작용하는 경우와는 달리 비보존력이 작용하는 경우에는 하중벡터  $P$ 가 절점회전변위로 인하여 방향변화를 일으키므로 하중벡터  $P$ 는 변위벡터의 벡타함수로 생각하여야 하며 반복계산 과정에서 변위벡터가 변할 때마다 다시 계산되어야 한다. 이러한 사실을 고려하면 하중벡터  $P$ 는 다음과 같이 (i-1)번째와 (i)번째 반복계산 사이의 증분관계로 나타낼 수 있다.

$$P({}^{t+\Delta t}U^{(i)}) = P({}^{t+\Delta t}U^{(i-1)}) + [aP/aU] \cdot \Delta U^{(i)} \quad (3)$$

여기서,  $aP/aU$ 는 변위벡터가  ${}^{t+\Delta t}U^{(i-1)}$ 인 구조물의 변형상태를 기준으로 하중벡터  $P$ 의 변화율을 나타낸다.

식 (3)을 식(1)에 대입하여 정리하면 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$[M] \cdot {}^{i+1}U^{(i)} + [C] \cdot {}^{i+1}\dot{U}^{(i)} + [{}^iK_E^{(i)} + {}^iK_G^{(i)} - {}^iK_{NC}^{(i)}] \cdot \Delta U^{(i)} = {}^{i+1}F^{(i)} - P({}^{i+1}U^{(i-1)}) - {}^{i+1}F^{(i-1)} \quad (4)$$

여기서,  $K_{NC}^{(i)} = {}^{i+1}\lambda \cdot \partial P / \partial U$ 로 정의되며 비보존력의 방향변화를 나타내는 Load Correction Stiffness Matrix (L.C.S.M.)라고 부른다. 그리고 수렴속도를 빠르게하기 위해서는 접선강도매트릭스에 LCSM을 포함시키는 것이 필요하다. (i-1)번째와 (i)번째 반복계산 사이의 증분하중벡터는 식(4)의 오른쪽 두항으로 결정되며, 식(4)를 풀어서 새로운 변위벡터( ${}^{i+1}U^{(i)}$ ) 및 절점력벡터( ${}^{i+1}F^{(i)}$ )를 계산하면 다음과 같이 불평형 하중벡터를 산정할 수 있다.

$$R^{(i)} = {}^{i+1}\lambda \cdot P({}^{i+1}U^{(i)}) - {}^{i+1}F^{(i)} \quad i=1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

여기서,  $R^{(i)}$ 는 반복계산을 시작할때의 증분하중벡터를 나타낸다.

비보존력을 받는 구조물의 접선강도 매트릭스를 산정하는 경우에, 발산을 방지하고 수렴속도를 빠르게 하기 위하여 LCSM을 포함시키는 것이 필요하지만 강도매트릭스가 비대칭 행렬이 되는 단점을 갖게되므로 modified Newton-Raphson 방법을 적용하거나 강도매트릭스의 대칭성을 유지시키고자 할때에는 강도매트릭스의 산정에서 LCSM.를 제외시킬 수 있다. 그러나 불평형하중과 하중벡터를 산정할때에는 반복계산을 수행할 때마다 절점의 회전변위의 변화로 인한 비보존력의 방향변화를 반드시 고려하여야 한다.

### 3. 直接積分法 (Direct Integration Method)

식 (1)과 (4)는 N개의 절점변위벡터 성분들의 연립 미분방정식이며 해석적인 방법에 의해서 해를 구하는 것은 극히 어려우므로 통상 수치적인 방법을 적용한다. 이러한 경우에 사용할 수 있는 여러 가지 수치해석 방법이 제시되었지만 본 논문에서는 임의의 시간간격에 대하여 수치적으로 안정성을 보이는 Newmark 방법을 적용한다. 아래는 Newton-Raphson 방법을 사용하여 비보존력이 작용하는 경우에 비선형 동적해석을 수행하기 위한 Newmark 방법<sup>7)</sup>을 제시한 것이다.

