

직교분해법에 의한 측지망의 조정

Network Adjustment by Orthogonal Decomposition

이 영 진* · 이 석 찬**
Lee, Young Jin · Lee, Suck Chan

Abstract

Orthogonal decomposition technique, not using normal equation, but using observation equation directly, is accepted for adjusting the geodetic network in this paper.

The results of study show that the technique is the numerically stable and powerful method in network adjustment by inner constraints or weighted position parameters. Also, it is suitable to middle sized-network and is applicable to Cholesky Factor in the normal equation system.

요 旨

이 논문은 정규방정식을 사용하지 않고서 관측방정식으로부터 직접 직교분해법을 이용하여 측지망의 조정을 하는 데 목적이 있다.

연구결과, 이 방법은 자유망이나 가중측점조건에 의한 망조정의 경우에 있어서도 효과적으로 안정된 해를 제공하고 정규방정식에서의 Cholesky factor를 활용할 수 있는 등 중규모의 망조정에 적합함을 보여 주고 있다.

1. 서 론

측지분야에서 조정계산에 보편적으로 사용되고 있는 최소제곱법은 1783년 P. S. Laplace가 기본 확률함수를 제시하고 1801년 C. F. Gauss가 미지량보다 측정량이 많을 때 최확치를 구하기 위하여 제안한 것이며, 최소제곱법이라는 용어는 Legendre가 Gauss 이론을 소개할 때 1806년 최초로 부여한 것이다⁽¹⁵⁾.

측지망 조정계산에서는 먼저 개개의 측정량에 대응되는 비선형 모델식을 선형화하여 관측방정식을 작성하고 필요에 따라 정규방정식의 해를 구한다. 이때 Cholesky 방법이 보편적으로 사용되고 있으며 제곱근의 계산을 피하기 위한 L-D-U 분해법, 즉 수정 Cholesky 방법이 이용되고 있다.

그러나 이 소거법은 행렬의 크기가 증가함에 따

*正會員 · 한양대학교 공과대학 강사
**참여회원 · 한양대학교 공과대학 교수

라 계산오차가 누적되는 등의 끝처리오차⁽¹⁰⁾가 발생하며 종종 특이해에 준하는 형태가 나타나기 때문에 회박행렬(sprase matrix)의 기법⁽¹¹⁾과, 행이나 열의 축척계수를 구하거나 계산오차의 누적을 막기 위한 기준화 기법(pivoting)등⁽¹²⁾이 채택되기도 한다.

이는 관측방정식의 경우에 A의 고유값을 σ 라고 할 때 최대고유값비(condition number)는

$$k(A) = \sigma_{\max} / \sigma_{\min} \quad (1)$$

이지만 정규방정식의 경우에는 $k(A^T A) = k^2(A)$ 이 되어 불량상태의 가능성이 대단히 크기 때문이다.

이러한 이유에서 전산과학 분야에서는 가장 안정된 해를 제공하는 것으로 알려진 직교분해법을 최소제곱해에 사용하고 있다. 그러나 측지분야에서는 소거법에 비하여 경험축척이 낮고 연산량이 보통 약 2~3배, SVD방법은 약 6~10배 증가되는 등의 이유⁽¹²⁾ 때문에 보편적으로 사용되지 못하고 있으나 직교분해법이 우수하다는 사실에 대해서는 인식을 같이 하고 있다⁽¹⁰⁾.

본 연구에서는 정규방정식을 사용하지 않고서 관측방정식으로 부터 곧바로 해를 구할 수 있는 직교분해법을 도입하여 측지망의 조정에 적용코자 하였으며 조정원점(datum)의 변화에 따른 특성 등을 분석하는 데 목적이 있다.

2. 직교분해법과 최소제곱해

최소제곱해는 일반적으로 다음과 같이 표현된다.

$$\text{minimize } \|AX - b\|_2 \quad (2)$$

이때 b는 측정량 L에 대응되는 량으로서 직교분해법의 방법과 소거법을 구분하기 위하여 사용한 기호이다. 식(2)에서 A와 b에 각각 직교행렬 Q를 곱하면 다음의 형태로 변환시킬 수 있다.

$$\text{minimize } \|(Q^T A)X - (Q^T b)\|_2 \quad (3)$$

그러므로 직교행렬을 이용한 최소제곱법에서는 구조적으로 단순한 형태이고 사용하기 편리한 형태로 Q를 어떻게 구하느냐에 초점이 모아지게 된다. 즉, QR분해법이 필요하며 Q를 구하는 것이 최소제곱법의 주안점이 된다.

