大韓土木學會論文集
第10卷 第4號 · 1990年 12月
pp. 25~33

構 造 工 學

連續보의 解析에 관한 새로운 方法-모멘트 分配法의 定式化

A New Approach to the Analysis of Continuous Beams

梁 昌 鉉*
Yang, Chang Hyun

Abstract

The moment distribution method has been widely used for almost sixty years as an approximate method for the analysis of structural frames. The method is to calculate the end moments of structural members by iterative hand calculation.

This study presents developements of closed form formulas which are derived basically from the moment distribution procedures. These formulas may provide simple forms and exact results which would overcome the disadvantages of the conventional moment distribution mothod, that is, approximation of the results and complexity of the procedures of the method.

The proposed formulas may become one of the new procedures for analysis of statically indeterminate frames, and contribute specifically to the effective drawing of influence lines of continuous beams, which will provide a great deal of assistance in practical design of structures.

要 旨

모멘트 分配法은 지난 60年 동안 連續보와 라멘 등의 不靜定構造物의 近似解法으로 널리 사용되어 왔다. 이 方法은 構造部材의 兩端모멘트를 反復的인 手計算으로 算定하는 것이다.

本 硏究는 모메트 分配法을 이용하여 收斂型公式을 展開한 것이다. 이들 公式은 在來式 모멘트 分配法의 短點이라고 할 수 있는 結果의 近似性 및 過程의 複雜性을 克服함으로써 簡單하고도 正確한 解를 提供한다.

여기 提案된 公式들은 不靜定 뼈대의 새로운 解法의 하나가 될 것이며, 특히 連續보의 影響線의 作圖에 效果的으로 寄與함으로써 構造設計의 實務에 큰 도움이 될 것이다.

1. 序 論

不靜定보와 라멘의 解析에 관한 強力한 手段으로 처짐角法이 1915年 提示되었다. 그러나 이 方法으

*正會員 · 仁荷大學校 工科大學 土木工學科 敎授.

로 高次의 不靜定보나 라멘의 材端모멘트의 값을 구하기 위해서는 節點 回轉角에 弦回轉角을 더한 수효만큼의 聯立方程式을 풀어야하는 엄청나게 귀찮거나 實質的으로 不可能에 가까운 作業이 뒤따라야 한다. 따라서 手計算으로는 比較的 낮은 次數의 不靜定보다 라멘을 解析할 수 있을 뿐이다.

1930年 Hardy Cross가 비교적 간단하게 手計算으로 連續보다 라멘의 材端모멘트를 구할 수 있는 모멘트 分配法을 提示하였다. 이 方法은 逐次的인 反復過程에 의하여 材端모멘트값을 얻는 近似解法이다. 모멘트 分配의 순환을 거듭할수록 幾何級數的으로 正解에 收斂하는 長點은 있으나 高次의 不靜定 構造物인 경우에는 모멘트 分配의 循環(cycles)을 훨씬 증가시켜야 한다.

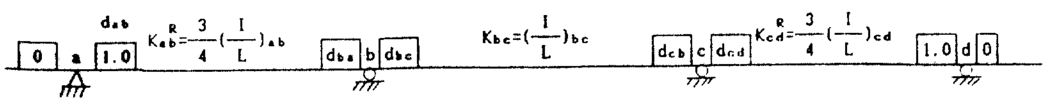
本 硏究의 目標는 近似解法인 모멘트 分配法을 無限級數型으로 展開시킨 다음 이를다시 收斂型 公式으로 定式化 하는데 있다. 이 公式들은 簡單하면서도 正解値를 나타낸다는 特徵이 있다.

모멘트 分配法이 여러 순환을 거듭해야하는 귀찮은 過程을 거쳐 近似解를 얻는 方法이라면 여기 提示하는 方法은 모멘트 分配過程을 定式化하고 이를 이용하여 連續보나 라멘의 材端 모멘트의 正解値를 算定하는 單一過程이라고 할 수 있다.

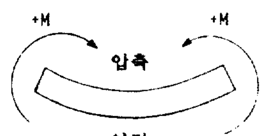
이들 公式은 集中荷重이나 等分布荷重을 받는 연속보와 라멘의 解析에 쉽게 適用 될 뿐만 아니라, 이들 構造物의 支點 모멘트에 관한 影響線의 作圖를 簡單化시키는 큰 長點을 지니고 있음을 알 수 있다.

2. 모멘트 分配過程의 定式化

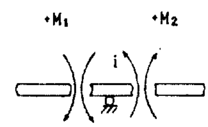
一般的인 定式化 過程은 例示하기 위하여 그림 2. 1(a)와 같은 각 徑間마다 EI가 一定한 3徑間 連續보에서 모멘트 分配過程을 公式으로 변환시키는 理論을 展開하기로 한다. 連續보등에서 3徑間까지 가장 많이 사용하여 왔으며 近來에는 3徑間 以上의 多徑間 連續보도 흔히 볼 수 있는 실정이다.