1) 탄성강도 매트릭스( $K_E$ ), 질량매트릭스(M) 그

리고 감쇠매트릭스(C)를 구한다.  $U, \dot{U}$ 는 임의로 정하고 식 (4)로 부터  $U$ 를 산정하여 초기치  $U, \dot{U}, \ddot{U}$ 를 결정한다.

2) 다음값들을 계산한다.

$$\alpha \geq 0.5, \quad \alpha \geq 0.25(0.5 + \delta)^2$$

$$a_0 = 1/(\alpha \cdot \Delta t^2), \quad a_1 = \delta/(\alpha \cdot \Delta t), \quad a_2 = 1/(\alpha \cdot \Delta t), \quad a_3 = 1/(2\alpha) - 1, \quad a_4 = \delta/\alpha - 1, \quad a_5 = \Delta t(\delta/\alpha - 2)/2, \quad a_6 = a_0, \quad a_7 = -a_2, \quad a_8 = -a_3, \quad a_9 = \Delta t \cdot (1 - \delta), \quad a_{10} = \delta \cdot \Delta t \quad (6)$$

3) 동적해석에서 사용되는 강도매트릭스를 계산한다.

$$[{}^iK_T^{(i)}] = [{}^iK_E^{(i)} + {}^iK_G^{(i)} - {}^iK_{NC}^{(i)}] + a_0[M] + a_1 \cdot [C] \quad (7)$$

4) 동적해석에서 사용되는 유효하중벡터를 산정한다.

$${}^{i+1}R^{(i)} = {}^{i+1}R^{(i)} + [M] \cdot (a_2 \cdot \dot{U} + a_3 \cdot t\ddot{U}) + [C] \cdot (a_4 \cdot \dot{U} + a_5 \cdot t\ddot{U}) \quad (8)$$

5) 증분변위벡터를 구한다.

$$[{}^iK_T^{(i)}] \cdot \Delta U = {}^{i+1}R^{(i)} \quad (9)$$

6) 동적인 평형상태에 도달하도록 반복계산한다. 이때  $U^{(0)} = \Delta U$ 로 초기치를 잡는다.

(a)  $i = i + 1$

(b) 가속도, 속도, 그리고 변위들에 대한 (i-1)번째 근사값들을 계산한다.

$${}^{i+1}U^{(i-1)} = a_6 \cdot U^{(i-1)} - a_2 \cdot \dot{U} - a_3 \cdot \ddot{U}$$

$${}^{i+1}\dot{U}^{(i-1)} = a_1 \cdot U^{(i-1)} - a_4 \cdot \dot{U} - a_5 \cdot \ddot{U}$$

(10)

$${}^{i+1}U^{(i-1)} = U + U^{(i-1)}$$

(c) (i-1)번째의 동적인 강도매트릭스 및 불평형하중을 계산한다.

$$[{}^iK_T^{(i)}] = [{}^iK_E^{(i)} + {}^iK_G^{(i)} - {}^iK_{NC}^{(i)}] + a_0 \cdot [M] + a_1 \cdot [C] \quad (11)$$

$${}^{i+1}R^{(i-1)} = {}^{i+1}R^{(i-1)}$$

$$- [M] \cdot {}^{i+1}\dot{U}^{(i-1)} - [C] \cdot {}^{i+1}U^{(i-1)}$$

(d) 증분변위벡터에 대한 (i)번째 보정 (correction)값을 얻는다.

$$[{}^iK_T^{(i)}] \cdot \Delta U^{(0)} = {}^{i+1}R^{(i-1)} \quad (12)$$

(f) 불평형하중 성분들이 모두 허용한계 내에 들어오면  $U = U^{(0)}$  그리고 7)로 간다. 수렴하지 않으면 수렴할 때까지 반복 계산한다.

7) 다음 하중단계로 들어가기 전에 새로운 가속도, 속도 그리고 변위들을 계산한다.

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\ddot{U} &= a_6 \cdot U + a_7 \cdot \dot{U} + a_8 \cdot \ddot{U} \\ {}^{t+\Delta t}\dot{U} &= \dot{U} + a_9 \cdot \dot{U} + a_{10} \cdot {}^{t+\Delta t}\ddot{U} \\ {}^{t+\Delta t}U &= U + \Delta U \end{aligned} \quad (13)$$

3)에서 7)까지는 load step loop를 형성하고 6)은 load step내에서 반복 계산 loop에 해당한다.