SVD방법이 안정성면에서 가장 우수한 것으로 알려지고 있으나 계산량과 기억용량의 면에서 소규모의 망에 적합하고 중규모 이상에서는 여러가지 제

약이 따른다. 특히 오차분석을 위해 공분산 행렬을 구해야 하는 점이 고려되어야 한다.

회박행렬의 기법을 적용하는 데는 Givens 방법이 효과적인 것으로 연구결과가 제시되고 있으며 초대규모 측지망에는 Householder 방법보다 우수한 것으로 나타나고 있다^(7, 10, 11).

가장 간편한 Householder 방법을 할때 유클리드 길이가 1을 갖는 벡터 W에 대해 Householder reflection⁽¹³⁾은 다음 형태가 된다.

$$H = I - 2WW^T \quad (4)$$

$$W = \frac{1}{\sqrt{2s(s + |X_k|)}} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ X_k + \text{sign}(X_k)s \\ X_{k+1} \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \quad (5)$$

그러므로, 각 벡터에 대해 각 단계별 H_i 를 구하면,

$$H_{n-1} H_{n-2} \cdots H_1 A = R \quad (6)$$

의 형태가 되므로 R은 위상각형 행렬의 형태로 만들 수 있다. 식(6)에 H_i 를 각 변의 앞에 곱해주면 식(4)에서 H의 성질로 부터,

$$A_1 = H_2 H_3 \cdots H_{n-1} R \quad (7)$$

즉,

$$A = QR \quad (8)$$

이때 Q는 직교행렬이 된다. 이 방법은 소거법과는 달리 $H^T H = I$ 이므로 단계별로 유클리드 노름이 항상 같게 되어 오차누적에 대한 계수(growth factor)가 작용되지 않기 때문에 기준화가 필요없다.

여기서 직교분해법을 최소제곱해법으로 사용할 때 중요한 성질^(10, 13)을 발견할 수 있다.

$$A = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

의 형태이므로 정규방정식으로 구성해 보면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & \end{bmatrix} = [R^T \ 0^T] Q Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= R^T R \end{aligned} \quad (10)$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & \end{bmatrix}^T b = [R^T 0^T] (Q^T b) \quad (11)$$

식(9)의 R은 Cholesky factor R과 동일함을

알 수 있다. 또한 식(11)은 Q의 n개 요소를 갖는 $(Q^T b)_R$ 을 사용할 수 있으므로,

$$(R^T R)X = R^T(Q^T b)_R \quad (12)$$

$$RX = (Q^T b)_R \quad (13)$$

인 식이 된다. 그러므로 QR 분해에서 나온 결과를 곧바로 기존의 방법에 적용할 수 있는 장점을 갖게 된다. 또한 $(Q^T b)_R$ 는 Householder 변환을 수행할 때 b를 하나의 열벡터로 고려하면 곧바로 변환된 결과가 나타나므로 이를 이용하면 효과적이다.

이때의 미지량 X는 식(13)의 위삼각행방정식(upper triangular system)으로부터 쉽게 구할 수 있으며, 공분산행렬이 필요한 경우에는 삼각행렬의 역행렬을 구해서 변환하면 된다. 즉,

$$C_X = (A^T A)^{-1} = (R^T R)^{-1} = R^{-1}(R^{-1})^T \quad (14)$$

또한 오차전파법칙에 따라 측정요소에 대한 공분산행렬은 다음과 같이 구해진다.

$$C_L = AC_X A^T = A(R^T R)^{-1} A^T = (AR^{-1})(AR^{-1})^T \quad (15)$$

3. 관측방정식

관측방정식은 거리 관측방정식, 방향 관측방정식, 각 관측방정식, 방위각 관측방정식, 가중측점방정식 및 추가제약조건 방정식을 채용하고 있으며^(2, 8, 16, 17, 20, 22), 이하에서는 관측방정식에 대해 계수행렬의 요소값을 축약된 형태로 나타냈다.