(a) 3경간 연속보와 분배율 d_{ij}



(b) 보 符號規約



(c) 節點符號規約

그림 2.1 3徑間 連續보와 모멘트 符號規約

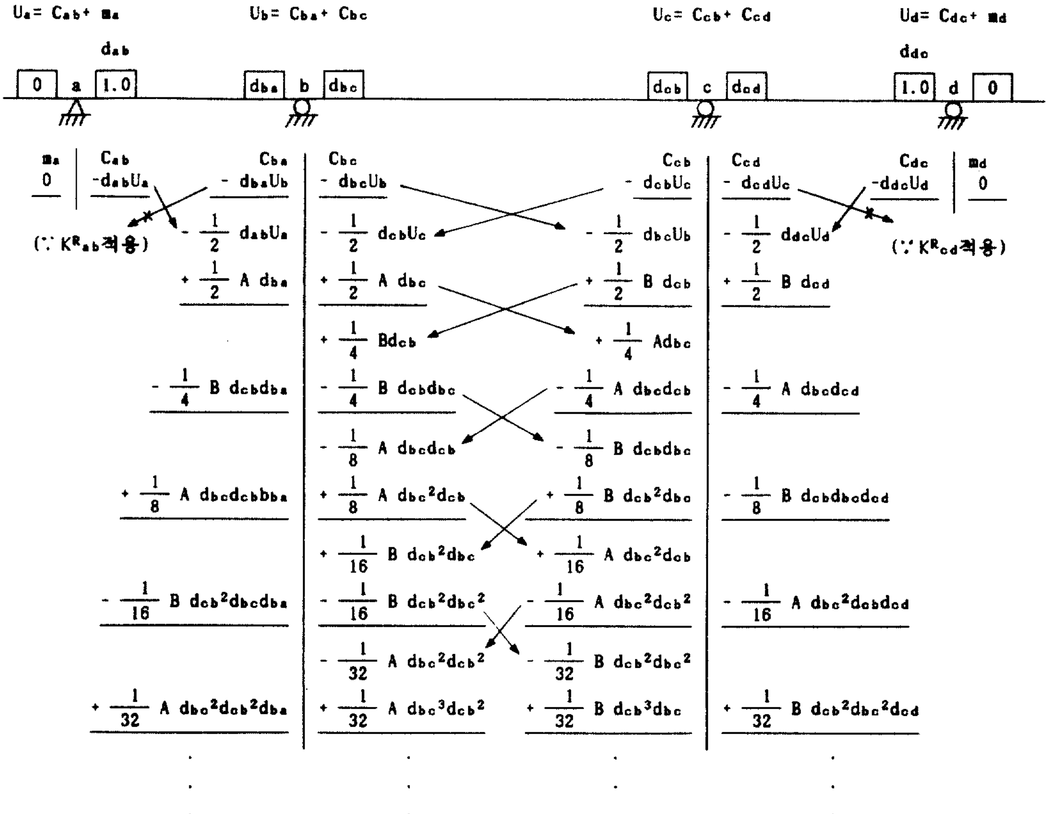
그림 2. 1(a)에서 d_{ij}는 部材 ij에서 i端의 分配率이며 가령 部材 ab에서 b端의 分配率은 $d_{ba}=\dfrac{K^R_{ab}}{K^R_{ab}+K_{bc}}$로 표시할 수 있다. 여기서 K_{ij}는 部材 ij의 相對剛度係數이며 $(\frac{I}{L})_{ij}$로 정의된 것이다. K^R_{ij}는 修正剛度係數이며 가령 부재 ab에서는 a단이 힌지이므로 $K^R_{ab}=\frac{3}{4}(\frac{I}{L})ab$가 된다.

모멘트 分配法에서의 符號規約은 처짐角法에서와 마찬가지로 部材端에서 시계方向으로 回轉하는 모멘트를 (+)측, 節點을 반시계방향으로 회전시키는 모멘트를 (+)로 規定한 그림 2. 1(c)의 節點符號規約을 使用하기로 하며, 支點모멘트는 그림 2. 1 (b)의 보 符號規約을 적용하기로 한다.

2.1 3徑間 連續보의 支點모멘트

2.1.1 支點모멘트에 관한 表現式

그림 2.2는 3徑間 連續보에서 全 區間에 荷重이 作用할 境遇의 모멘트 分配를 記號로 表示한 것이다.



$A = (d_{cb}U_c + d_{ab}U_a)$

$B = (d_{bc}U_b + d_{dc}U_d)$

그림 2.2 모멘트 分配-3徑間 連續보

따라서 그림 2.2의 모멘트 分配過程으로 부터 各 支點의 모멘트에 대한 表現式을 얻을 수 있다. 여기서 支點 i의 모멘트 M_i의 符號는 보 符號規約에 따랐으며 이는 모멘트 分配法에서 支點 i의 오른쪽 재단모멘트의 符號와 一致하는 것이다.