#### 4. 數値解析例

본 논문에서 제시한 이론의 타당성을 검증하기 위하여 보존력 및 비보존력을 받는 평면剛體 구조물의 동적 비선형 유한 요소해석을 수행할 수 있는 프로그램을 개발하였다. 보존력만을 취급하는 기존의 프로그램과는 달리 비보존력(circulatory force)의 방향변화 뿐만 아니라 내적 및 외적 감쇠하중의 영향들을 고려할 수 있도록 하였다.

본 연구에서는 자유단에 보존력 또는 비보존력이 작용하는 외팔기둥 (그림 1, 3)을 해석예제로 선택하였으며 재원은 다음과 같다.

길이  $L=100\text{cm}$ , 탄성계수  $E=2.1 \times 10^7 \text{N/cm}^2$

단면적  $A=20\text{cm}^2$ , 단면2차모멘트  $I=1.666667\text{cm}^4$

내적 및 외적 감쇠하중이 보존력 및 비보존력계의 동적 안정성거동에 미치는 영향을 추적하기 위하여 4.1 절에서는 축방향 압축력을 받는 외팔기둥의 post-divergence 거동을, 4.2절에서는 follower force를 받는 외팔기둥의 post-fultter 거

동을 해석하였다. 4장에서 취급하는 모든 예제들의 초기조건은 정지상태로 외팔기둥에 작용하는 동적인 축방향 하중  $P$ 는 처음에 일정한 크기로 제하시켜서 시간이 경과함에 따라 그 크기를 변화시키지 않도록 하였다. 횡방향의 미소한 하중은 1.0N의 크기로 자유단에 0.001초 동안 제하시켰다가 0.002초 이후에는 이 힘을 제거하므로써 외팔기둥이 순수한 축방향 보존력 또는 follower force만을 받도록 고려하였다.

#### 4.1 축방향 압축력을 받는 외팔기둥의 Post-Divergence 거동

그림 1은 critical divergence load (8.636 KN)보다 약간 큰 값을 갖는 축방향의 보존력(9.0 KN)에 의하여

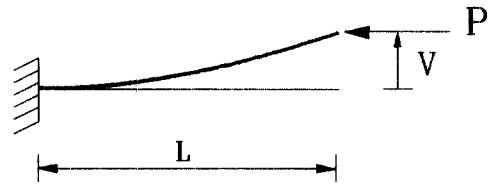
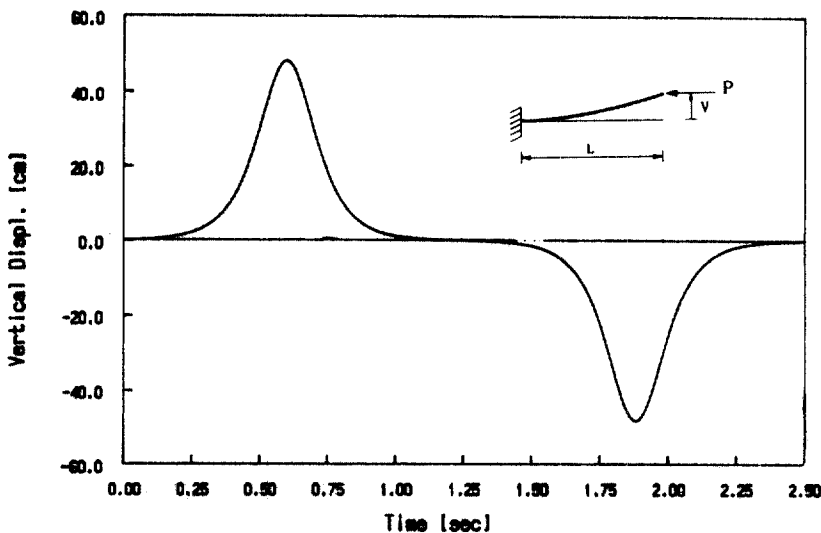
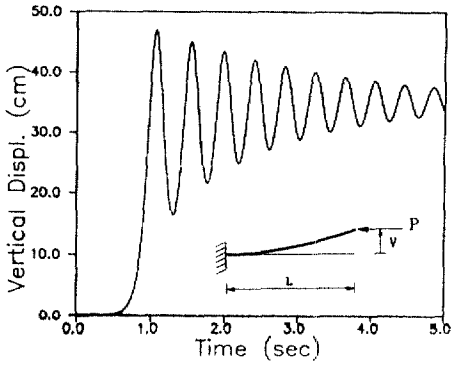