(1) 거리 관측방정식

$$\frac{dX}{D^2} X = \frac{(O-C)}{D} + \frac{V}{D} \quad \left(\frac{\sigma_d}{D} \right) \quad (16)$$

(2) 각, 방향, 방위각 관측방정식

$$\frac{dX}{D} X = \frac{(O-C)}{\rho} + \frac{V}{\rho} \quad \left(\frac{\sigma_a}{\rho} \right) \quad (17)$$

(3) 가중측점 방정식

$$1X = (O-C) \quad (\sigma_x) \quad (18)$$

(4) 추가 제약조건 방정식

$$BX = c \quad (1) \quad (19)$$

이상에서 우측 ()안에 있는 사항은 표준오차 또는 표준오차를 정규화한 것이다. 거리 관측방정식은 거리로 나누어 무차원량이 되도록 하였으며 각의 경우에는 라디안 단위가 되도록 하였다. 이렇게 하면 거리와 방정식의 계수에 대한 크기가 거의 동등하게 되어 k(A)가 작아지므로 안정된 해를 제공할 수 있다. 방향 관측방정식의 경우 식(17)의 우

변에 표정량 Z가 추가된다. 식(16)~식(19)에서 다음과 같은 축약관측방정식(reduced observation equation)⁽²³⁾을 구성할 수 있다면 더욱 간편하게 처리할 수 있다.

$$\sqrt{P}AX = \sqrt{PL} + \sqrt{PV} \quad (20)$$

그러므로 측정량의 표준오차를 각 항에 나누어 주는 형태가 되는데

$$p_i = \sigma_o^2 / \sigma_i^2 \quad (21)$$

이므로 계산능력을 향상시키기 위하여 프로그램 내부적으로 적당한 σ_o 를 사용하고 다시 환원하는 기법을 도입하였다.

추가제약조건 방정식의 경우 식(19)를 직접 사용한다면 좌표값이 대단히 큰 수치를 갖기 때문에 overflow상태⁽⁶⁾에 도달하게 된다. 따라서 다음 두 단계의 표준화 과정을 사용하였다. 먼저 초기치 x_i^0, y_i^0 대신에 망의 중심을 (엄밀하게는 제약점에 대한 무게중심)원점으로 하여 x_i, y_i 를 사용한다. 즉, w개 점에 대해,

$$x_i = x_i^0 - (\sum x_i^0) / w \quad (22)$$

$$y_i = y_i^0 - (\sum y_i^0) / w \quad (23)$$

다음 단계로서는 B대신 직교화 방법을 통해 B_n 을 사용한다. 이렇게 하면 값이 큰 좌표치가 표준화된 상태로 되어 해법이 용이하다.

1개의 측정량에 대해 각각 1개씩의 관측방정식이 구성되는데 이 행벡터는 최대 6개 이내의 0이 아닌 요소를 갖는다.

4. 조정 프로그램

이 프로그램은 고밀도 측정망의 결합조정에 적합한 기능을 갖는 중규모 크기(300점 규모)의 평면망 조정을 목적으로 하고 있으며 안정된 해를 제공하면서도 우리나라 측지망의 실정에 맞도록 설계되었다.

주 프로그램에서는 데이터 입력과 필요한 서브프로그램의 호출기능을 가지며 프로그램 전체의 실행을 통제하도록 되어 있다. 주 프로그램에 입력되는 내용은 다음과 같다.

- 데이터의 분류명칭 및 작업년도
- 좌표계의 원점
- 고정점, 가중측점, 제약점, 미지점의 초기좌표
- 가중측점의 기존좌표와 표준오차
- 작업규정의 제한값