支點 b의 모멘트는 다음과 같이 級數型 공식으로 展開 될 수 있다.

$$M_b=\frac{1}{2}d_{ab}U_a-C_{ba}+D_{ba}U_b-\frac{1}{2}d_{ba}\left(A-\frac{1}{2}d_{cb}B\right)$$

$$\left[1+\left(\frac{d_{cb}d_{bc}}{4}\right)+\left(\frac{d_{cb}d_{bc}}{4}\right)^2+\cdots\right] \qquad (2.1a)$$

그런데 식 (2.1a)의 中괄호내의 表現은 $\left|\frac{d_{cb}d_{bc}}{4}\right|<1$인 等比級數이므로 다음과 같이 簡單한 收斂型 公式으로 고쳐쓸 수 있다.

$$M_b=\frac{1}{2}d_{ab}u_a-C_{ba}+d_{ba}U_b-\frac{1}{2}d_{ba}(\alpha)[(d_{cb}U_c+d_{ab}U_a)-\frac{1}{2}d_{cb}(d_{bc}U_b+d_{dc}U_d)] \qquad (2.1b)$$

여기서 $\alpha = \dfrac{1}{1-\dfrac{d_{bc}d_{cb}}{4}}$ ....(a)

式 (2.1b)는 U_i 項별로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M_b=-C_{ba}+\frac{1}{2}d_{ab}(1-d_{ba}\alpha)U_a+d_{ba}\left(1+\frac{1}{4}d_{bc}d_{cb}\alpha\right)U_b-\frac{1}{2}d_{cb}d_{ba}\alpha U_c+\frac{1}{4}d_{dc}d_{cb}b_{ba}\alpha U_d \qquad (2.1c)$$

또한 支點 c의 모멘트는 다음과 같은 수렴형 公式으로 表現할 수 있다.

$$M_c=-\frac{1}{2}d_{dc}U_d+C_{cd}-d_{cd}U_c+\frac{1}{2}d_{cd}(\alpha)[(d_{bc}U_b+d_{dc}U_d)-\frac{1}{2}d_{bc}(d_{cb}U_c+d_{ab}U_a)] \quad (2.2a)$$

式 (2.2a)도 U_i項 별로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M_c=C_{cd}-\frac{1}{4}d_{ab}d_{bc}d_{cd}\alpha U_a+\frac{1}{2}d_{bc}d_{cd}\alpha U_b-d_{cd}(1+\frac{1}{4}d_{bc}d_{cb}\alpha)U_c-\frac{1}{2}d_{dc}(1-d_{cd}\alpha)U_d \quad (2.2b)$$

式 (2.1)과 (2.2)에서 外側支點 a와 d가 그림 2.2처럼 單純支點이면 分配率 $d_{ab}=d_{dc}=1$이고, 固定端이면 恒常 $d_{ab}=d_{dc}=0$이 된다. 여기서 U_i는 節點 i에서의 固定端 모멘트의 代數合이며 그림 2.2의 上端에 表示되어있는 바와 같다. 그림 2.2에서 m_a, m_d는 各各 a, d端 밖으로 突出된 部分에 作用하는 荷重으로 인한 a, d端의 모멘트이며, 節點符號規約에 따라 m_a는 (+), m_d는 (−)가 된다.

C_{ij}는 部材 ij간에 使用하는 荷重이나 弦回轉角으로 인한 i端의 固定端 모멘트로서 部材 ij의 i端을 時計方向으로 回轉시키면 (+)이다.

만일 그림 2.2에서 左端 a가 固定端이라면 ab간에 荷重이 作用할 境遇에는 固定端 a의 모멘트는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M_a=-\frac{1}{2}M_b+(C_{ab}-\frac{1}{2}C_{ba}) \quad (2.3a)$$

左端 a가 固定端인 境遇 ab徑間안에 荷重이 놓여있지 않을 때에는 固定端 a의 모멘트는 恒常 다음과 같이 表現된다.

$$M_a=-\frac{1}{2}M_b \quad (2.3b)$$

만일 그림 2.2에서 右端 d가 固定端이라면 cd간에 荷重이 作用할 境遇에 固定端 d의 모멘트는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M_b=-\frac{1}{2}M_c-(C_{dc}-\frac{1}{2}C_{cd}) \quad (2.4a)$$

cd徑間에 荷重이 놓여있지 않을 境遇 固定端 d의 모멘트는 恒常 다음과 같이 表現될 수 있다.

$$M_d=-\frac{1}{2}M_c \quad (2.4b)$$

式 (2.1c)나 (2.2b)에서 가령 ab徑間에만 荷重이 作用하는 境遇에는 $U_a=C_{ab}$, $U_b=C_{ba}$, 그리고 $U_c=U_d=0$이 되는 등, 荷重이 作用하지 않는 徑間에 대한 項들을 除去하면 된다.

여기 展開된 支點모멘트에 대한 公式 (2.1c)와 (2.2b)는 簡單한 수렴형 公式으로 되어 있으며 모멘트 分配法과 같은 反復過程도 必要하지 않을뿐만 아니라 結果値도 近似解가 아닌 正解라는 사실이다. 連續보가 多徑間이 될수록 이러한 長點은 두드러지게 나타날 수 있다.

2.1.2 支點모멘트에 관한 影響線

支點모멘트 M_b와 M_c의 影響線을 作圖하는데 式 (2.1c)와 (2.2b)를 그대로 適用하기 위해서 편의상 이들 式을 各 區間마다 荷重이 作用하는 境遇로 再整理하는 것이 바람직하다.