그림 1. Cantilever subjected to conservative force

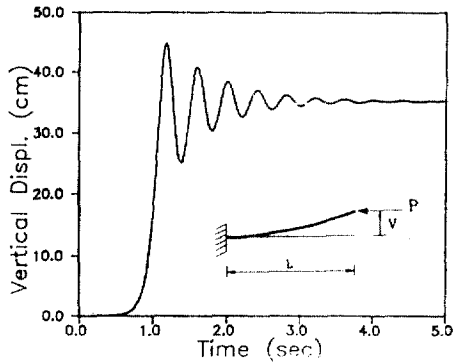
밀도가  $0.785 \times 10^{-6} \text{kg/cm}^3$ 인 외팔기둥이 동적인 좌굴을 일으키는 모습을 나타낸 것이다. 그림 2a는  $\beta_1=0.0$ 이고  $\beta_2=0.0$ 인 경우, 그림 2b, c, d, e들은 각각  $\beta_2=0.0$ 이고  $\beta_1=1.0, 3.0, 5.0, 7.0$ 인 경우에 5.0초의 시간이 경과하는 동안의 자유단의 수직처짐을 그래프로 나타낸 것이다.



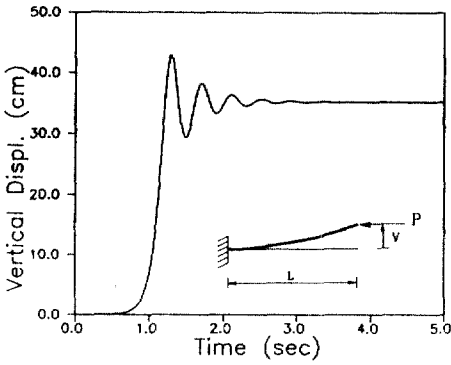
(a)  $\beta_1=0.0, \beta_2=0.0$



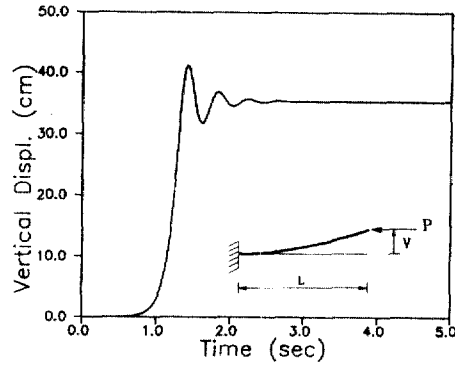
(b)  $\beta_1 = 1.0, \beta_2 = 0.0$



(c)  $\beta_1 = 3.0, \beta_2 = 0.0$



(d)  $\beta_1 = 5.0, \beta_2 = 0.0$



(e)  $\beta_1 = 7.0, \beta_2 = 0.0$

그림 2. Post-divergence behavior of cantilever under conservative force; plot of time versus vertical displ. at free end of cantilever

감쇠하중이 없는 경우(그림 2a)에는 그림에서 보는 바와 같이 자유단의 수직처짐이 48.2cm의 진폭을 가지고 진동하는 것을 볼 수 있다. 감쇠 감쇠하중이 작용하는 경우(그림 2b-2e)에는 시간이 경과함에 따라 자유단의 수직처짐이 축 방향력 9.0kN을 정적으로 작용시켰을 때의 수직처짐(35.27cm)에 진동하면서 서서히 접근한다는 것을 보여준다. 그리고 감쇠계수값이 커짐에 따라 그 경향은 두드러져서 더욱 빠르게 정적 평형상태에 수렴하는 것을 볼 수 있다.