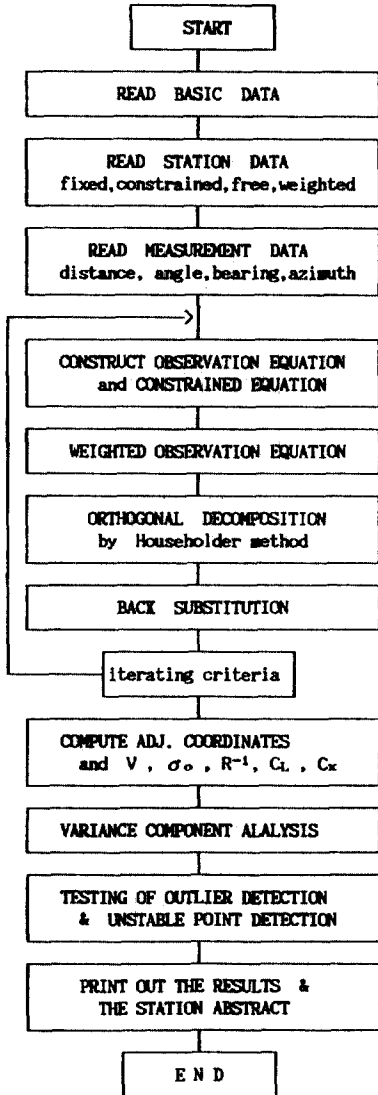


그림 1. 흐름도

- 반복회수 및 출력기능의 통제사항

프로그램 언어는 FORTRAN 77을 사용하였으며 VAX-8700시스템(주기억용량 32MB)을 통해 처리되었다. 프로그램내의 모든 연산과 실행은 주기억장치 내에서 처리되도록 구성되어 있다.

그림 1은 처리흐름도를 나타내고 있는데 출력기능은 필요에 따라 제한될 수 있도록 편성되어 있다. 관측방정식은 컴퓨터 용량을 절약할 수 있도록 회박행렬의 기법을 사용하여 설계행렬을 저장토록 하였던 바 RR(C)O(Row-wise Represent Com-

plete Ordered)의 형태를 사용하였다. 이 방법은 요소의 위치를 나타내는 부분과 요소값이 기억되는 부분으로 나뉘어지는데 Pissantezky(1984)의 알고리즘⁽⁹⁾이 적용되었다.

직교분배법은 Householder 직교화 방법을 채용하였으며 Hager(1988)의 알고리즘⁽¹⁰⁾을 수정하여 사용하였다. 이 과정은 컴퓨터 기억용량과 계산기의 대부분을 차지하게 된다.

그림 2는 QR 서브프로그램에서 축약관측방정식의 직교분해과정을 도시한 것이며, (1)은 축약관측방정식의 계수를 보여 주고 있는데 열벡터 단위로 순차적으로 정규화해 나가면 (2)의 단계에서와 같이 윗부분에 R의 요소, 좌측부분에 Q 및 남아있는 변형된 요소값이 나타나며, 최종적인 (3)에서와 같이 R이 구성된다. 이 R이 Cholesky factor와 같은 값이다 실제적으로는 관측방정식의 L에 해당되는 벡터도 직교화 과정에 포함시킴으로서 효율적으로 처리되도록 하고 있다.

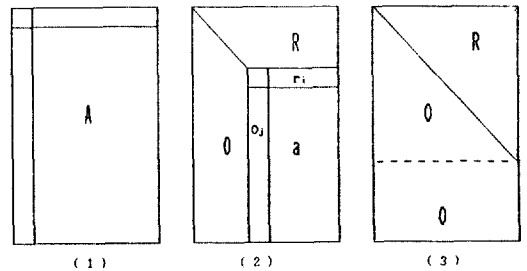


그림 2. R의 분해과정

직교분해된 결과는 식(13)과 같은 삼각행렬에 의한 연립방정식이 된다. 그러므로 미지량 X를 후방대이의 방법(back substitution)을 통해 구하게 된다.

여기서 관측방정식은 비선형모델을 선형화한 것이므로 초기좌표로부터 반복계산이 필요하며 계산 완료의 기준⁽²⁾으로는 다음을 사용하였다.

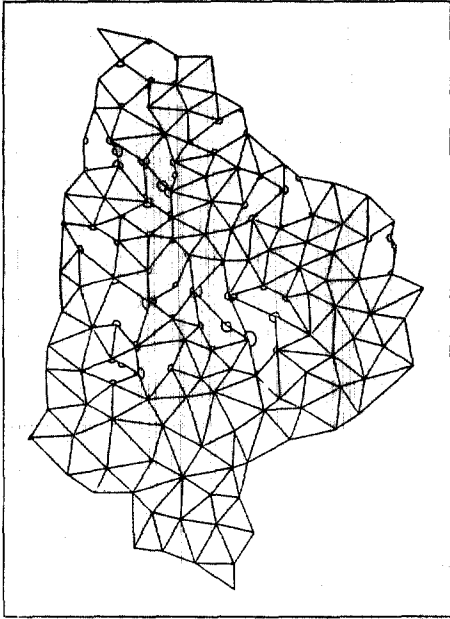
- 좌표 보정량에 대한 평균제곱근 보정량

$$\left[\frac{\sum \Delta X^2}{n} \right]^{1/2} \leq 0.001, \left[\frac{\sum \Delta Y^2}{n} \right]^{1/2} \leq 0.001 \quad (24)$$

- 최초의 계산을 제외한 반복수가 4를 초과할 때.