(1)第1徑間 ab사이에 荷重이 作用하는 境遇

$U_a=C_{ab}$, $U_b=C_{ba}$, 그리고 $U_c=U_d=0$이다. 이 境遇 支點 b의 모멘트는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M_b=\frac{1}{2}d_{ab}(1-d_{ba}\alpha)(C_{ab}+m_a)-d_{bc}(1-\frac{1}{4}d_{cb}d_{ba}\alpha)C_{ba}=-d_{bc}(1-\frac{1}{4}d_{cb}d_{ba}\alpha)[C_{ba}-\frac{1}{2}d_{ab}(C_{ab}+m_a)] \quad (2.5)$$

支點 c의 모멘트는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M_c=\frac{1}{2}d_{bc}d_{cd}(\alpha)[C_{ba}-\frac{1}{2}d_{ab}(C_{ab}+m_a)] \quad (2.6)$$

外側支點인 a端의 單純支點이면 $d_{ab}=1$, 固定支點이면 $d_{ab}=0$임을 유의해야한다.

(2)第2徑間 bc사이에 荷重이 作用하는 境遇

$U_b=C_{bc}$, $U_c=C_{cb}$, 그리고 $U_a=U_d=0$ 이다.

支點 b의 모멘트:

$$M=d_{ba}(\alpha)(C_{bc}-\frac{1}{2}d_{cb}C_{cb}) \quad (2.7)$$

支點 c의 모멘트:

$$M_c=-d_{cd}(\alpha)(C_{cb}-\frac{1}{2}d_{bc}C_{bc}) \quad (2.8a)$$

또는

$$M_c=-d_{cd}C_{cb}+\frac{1}{2}d_{bc}d_{cd}(\alpha)(C_{bc}-\frac{1}{2}d_{cb}C_{cb}) \quad (2.8b)$$

(3)第3徑間 cd사이에 荷重이 作用하는 境遇

$U_c=C_{cd}$, $U_d=C_{dc}$, 그리고 $U_a=U_b=0$ 이다.

支點 b의 모멘트:

$$M_b=-\frac{1}{2}d_{cb}d_{ba}(\alpha)[C_{cd}-\frac{1}{2}d_{dc}(C_{dc}+m_d)] \quad (2.9)$$

支點 c의 모멘트:

$$M_c = d_{cb}\left(1-\frac{1}{4}d_{bc}d_{cd}\alpha\right)\left[C_{cd}-\frac{1}{2}d_{dc}(C_{dc}+m_d)\right] \tag{2.10}$$

여기서 外側支點인 d가 單純支點이면 $d_{dc}=1$, 固定支點이면 $d_{dc}=0$ 이다.

式 (2.5)에서 (2.10)까지의 表現式을 利用하여 影響線을 作圖하기 위해서 固定端 모멘트 C_{ij}는 該當區間에 單位荷重 P=1이 作用할 때의 값이라야 한다. 길이 L인 ij區間에서 P=1이 移動할 境遇 이 單位荷重이 i端으로부터 距離 x에 놓여있을때의 固定端모멘트는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C_{ij} &= -\frac{(1)(x)(L-x)^2}{L^2} \\ C_{ij} &= +\frac{(1)(x)^2(L-x)}{L^2} \end{aligned} \tag{2.11}$$

이를 해당 公式에 代入하면 P=1의 位置, 즉, x의 값마다 M_b와 M_c의 값을 얻게된다. 이들 값이 바로 單位荷重 P=1의 作用位置에서의 'M_b나 M_c의 影響線의 縱距'가 되는 것이다.

2.2 4徑間 連續보의 支點모멘트

2.2.1 支點모멘트에 관한 表現式

지금까지 展開된 公式은 3徑間 連續보의 支點의 모멘트에 관한 表現式이지만 다른 徑間數의 連續보에 대해서도 비슷한 過程을 거쳐 支點모멘트에 대한 表現式을 얻을 수 있다. 가령 2徑間 連續보 abc에서는 唯一한 支點모멘트 $M_b = d_{bc}U_b = d_{bc}(C_{ba}+C_{bc})$로부터 쉽게 구할 수 있다.

여기서는 그림 2.3의 4徑間 連續보에 관한 支點모멘트 M_b, M_c, M_d의 表現式을 구하기로 한다.

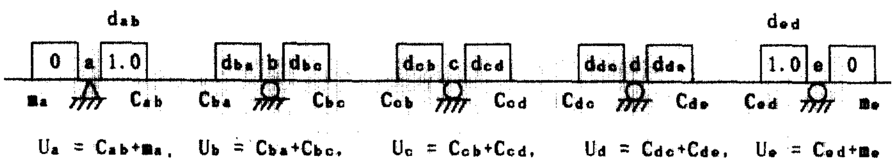


그림 2.3 4徑間 連續보

3徑間 連續보에 대한 모멘트 分配過程을 記號로 表示하여 이로부터 支點모멘트의 表現式을 展開하는것과 비슷한 方法을 利用하면 그림 2.3의 4徑間 連續보에서 各 支點의 모멘트에 관한 表現式을 얻을 수 있다.