#### 4.2 Follower force를 받는 외팔기둥의 Post-Flutter 거동

선형 안정성 해석<sup>(9)</sup>에 의하면 순수 flutter에 의

해서 불안정상태로 전이하는 비보존력계의 경우에 보존력계의 경우와는 달리 미소한 내적감쇠하중은 불안정성을 증가시키는 방향으로 작용할 수 있다는 것이 밝혀졌다. 본 절에서는 선형이론에 의해서 예측된 감쇠하중의 영향을 고려한 임계하중값을 실제로 외팔기둥에 작용시켜서 비보존력계의 post-

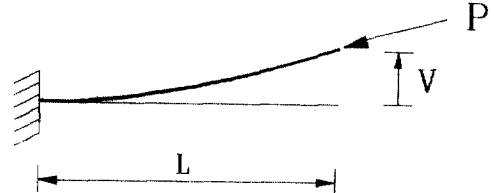
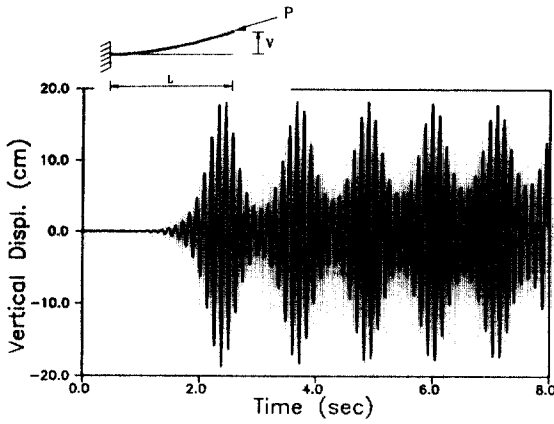
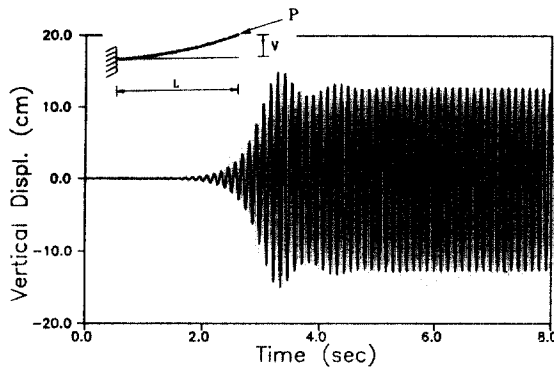


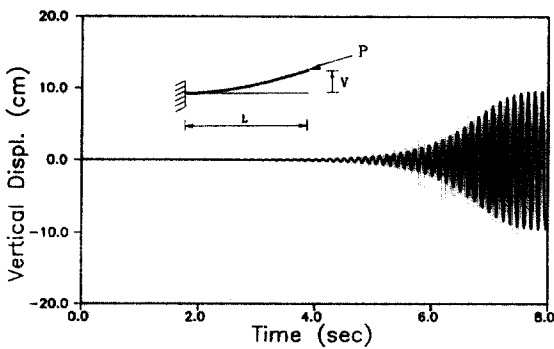
그림 3. Cantilever subjected to non-conservative force



(a)  $\beta_1=0.1, \beta_2=0.0$



(b)  $\beta_1=3.0, \beta_2=0.0$



(c)  $\beta_1=7.0, \beta_2=0.0$

그림 4. Post-flutter behavior of cantilever under follower force; Plot of time versus vertical displ. at free end of cantilever

flutter 거동을 분석하였다. 그림 3은 비보존력을 받

아서 flutter 거동을 일으키는 외팔기동을 나타낸 것이다.