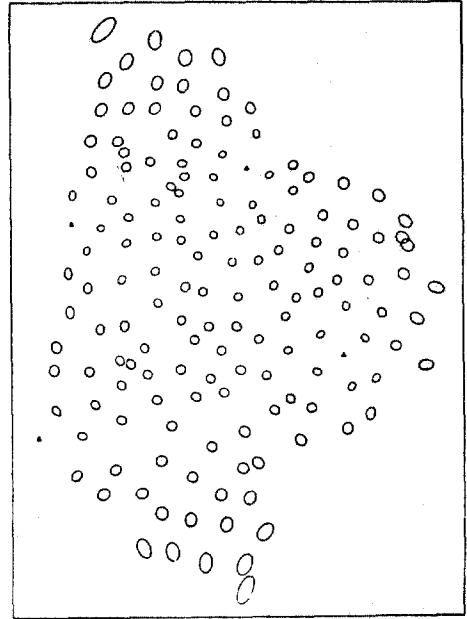
- 두번째 계산에서 수렴조건이 만족되지 않을 때.

이밖에 오차분석을 위한 공분산행렬 및 전파, 분산요소의 추정⁽⁶⁾, 과대오차의 검출⁽³⁾, 상대정밀도의 평가⁽⁴⁾, 변동점 검출 등⁽⁵⁾을 위한 서브프로그램이 구성되었다.



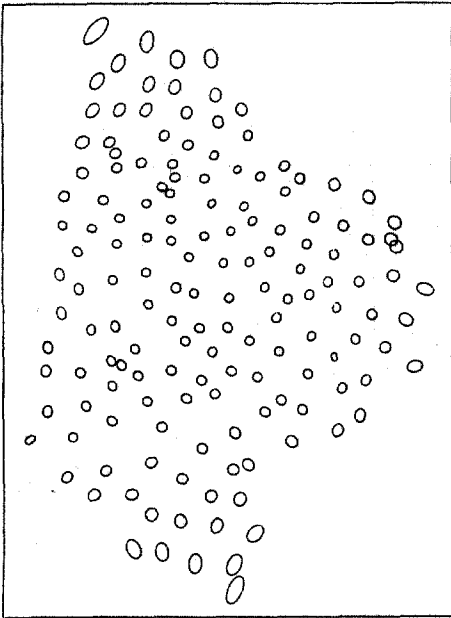
CONFIGURATION OF NET

그림 3. 테스트망도



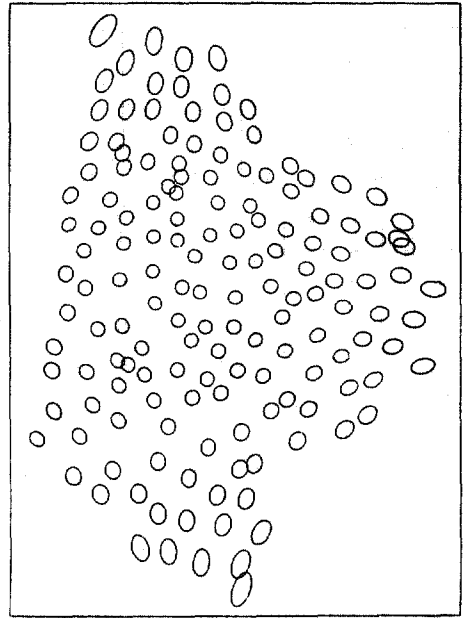
FROM ELLIPSE

그림 5. 오차타원(자유점)



FROM ELLIPSE

그림 4. 오차타원(고정점)



FROM ELLIPSE

그림 6. 오차타원(가중축점)

5. 적용 예

본 연구에서 적용한 테스트망은 1987년 국립지리원에서 측정한 2차 정밀기준점(망으로서 152점 규모이며, 삼면방식과 트래버스 방식을 혼용한 혼합망의 형태이다.