지점 b의 모멘트는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} M_b = &\left(-C_{ba}+\frac{1}{2}d_{ab}d_{bc}U_a+d_{ba}U_b-\frac{1}{2}d_{cb}d_{ba}U_c\right) \\ &-\frac{1}{8}(d_{ab}d_{bc}U_a+A_oU_c+d_{ed}d_{dc}U_e)d_{cb}d_{ba}(\alpha_o) \\ &+\frac{1}{4}(d_{bc}U_b+d_{dc}U_d)d_{cb}d_{ba}(\alpha_o) \end{aligned} \tag{2.12a}$$

여기서,

$$\alpha_o = \frac{1}{1-\dfrac{A_o}{4}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (b)$$

$$A_o = (d_{bc}d_{cb}+d_{cd}d_{dc}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (c)$$

式 (2.12a)를 U_i項별로 고쳐쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M_b = &-C_{ba}+\frac{1}{2}d_{ab}d_{bc}\left(1-\frac{1}{4}d_{cb}d_{ba}\alpha_o\right)U_a \\ &+d_{ba}\left(1+\frac{1}{4}d_{bc}d_{cb}\alpha_o\right)U_b-\frac{1}{2}d_{cb}d_{ba}(\alpha_o)U_c \\ &+\frac{1}{4}d_{dc}d_{cb}d_{ba}(\alpha_o)U_d-\frac{1}{8}d_{ed}d_{dc}d_{cb}d_{ba}(\alpha_o)U_e \end{aligned} \tag{2.12b}$$

支點 c의 모멘트는 다음과 같이 表現된다.

$$\begin{aligned} M_c = &C_{cd}-\left(1-\frac{1}{4}d_{dc}\right)d_{cd}U_c-\frac{1}{2}d_{dc}\left(U_d-\frac{1}{2}d_{ed}U_e\right) \\ &+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}d_{dc}\right)d_{cd}(\alpha_o)(d_{bc}U_b+d_{dc}U_d) \\ &-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}d_{dc}\right)d_{cd}(\alpha_o)[d_{ab}d_{bc}U_a+A_oU_c \\ &+d_{ed}d_{dc}U_e] \end{aligned} \tag{2.13a}$$

式 (2.13a)를 U_i項별로 다음과 같이 고쳐쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} M_c = &C_{cd}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}d_{dc}\right)d_{ab}d_{bc}d_{cd}(\alpha_o)U_a \\ &+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}d_{dc}\right)d_{bc}d_{cd}(\alpha_o)U_b-\left(1-\frac{1}{4}d_{dc}\right) \\ &d_{cb}(\alpha_o)U_c-\frac{1}{2}d_{dc}\left[1-\left(1-\frac{1}{4}d_{dc}\right)d_{cd}\alpha_o\right]U_d \\ &+\frac{1}{4}d_{ed}d_{dc}\left[1-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}d_{dc}\right)d_{cd}\alpha_o\right]U_e \end{aligned} \tag{2.13b}$$

支點 d의 모멘트는 다음과 같이 展開될 수 있다.

$$M_d=(C_{de}-\frac{1}{2}d_{ed}d_{dc}U_e-d_{de}U_d+\frac{1}{2}d_{cd}d_{de}U_c)$$

$$+\frac{1}{8}(d_{ab}d_{bc}U_a+A_oU_c+d_{ed}d_{dc}U_e)d_{cd}d_{de}(\alpha_o)$$

$$-\frac{1}{4}(d_{bc}U_b+d_{dc}U_d)d_{cd}d_{de}(\alpha_o) \qquad (2.14a)$$

式 (2.14a)를 U_i項별로 모으면 다음과 같다.

$$M_d=C_{de}+\frac{1}{8}d_{ab}d_{bc}d_{cd}d_{de}(\alpha_o)U_a-\frac{1}{4}d_{bc}d_{cb}d_{de}(\alpha_o)U_b$$

$$+\frac{1}{2}d_{cd}d_{de}(\alpha_o)U_c-d_{de}(1+\frac{1}{4}d_{dc}d_{cd}\alpha_o)U_d$$

$$-\frac{1}{2}d_{ed}d_{dc}(1-\frac{1}{4}d_{cd}d_{de}\alpha_o)U_e \qquad (2.14b)$$

式 (2.12a)에서 (2.14)까지에서 外側支點인 a와 e가 單純支點이면 $d_{ab}=d_{ed}=1$이고, 固定端이면 $d_{ab}=d_{ed}=0$ 이어야한다.

2.2.2 支點모멘트에 관한 影響線

支點모멘트 M_b, M_c, 그리고 M_d의 影響線을 作圖할때 式 (2.12b), (2.13b), 그리고 式(2.14b)를 適用시키려면 各 區間마다 荷重이 作用하는 境遇로 이들 式을 整理하는 것이 必要하다.