#### 4.2.1 외적감쇠하중을 고려한 비보존력계의 Post-Flutter 거동

그림 4a, b, c들은 각각 감쇠효과를 고려하지 않은 경우에 외팔보(그림 3)의 flutter load<sup>(3)</sup> (70.19 KN)보다 약간 큰 크기의 follower force (71.0 KN)가 외팔보의 자유단에 8.0초 동안 작용할 때  $\beta_2=0.0$ 이고  $\beta_1=0.1, 3.0, 7.0$ 인 경우의 자유단의 수직처짐을 그래프로 나타낸 것이다. 동적해석을 수행할 때 시간이 경과함에 따라 진동현상을 보이면서 진폭이 지수함수 형태로 급격히 증가하는 flutter 현상을 나타내었으며, 진폭이 어느 한도 이상 커지면 외팔보의 휨강성의 증가로 인하여 점차 진폭이 감소하고, 진폭이 감소하면 외팔보의 휨강성도 감소하기 때문에 다시 진폭이 증가하는 기하적인 비선형 거동을 나타내었다. 외적감쇠 계수값이 점차 커지게 되면 진폭의 증가 성향이 둔화되어 최대진폭의 크기가 감소하고 일정한 시간이 지나면 일정한 진폭의 크기로 진동하는 양상을 나타내었다.

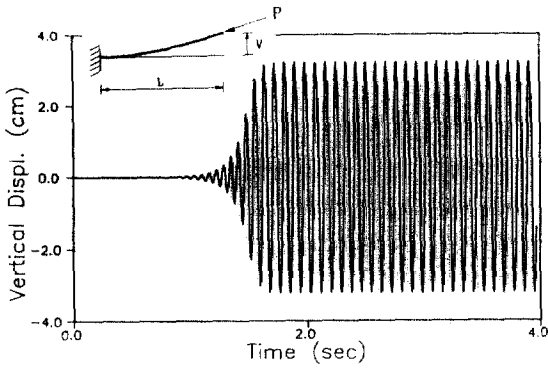
표 1은 외적 감쇠계수값의 증가에 따른 최대진폭의 크기와 최대진폭이 발생할 때의 시간을 표시한 것이다. 이 표에서 외적감쇠하중이 커짐에 따라 최대진폭의 크기는 감소하고 최대진폭이 발생할 때의 시간은 늦어지는 것을 알 수 있다.

표 1. Peak vertical displ. according to the variation of external damping factor at free end of cantilever under follower force

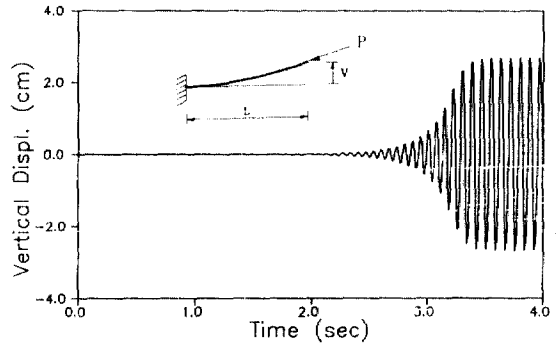
	Peak Displacement(Time)
$\beta_1=0.1, \beta_2=0.0$	18.69cm (2.376 sec)
$\beta_1=3.0, \beta_2=0.0$	15.03cm (3.344 sec)
$\beta_1=7.0, \beta_2=0.0$	9.57cm (7.958 sec)

#### 4.2.2 내적감쇠하중을 고려한 비보존력계의 Post-flutter 거동

밀도가  $0.785 \times 10^{-6} \text{kg/m}^3$ 인 외팔기동의 자유단에 follower force가 작용하고 (그림 3)  $\beta_1=0.0, \beta_2=0.002$ 의 값을 가질 때, 그림 5a, b들은 각각 비보존력의 크기가 57.60KN, 50.4KN인 경우를 나타낸 것이다.