그림 3은 테스트망도를 보여 주고 있으며 그림 4에서는 1차점을 고정점으로 하는 고정망에 대한 오차타원을 보여주고 있다. 또한 그림 5는 자유망의 조건에서 부분적인 $X^T X = \min$ 이 되는 제약망 조정결과를 나타내며, 그림 6의 경우에는 고정점에 대한 사전표준오차를 가중측점의 조건으로 하여 조정된(가중측점조건) 오차타원을 보여준다.

여기서 가중측점망은 고정망이나 제약망의 경우보다 1차 기준점의 오차에 대한 영향이 누적되어 나타남을 알 수 있다. 세 경우 모두 과대오차의 검출을 실시하였는 바 σ_0 의 추정치에 대한 χ^2 검정을 실시한 후 허용한계 내에 있기 때문에 $\sigma_0=1$ 을 사용한 오차타원이 도시되어 있다.

또한 직교분해법을 적용하면 공분산행렬 C뿐만 아니라 미지량 X도 효율적으로 구해지고 있음을 알 수 있다.

6. 고 찰

직교분해법이 갖는 최소제곱해의 고유특성이 측지망에 나타나고 있는데 일반적으로 랭크부족이 존재할 경우에는 Cholesky 방법을 적용할 수 없다. 자유망의 관점에서 본다면 SVD 방법이 안정성면에서 가장 효과적이지만 다른 방법보다 6배 이상의 연산량이 필요하고 정규방정식에 의한 Mittermayer 해법에서도 상당한 연산량이 필요하다.

표 1을 종합해 볼 때 랭크부족인 경우 추가제약조건식을 사용한다면 최대 4개의 관측방정식이 늘어날 뿐이므로 자유망, 제약망의 경우에서 가장 타당한 것으로 보여진다.

표 2에서는 추가제약조건식을 이용할 때 정규방정식의 경우와 관측방정식에 의한 직교분해법의 경우(본 연구의 방법)를 비교하고 있으며 직교분해법의 특징이 파악될 수 있다.

-자유망 뿐 아니라 제약망 조정 및 가중측점망의 조정이 가능하다.

-최대 고유값비가 낮으므로 안정성이 우수하다.
-미지수에 대한 연산량은 정규방정식의 경우와 동일하다.

-공분산행렬 계산에서 연산량이 추가로 발생되지만 Cholesky factor를 활용할 수 있으므로 오차전파의 계산에 효과적이다.

-해법에 회박행렬의 기법을 사용하는데 어려움이 있으므로 기억용량의 면에서 중규모 측지망(미지수 1000이하)에 적합하다.

-방정식의 수를 가능한 한 적게 하는 것이 좋으므로 독립된 방향측정의 경우에도 각 관측방정식을 사용하는 것이 효과적이다.

표 1. 조정방법별 연산량 비교($m \geq n$)

구분	조정방법	X	Q_0 추가	랭크부족의경우
정규방정식	Cholesky분해법	$\frac{mn^2}{2} + \frac{n^3}{6}$	$\frac{n^3}{3}$	불가능
	Mittermayer해법	$\frac{mn^2}{2} + \frac{3n^3}{2}$	n^3	자유망
	추가제약조건식	$\frac{(m+4)n^2}{2} + \frac{n^3}{2}$	-	자유망, 제약망
관측방정식	추가제약조건식* (본 연구)	$(m+4)(n+1)^2 - (n+1)/3$	$\frac{n^3}{3}$	자유망, 제약망
	SVD분해법	$2mn^2 + 4n^3$	$\frac{n^3}{2}$	자유망

* Householder분해법의 경우임

표 2. 추가제약조건식을 이용한 경우 비교*

방법(식)	X	Q_0 추가	최대고유값비	비 고
정규방정식	$1.33n^3$	-	$k^2(A)$	
관측방정식 (본연구)	$1.32n^3$	$0.32n^3$	$k(A)$	R활용

*본 연구의 경우 $m=1.65n$ 임.