(1)第1區間 ab사이에 荷重이 作用하는 境遇

$U_a=C_{ab}$, $U_b=C_{ab}$, 그리고 $U_c=U_d=U_e=0$이다.

$$M_b=-d_{bc}(1-\frac{1}{4}d_{cb}d_{ba}\alpha_o)[C_{ba}-\frac{1}{2}d_{ab}(C_{ab}+m_a)] \qquad (2.15)$$

$$M_c=\frac{1}{2}d_{bc}d_{cd}(1-\frac{1}{4}d_{dc})\alpha_o[C_{ba}-\frac{1}{2}d_{ab}(C_{ab}+m_a) \qquad (2.16)$$

그리고

$$M_d=-\frac{1}{4}d_{bc}d_{cd}d_{de}\alpha_o[C_{ba}-\frac{1}{2}d_{ab}(C_{ab}+m_a)] \qquad (2.17)$$

여기서 外側支點인 a가 單純支點이면 $d_{ab}=1$, 固定端이면 $d_{ab}=0$이다.

(2)第2徑間 bc사이에 荷重이 作用하는 境遇

$U_b=C_{bc}$, $U_c=C_{cb}$, 그리고 $U_a=U_d=U_e=0$이다.

$$M_b=d_{ba}C_{bc}-\frac{1}{2}d_{cb}d_{ba}\alpha_o(C_{cb}-\frac{1}{2}d_{bc}C_{bc}) \qquad (2.18)$$

$$M_c=-d_{cd}(1-\frac{1}{4}d_{dc})\alpha_o(C_{cb}-\frac{1}{2}d_{bc}C_{bc}) \qquad (2.19)$$

그리고

$$M_d=\frac{1}{2}d_{cd}d_{de}\alpha_o(C_{cb}-\frac{1}{2}d_{bc}C_{bc}) \qquad (2.20)$$

(3)第3徑間 cd사이에 荷重이 作用하는 境遇

$U_c=C_{cd}$, $U_d=C_{dc}$, 그리고 $U_a=U_b=U_e=0$이다.

$$M_b=-\frac{1}{2}d_{cb}d_{ba}\alpha_o(C_{cd}-\frac{1}{2}d_{dc}C_{dc}) \qquad (2.21)$$

$$M_c=d_{cb}(1-\frac{1}{4}d_{bc})\alpha_o(C_{cd}-\frac{1}{2}d_{dc}C_{dc}) \qquad (2.22)$$

그리고

$$M_d=-d_{de}C_{dc}-\frac{1}{2}d_{cd}d_{de}\alpha_o(C_{cd}-\frac{1}{2}d_{dc}C_{dc}) \qquad (2.23)$$

(4)第4徑間 de사이에 荷重이 作用하는 境遇

$U_d=C_{de}$, $U_e=C_{ed}$, 그리고 $U_a=U_b=U_c=0$이다.

$$M_b=\frac{1}{4}d_{dc}d_{cb}d_{ba}\alpha_o[C_{de}-\frac{1}{2}d_{ed}(C_{ed}+m_e)] \qquad (2.24)$$

$$M_c=-\frac{1}{2}d_{dc}d_{cb}(1-\frac{1}{4}d_{bc})\alpha_o[C_{de}-\frac{1}{2}d_{ed}(C_{ed}+m_e)] \qquad (2.25)$$

$$M_d=d_{dc}(1-\frac{1}{4}d_{cd}d_{de}\alpha_o)[C_{de}-\frac{1}{2}d_{ed}(C_{ed}+m_e)] \qquad (2.26)$$

여기서 外側支點인 e가 單純支點이면 $d_{ed}=1$, 固定端이면 $d_{ed}=0$이다.

이미 論及된 바와 같이 d_{ij}는 部材 ij에서 i端의 分配率이고, α_o는 式 (b)엣 定義된 常數이다. C_{ij}는 部材 ij에서 i端의 固定端 모멘트이며 影響線을 作圖하기 위해서는 式 (2.11)의 값을 適用하면 된다.

3. 數値例

本 論文에서 提案된 수렴형 公式의 탁월한 長點을 例示하기 위하여 간단한 두개의 例題를 다루기로 한다.

例題 1. 3徑間連續보의 支點모멘트

그림 3.1의 連續보에서 M_b, M_c를 구한 다음 M_a를 구하기로 한다.

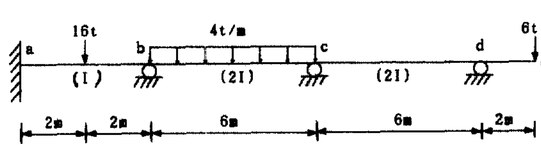


그림 3.1 例題 1의 연속보

剛度係數:

$$K_{ab}=\frac{\ }{4}\rightarrow 3K \quad K_{bc}=\frac{2}{6}=\frac{I}{3}\rightarrow 4K$$

$$K_{cd}^{R}=\frac{3}{4}\left(\frac{2}{6}\right)=\frac{\ }{4}\rightarrow 3K$$

分配率:

$$d_{ab}=0,\ d_{dc}=1$$

$$d_{ba}=\frac{3K}{3K+4K}=\frac{3}{7},\quad d_{bc}=\frac{4}{7},$$

$$d_{cb}=\frac{4K}{4K+3K}=\frac{4}{7},\quad d_{cd}=\frac{3}{7}$$

固定端모멘트:

$$C_{ab}=-\frac{Pab^2}{L^2}=-\frac{16(2)(2)^2}{4^2}-8^{t-m},$$

$$C_{bc}=-\frac{wL^2}{12}=-\frac{4(6)^2}{12}=-12^{t-m}$$

$$C_{ba}=+\frac{Pab^2}{L^2}=+8^{t-m},\quad C_{cb}=+12^{t-m}$$

$$C_{cd}=C_{dc}=0,\quad m_d=-(6^t\times 2^m)=-12^{t-m}$$

不均衡모멘트:

