Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol. 16, No. 1, June, 1990

이중비용 네트워크에서의 최소비용 극대방향 나무 해법

심현택* · 박순달*

A Polynomial Algorithm for the Minimum Spanning Arborescence in Transportation Networks with Bitype Arc Costs

Hyun-Taek Sim* and Soon-Dal Park*

Abstract

Most of the least cost transportation network design problems are frequently formulated as the minimum spanning arborescence problems in directed networks with bitype arc costs. These costs are classified whether the arc is included in the path from the root to a specified node over a given spanning arborescence. We prove that this problem is NP-hard, and develop a polynomial time algorithm for acyclic networks.

The probelm in acyclic networks is initially formulated as 0-1 integer programming. Next, we prove that the 0-1 relaxed linear programming has an integral optimum solution by complementary slackness conditions.

In this paper, we present an $O(n^3)$ algorithm based on a shortest path algorithm.

1. 서 론

주어진 네트워크에서 수요 지점들을 최소비용으로 연결하는 경로를 구하는 문제는 호비용이 대개 한가지로 주어지지만, 고속도로와 간선도로를 연계시키면서 최소비용의 수송망을 설계하는 경우에는 호와 건설방법에 따라 비용이 다르게 주어진다. 이와같은 문제는 유방향 네트워크에서의 호비용이 원점으로부터 주어진 특정마디까지의 단순경로에 속하는 경우와 속하지 않는 경우에 따라 이중으로 주어질 때, 원점으로부터 모든 마디를 연결하는 최소비용의 극대방향 나무를 구하는 것이 된다. 즉, 원점이 출발점이고 특정마디가 종착점인 최단경로와 최소비용 극대

* 서울대학교 산업공학과

방향 나무가 결합된 문제이며, 무방향호를 가진 네트워크인 경우도 그 호를 두개의 유방향호로 바꿀 수 있으므로 유방향 네트워크에서 문제를 다루는 것이 일반적이다.

본 논문에서는 이 문제가 NP-hard임을 보이고 무환네트워크인 경우에는 최단경로를 구하는 계산만으로 최적해를 구하는 계산방법을 제시한다. 이를 위해 무환네트워크의 문제를 0-1 정수계획법으로 모형화 하고, 선형제약식의 계수행렬이 Totally Unimodular임을 보인다. 따라서, 정수조건을 완화한 선형계획법 문제에 대해 상보여유 정리를 이용하여 정수 최적해를 구한다. 무환네트워크는 하수도나 저수지로부터 공급되는 농업용수와 같은 수로망에서 중력에 의해 수송되는 경우에 모형화 된다.

지금까지의 네트워크 설계문제들을 보면, 두 마디를 잇는 호비용이 한가지로 주어지는 모형들에 대해서 연구되어 왔다[12]. 즉, 네트워크의 마디들을 연결하는 경로에 포함된 호비용은 경로의 형태에 구분없이 한가지이며, 그외에 확장된 네트워크 문제들은 고정비와 경로에 대한 부가제약[2, 10], 그리고 다목적 모형으로 다루어졌다[6]. 그러나, 모든 수요마디들을 연결하는 도로망을 설계할때 호의 건설방법이 포장도로와 비포장 도로로 구분이 된다면 호비용이 두가지로 주어지게 된다. 이 외에도 송전망에서는 고압선과 저압선으로, 수로망에서는 대수로와 소수로, 수소망에서는 지하철과 간선도로 등으로 건설방법이 구분될 수 있다.

이와같이 호의 건설방법과 중요도에 따라 호비용이 여러가지로 주어지는 경우에 대한 네트워크 설계는 계층적 네트워크의 설계문제로 알려져 있다[14]. 이 경우 각 건설방법에 따라 단계적으로 최소비용의 경로를 구하는 것은 전체비용의 최소화를 이룰수 없다.

Current, et al.[5]은 모든 호에 이중의 비용을 가진 무방향 네트워크에서 최소비용으로 특정한 단순경로와 그외의 경로를 통해 모든 마디를 연결하는 이단계의 계층적 네트워크 문제를 정의하고 발견적 기법을 제시하였다. 이 발견적 기법은 다수 최단경로와 최소비용 극대나무의 기법을 이용한 것으로 모든 호가 특정한 경로나 그외의 경로에 포함될 수 있도록 주어지는 경우에 대해서만 가능해를 보장하므로 일반적이지 않다. 따라서, 이중 호비용을 가진 네트워크 문제를 일반적으로 정의하고 문제의 특성과 그 최적해법을 연구하는 것이 필요하다.