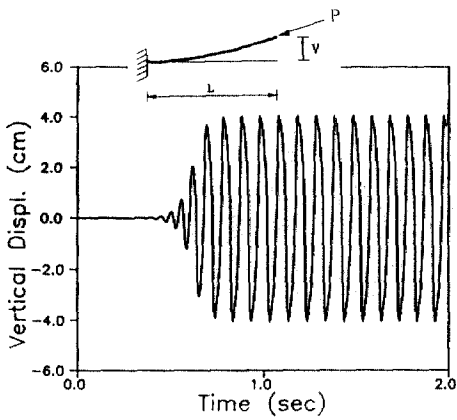


(a)  $\beta_1=0.0, \beta_2=0.002, P=57.6\text{KN}$

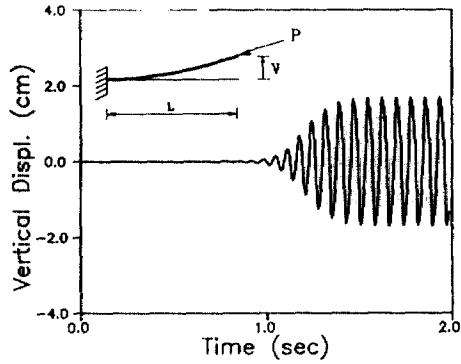


(b)  $\beta_1=0.0, \beta_2=0.002, P=50.4\text{KN}$

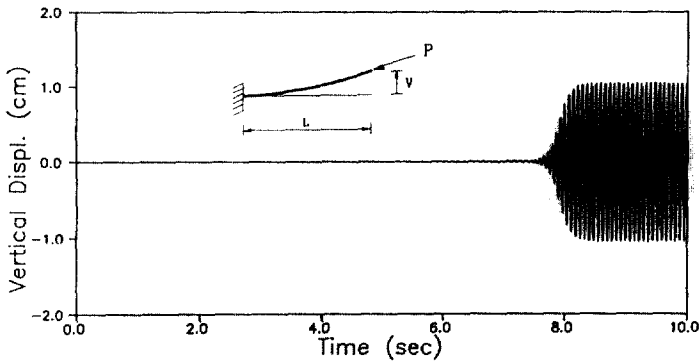
그림 5. Post-flutter behavior of cantilever under follower force; Plot of time versus vertical displ. at free end of cantiler



(a)  $\beta_1=0.0, \beta_2=0.002$



(b)  $\beta_1=0.0, \beta_2=0.006$



(c)  $\beta_1=0.0, \beta_2=0.008$

그림 6. post-flutter behavior of cantilever under follower force; Plot of time versus vertical displ. at free end of cantilever

선형이론에 의하면  $\beta_1=0.0, \beta_2=0.002$ 인 경우에 임계 하중값은 39.136KN으로 계산되며 이 값은 감쇠효과를 고려하지 않는 경우의 임계하중값의 55.8%에 해당한다. 그림 4b에서 보는 바와 같이 내적감쇠효과를 고려하는 경우에 선형이론에서 예측한 바와 같이 follower force의 크기가 50.4KN에서 post-flutter거동을 나타냄을 알 수 있지만 진폭의 크기는 그다지 크지않음을 보여준다.

그림 6a, b, c는 follower force의 크기는 71.0KN,  $\beta_1=0.0$ 인 경우에  $\beta_2=0.002, 0.006, 0.008$ 의 값에 대응하는 post-flutter거동을 나타낸 것이다. 내적감쇠계수값이 커짐에 따라 그림 6은 그림 4의 경우와 유사하게 진폭이 지수함수형태로 증가하다가 기하적인 비선형성과 내적감쇠하중의 영향으로 점차 진폭의 증가성향이 둔화되어 결국 진폭이 일정한 크기로 진동하는 모습을 보여준다.

표 2는 내적 감쇠계수값과 비보존력의 크기변화에 따른 최대진폭의 크기와 최대진폭이 발생할 때의 시간을 표시한 것이다. 이 표에서 내적 감쇠하중이 커지거나 감쇠계수값이 고정되어 있는 경우 ( $\beta_1=0.0, \beta_2=0.002$ )에는 비보존력의 크기가 감소함에 따라 최대진폭의 크기는 감소하고 최대진폭이 발생할 때의 시간은 늦어지는 것을 볼 수 있다.

표 2 Peak vertical displ. according to the variation of internal damping factor at free end of cantilever under follower force.