$d_{ab}=0$이므로 U_a를 計算할 必要가 없다.

$$U_b=C_{ba}+C_{bc}=8-12=-4^{t-m}$$

$$U_c=C_{cb}+C_{cd}=12+0=+12^{t-m}$$

$$U_d=C_{dc}+m_d=0-12=-12^{t-m}$$

그리고

$$\alpha=\frac{1}{1-\frac{d_{bc}d_{cb}}{4}}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{4}{7}\right)}=\frac{49}{45}$$

式 (2.1c)로 부터,

$$M_b=-C_{ba}+\frac{1}{2}d_{ab}(1-d_{ba}\alpha)U_a+d_{ba}\Big(1+\frac{1}{4}$$

$$d_{bc}d_{cb}\alpha\Big)U_b-\frac{1}{2}d_{cb}d_{ba}\alpha U_c+\frac{1}{4}d_{dc}d_{cb}d_{ba}\alpha U_d$$

$d_{ab}=0,\ d_{dc}=1$이므로

$$M_b=-8+0+\left(\frac{3}{7}\right)\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{49}{45}\right)\right]$$

$$(-4)-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{49}{45}\right)(+12)$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{49}{45}\right)(-12)$$

$$=-12.267^{t-m}$$

式 (2.2b)로부터,

$$M_c=C_{cd}-\frac{1}{4}d_{ab}d_{bc}d_{cd}\alpha U_a+\frac{1}{2}d_{bc}d_{cd}\alpha U_b-d_{cd}$$

$$\Big(1+\frac{1}{4}d_{bc}d_{cb}\alpha\Big)U_c-\frac{1}{2}d_{dc}(1-d_{cd}\alpha)U_a$$

또한 $d_{ab}=0,\ d_{dc}=1$이므로

$$M_c=0-0+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{49}{45}\right)(-4)-\left(\frac{3}{7}\right)$$

$$\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{49}{45}\right)\right](+12)-\frac{1}{2}$$

$$\left[1-\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{49}{45}\right)\right](-12)$$

$$=-2.933^{t-m}$$

式 (2.3a): $M_a=-\frac{1}{2}M_b+\left(C_{ab}-\frac{1}{2}C_{ba}\right)$

$$=-\frac{1}{2}(-12.269)+\left(-8-\frac{1}{2}\times 8\right)$$

$$=-5.867^{t-m}$$

아무리 多徑間인 境遇라도 이 計算過程은 마찬가지이므로, 多徑間일수록 모멘트分配法에 비해서 더 簡單하고 結果値는 正解라고 할 수 있다.

例題 2. 支點모멘트 M_b와 M_c의 影響線

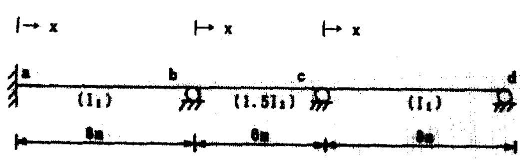


그림 3.2 例題 2의 連續보

剛度係數:

$$K_{ab}=\frac{I}{8}\rightarrow 4K,\quad K_{bc}=\frac{1.5\ I}{6}\rightarrow 8K,$$

$$K_{cd}^{R}=\frac{3}{4}\left(\frac{I}{8}\right)\rightarrow 3K$$

分配率:

$$d_{ba}=\frac{4}{4+8}=\frac{1}{3},\quad d_{cb}=\frac{8}{8+3}=\frac{8}{11}$$

$$d_{bc}=\frac{2}{3},\quad d_{cd}=\frac{3}{11},\quad d_{dc}=1.0,\quad d_{ab}=0$$

固定端 모멘트:

$$C_{ab}=-\frac{P(a)(b)^2}{L^2}=-\frac{(1)(x)(8-x)^2}{8^2}$$

$$=-\frac{1}{64}(x)(8-x)^2=C_{cd}$$

$$C_{ba}=+\frac{P(a)^2(b)}{L^2}=\frac{1}{64}(x)^2(8-x)=C_{dc}$$

$$C_{bc}=-\frac{1}{36}(x)(6-x)^2,\quad C_{cb}=\frac{1}{36}(x)^2(6-x)$$

ab間에 荷重 作用時:

$$d_{ab}=0, \quad \alpha=\frac{1}{1-\frac{d_{bc}d_{cd}}{4}}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}(\frac{2}{3})(\frac{8}{11})}$$