7. 결 론

직교분해법을 이용하여 측지망 조정을 실시한다면 최소제곱해는 물론이고 공분산행렬을 안정적으로 구할 수 있기 때문에 과대오차의 검출, 분산요소값의 추정 등 망의 해석 뿐만 아니라 실용성과의 산출에 필요한 결합조정에 있어서도 효과적이다.

특히 조정원점의 선택에 따른 고정망, 자유망, 제약망, 가중측점망 등 모든 형태에 있어서도 연산량

의 면에서 강력한 수단이 될 수 있으며 정규방정식에서의 Cholesky factor를 그대로 활용할 수 있는 장점이 있다. 반면에 회박행렬을 보편적으로 적용하는데 어려움이 있으므로 중규모의 망에 적합한 것으로 사료된다.

참고문헌

1. 국립지리원, 정밀 2차 기준점측량 작업규정, 1987.
2. 백은기, 이영진, 최윤수, 경위도 좌표에 의한 측지망의 동시조정, 대한토목학회 논문집, 7(1), 1987, pp. 1~9.
4. 이석찬, 조규전, 고영호, 이영진, 이질측지망의 동시조정과 신뢰도의 적용, 한국측지학회지, 5(1), 1987, pp. 62~72.
5. 이영진, 고밀도 측지망의 결합조정에 대한 연구, 한양대 박사학위논문, 1989.
6. 이영진, 이석찬, 국가기준점망의 고밀도화를 위한 결합체계, 한국측지학회지, 7(2), 1989, pp. 27~34.
7. Bjork, A., Methods for Sparse Linear Least Squares Problems, in *Sparse Matrix Computations*(J. R. Bunch and D. J. Rose, Eds.), Academic Press, 1976, pp. 177~199.
8. Caspary, W. F., *Concepts of Network and Deformation Analysis*, UNSW # 11, 1987.
9. Forsythe, G. E. and C. B. Moler, *Computer Solution of Linear Algebraic Systems*, Prentice-Hall, 1967.
10. George, J. A., G. H. Golub, M. T. Heath, and R. J. Plemmons, Least Squares Adjustment of Large Scale Geodetic Networks by Orthogonal Decomposition, *proc. of the International Symposium on Geodetic Networks*(vol. 8), Munich, 1981, pp. 130~142.
11. Gill, P. E. and W. Murray, The Orthogonal Factorization of a Large Sparse Matrix, in *Sparse Matrix Computations* (J. R. Bunch and D. J. Rose, Eds.), Academic Press, 1976, pp. 201~212.
12. Golub, G. H. and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins Univ. press, 1983.
13. Hager, W. W., *Applied Numerical Linear Algebra*, Prentice-Hall, 1988.
14. Koch, K. R., S-Transformations for Obtaining Estimable Parameters, in *Forty Years of Thought* (vol. 1), Delft, 1982, pp. 135~144.
15. Lauf, G. B., *The Method of Least Squares with Applications in Surveying*, Tafe, 1983.
16. Leick, A., Minimal Constraints in Two-Dimensional Networks, *J. of the Surveying and Mapping*(ASCE), 108(SU2), 1983, pp. 53~68.
17. Lugoe, F. N., On Position Constraints and Linear Filtering in Densified Geodetic Networks, *Survey Review*, 29(224), 1987, pp. 63~68.
18. Milbert, D. G., Roundoff Accumulation at Weak Horizontal Positions, *Bulletin Geodesique*, 54, 1980, pp. 235~245.
19. Pissanetzky, S., *Sparse Matrix Technology*, Academic Press, 1984.
20. Schaffrin, B. Aspects of Network Design of Geodetic Networks, *proc. of the International School of Advanced Geodesy 3rd Course on Optimization and Design of Geodetic Networks*, Erice, Italy, 1984, pp. 548~594.
21. Schwarz, C. R., TRAV10 Horizontal Network Adjustment Program, *NOAA Technical Memorandum*, NOS NGS-12, 1978.
22. Steeves, R. R., C. A. M. Chamberlain, and M. Berube, Future Network Maintenance in Canada, *papers for the CISM Seminas on the NAD' 83 Redefinition in Canada and the Impact of Users*, CISM, 1988, pp. 1~34.
23. Vanicek, P. and E. J. Krakiwsky, *Geodesy: the concepts*, North-Holland, 1982.

(接受: 1990. 9. 17)