	Peak Displacement(Time)
$\beta_1=0.0, \beta_2=0.002, P=71.0\text{KN}$	4.07cm(1.080 sec)
$\beta_1=0.0, \beta_2=0.002, P=57.6\text{KN}$	3.23cm(1.852 sec)
$\beta_1=0.0, \beta_2=0.002, P=50.4\text{KN}$	2.69cm(3.632 sec)
$\beta_1=0.0, \beta_2=0.006, P=71.0\text{KN}$	1.69cm(1.622 sec)
$\beta_1=0.0, \beta_2=0.008, P=71.0\text{KN}$	1.05cm(8.432 sec)

## 5. 結 論

본 논문은 보존력계 및 비보존력계에 대하여 감쇠하중의 영향을 포함하는 동적 후좌굴거동을 해석하기 위하여 보존력 및 비보존력을 받는 평면뿔대 구조물의 비선형 매트릭스 운동방정식을 유도하고 Newmark 방법을 사용하여 수치적으로 직접 적분

하므로써 해를 구하였다. 보존력 또는 비보존력을 받는 외팔보의 동적후좌굴 거동을 추적하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 임계하중 ( $P_c$ )보다 더 큰 크기의 축방향력과 감쇠하중을 받는 보존력계의 경우(Post-divergence)에, 처음에 대변위가 발생하고 시간이 경과함에 따라 축방향력에 의한 정적평형상태 (the buckled equilibrium state by the quasistatic axial load)에 진동하면서 접근하는 것을 볼 수 있었다. 이때 감쇠계수값들이 증가하면 그 경향은 두드러져서 더욱 빠르게 정적 평형상태에 수렴하였다.

2) 임계하중 ( $P_c$ )보다 더 큰 비보존력 (follower force)과 감쇠하중을 받는 비보존력계의 경우 (post-flutter)에는, 초기에 진폭이 지수함수형태로 크게 증가하지만 시간이 경과함에 따라 기하적인 비선형성과 내적감쇠하중의 영향으로 점차 진폭의 증가성향이 둔화되어 결국 진폭이 일정한 크기를 유지하면서 진동하였다. 감쇠하중이 커지거나 감쇠계수 값이 고정되어 있는 경우에는 비보존력의 크기가 감소함에 따라 최대진폭의 크기는 감소하지만 최대진폭이 발생할때 까지의 시간은 길어지는 것을 알 수 있었다.

3) 감쇠효과를 무시하는 비보존력계의 임계하중보다는 훨씬 작지만, 미소한 내적감쇠하중을 고려한 경우의 임계하중보다는 큰 크기의 비보존력 (follower force)을 작용시키는 경우에, 초기에는 선형 안정성이론에서 예측한 바와 같이 진폭이 폭발적으로 증가하면서 진동하지만 시간이 경과함에 따라 기하적인 비선형성과 감쇠하중의 영향으로 점차 진폭의 증가성향이 둔화되어 결국 진폭이 일정한 크기를 유지하면서 진동하는 post-flutter거동을 나타내었다.

## 參 考 文 獻

1. H.H.E.Leipholtz, "Stability of elastic systems", Universities Press, Belfast, 1980, pp.312-388
2. J.H.Argyris, K.Straub and Sp. Symeonidis, "Non-linear finite element analysis of elastic systems under non-conservative loading-natural formulation. part II. Dynamic problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 28, 1981, pp.241-



3. 金文榮, 張承弼, “Circulatory force를 받는 平面 뼈대 構造物의 動的 後挫屈 舉動에 關한 研究”, 大韓土木學會 論文集, 제 8권, 제 2호, 1988년 6월, pp13-24
4. 金文榮, 張承弼, “保存力 및 非保存力을 받는 平面 뼈대 構造物의 安定성에 關한 研究”, 韓國 鋼構造學會 論文集, 제 2권, 제 1호, 1990년 2월, pp111-122
5. 金文榮, 張承弼, “減衰效果를 고려한 非保存力系의 安定性 解析”, 大韓土木學會 論文集, 第10卷 第3號

1990년, 9월 pp.57 - 66

6. K.J.Bathe, “*Finite element procedures in engineering analysis*”, Prentice-Hall, 1982, pp.301-406
7. K.J.Bathe, H. Ozdemir, and E.L.Wilson, “*Staic and dynamic geometrical and material nonlinear analysis*”, Strucural engineering laboratory university of Callifornia Berkeley, California, 1974, pp.98-108

(接受: 1990. 8. 8)