$=\frac{33}{29}$ 이므로

式 (2.5) : $M_b=-d_{bc}(1-\frac{d_{cb}d_{ba}}{4}\alpha)(C_{ba})$

$$=-\frac{9}{928}(x)^2(8-x)$$

式 (2.6) : $M_c=\frac{1}{2}d_{cb}d_{ba}\alpha(C_{ba})=\frac{2}{928}(x)^2(8-x)$

$$=-\frac{2}{9}M_b$$

bc間에 荷重 作用時:

式 (2.7) : $M_b=d_{ba}\alpha(C_{bc}-\frac{1}{2}d_{cb}C_{cb})=\frac{-11}{2088}$

$$(x)(6-x)(12-\frac{14}{11}x)$$

式 (2.8b) : $M_c=d_{cd}C_{cb}+\frac{1}{2}d_{bc}d_{cd}\alpha(C_{bc}-\frac{1}{2}d_{cb}C_{cb})$

$$=-\frac{1}{132}(x)^2(6-x)-\frac{1}{696}(x)(6-x)$$

$$(12-\frac{14}{11}x)$$

cd間에 荷重 作用時 : $d_{dc}=1$

式 (2.9) : $M_b=-\frac{1}{2}d_{cb}d_{ba}\alpha(C_{cd}-\frac{1}{2}C_{dc})$

$$=\frac{1}{928}(x)(8-x)(16-x)$$

式 (2.10) : $M_c=d_{cb}(1-\frac{1}{4}d_{bc}d_{cd}\alpha)(C_{cd}-\frac{1}{2}C_{dc})$

$$=-\frac{5}{928}x(8-x)(16-x)=-5M_b$$

그림 3.3은 표 3.1의 내용을 나타낸 것이다.

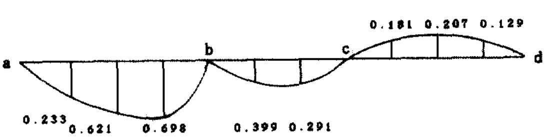
M_b의 影響線의 縱距는 式 (2.5), (2.7), (2.9)에 各各 원하는 x의 값만 代入한 것이고, M_c의 影響線의 縱距는 式 (2.6), (2.8b), (2.10)에 各各 x의 값을 代入한 것에 不過하다.

또한 M_a의 影響線은 ab間에 荷重이 作用하는 境遇에는

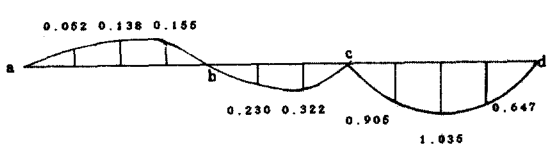
$M_a=-\frac{1}{2}M_b$로 구할 수 있다. 기타의 影響線을 구하는 것은 靜力學的인 問題에 不過하다.

표 3.1 影響線의 縱距

荷重區間 \ x(m)		2	4	6	8	備考
M_b (t·m)	ab	−0.233	−0.621	−0.698	0	式 (2.5)
	bc	−0.399	−0.291	0	−	式 (2.7)
	cd	+0.181	+0.207	+0.129	0	式 (2.9)
M_c (t·m)	ab	+0.052	+0.138	+0.155	0	式 (2.6), $-\frac{2}{9}M_b$
	bc	−0.230	−0.322	0	−	式 (2.8b)
	cd	−0.905	−1.035	−0.647	0	式 (2.10), $-5M_b$



(a) M_b의 影響線



(b) M_c의 影響線

그림 3.3 例題 2의 M_b와 M_c의 影響線

5. 結 論

모멘트 分配法 그 自體는 逐次的인 反復過程에 의해 라멘이나 連續보의 材端모멘트의 값을 구하는 近似解法이다.

그러나 모멘트分配의 순환(cycle)으로 인한 복잡성과 近似解라는 短點을 극복하기 위하여 각 徑間마다 均一斷面인 連續보의 解析에 대한 모멘트 分配法의 定式化를 시도하여 다음과 같이 結論을 얻었다.

1) 實務에서 흔히 接하게 되는 2, 3, 4徑間 連續보에서 각 支點 모멘트를 구하는 경우에 모멘트分配過程을 간단한 收斂型 公式으로 表現할 수 있으며 이들 公式은 바로 각 지점 모멘트에 대한 완전

한 正解를 나타낸다.

2) 여기서 提示된 公式들은 一般荷重을 받는 연속보에서 支點모멘트의 正解値를 쉽게 算定할 수 있을 뿐만 아니라 더 나아가 연속보의 影響線을 作圖하는데 直接的이고도 效果的인 方法이 될 수 있다는 큰 長點을 지니고 있다.

근래 實務에서 흔히 볼 수 있는 5경간 이상의 連續보의 解析이나 가로흔들이(sidesway)가 있는 라멘등의 解析에 쉽게 適用되도록 모멘트 分配過程을 定式化 할 수 있을 것이며 本 論文에 이어 곧 後續될 豫定이다. 이는 특히 連續보나 라멘의 特定機能에 대한 影響線의 作圖를 훨씬 용이하게 할 것이다.

謝 辭

本 論文은 韓國科學財團의 1990年度 基礎硏究費 支援에 의한 硏究結果로서 그 財政的 支援에 感謝드린다.

(接受:1990. 7. 19)