2. 문제정의

마디의 집합 $V=\{1, 2, \cdots, n\}$와 그에 속한 두마디의 순서쌍인 유방향호(i, j)집합 E로 이루어진 유방향 그래프를 $G=(V, E)$라 하자, 이때, 호(i, j)에서 마디 i는 꼬리, 마디 j는 머리이다. 유방향 그래프 $G=(V, E)$에서 마디 i를 머리로 가지는 유방향호의 수를 indegree(i), 꼬리로 가지는 유방향호의 수를 outdegree(i)라 한다.

G의 부분그래프 $G'=(V', E')$는 $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$이고, $(i, j)\in E'$이면 $i, j\in V'$인 그래프이다. G에서 v_1, $v_k\in V$인 두마디의 경로(chain)는 G의 부분그래프로써 이 부분그래프에 속한 호들은 v_1부터 v_k까지 방향을 가지고 연결된다. 이때, 중복된 마디가 없으면 단순경로라 한다. 그리고, $v_k=v_1$인 단순경로를 환(circuit)이라 한다. 무방향 그래프에서의 경로(path)와 환(cycle)은 호의 방향성을 무시한 것이다.

방향나무(directed tree, arborescence) $T=(V_T, E_T)$는 V_T에 속한 원점으로부터 V_T의 모든 다른 마디까지의 경로가 T에 있고, 호의 방향을 무시할때 환이 없는 유방향 그래프를 말한다. 방향나무는 원점이 있고 이 원점으로부터 모든 마디까지 방향성이 있는 유일한 단순경로를 가

진다는 것이 무방향 그래프의 나무와 다른 점이다. 또한, 원점을 제외한 모든 다른 마디는 indegree가 1이다[9]. 유방향 그래프 $G=(V, E)$의 부분그래프 $T=(V, E_T)$가 모든 마디를 포함하는 방향나무일때 극대방향 나무(spanning arborescencs)라 하고, 호비용이 주어질때 극대방향 나무를 이루는 호비용의 합이 최소인 것을 최소비용 극대방향 나무라 한다[3, 4]. 이제 G에서 각 호의 비용이 이중으로 주어지고 원점을 1, 특정마디를 n이라 할때 극대방향 나무의 비용을 정의한다.

정의 : 이중 최소비용 극대방향 나무

유방향 그래프 $G=(V, E)$에서 호비용이 $C_{i,j}$와 $C_{i,j}'$인 이중으로 주어진다고 하자. 마디 1이 원점인 극대방향 나무 $T=(V, E_T)$에서 마디 1로부터 특정마디 n까지의 경로에 속하는 호들의 집합을 E_T의 부분집합인 P라 할때, 비용값인

$$C(E_T)=\sum_{(i,j)\in P\subseteq E_T} C_{i,j} + \sum_{(i,j)\in E_T\backslash P} C_{i,j}' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

를 최소로 갖는 극대방향 나무 $T^*=(V, E_T^*)$를 말한다.

즉, 극대방향 나무에서 마디 1로부터 마디 n까지의 경로에 있는 호는 호비용이 $C_{i,j}$이고, 이 경로에 속하지 않지만 극대방향 나무에 있는 호는 호비용이 $C_{i,j}'$를 가지게 된다. 주어진 유방향 그래프에서 $T^*=(V, E_T^*)$를 구하는 문제를 이중 최소비용 극대방향 나무문제라 하며, 주어진 두가지 비용이 모든 호에 대해 같다면 단순한 최소비용 극대방향 나무문제가 된다.

정리 1 : 유방향 그래프 $G=(V, E)$의 이중 최소비용 극대방향 나무문제는 NP-hard이다.

증 명

$G=(V, E)$에서 마디 1로부터 마디 n까지의 유방향 해밀토니안 경로(DHP)를 찾는 문제가 NP-complete이다[8]. G의 DHP를 찾기 위해 이중 최소비용 극대방향 나무문제로 유도되려면, 호(i, j)에 대해 이중 호비용을 $C_{i,j}=1$, $C_{i,j}'=|V|$라 두고, 최적해 $T^*=(V, E_T^*)$를 구하면 된다. 즉, G의 $T^*=(V, E_T^*)$가 $C(E_T^*)=|V|-1$이면 G에 DHP가 있다는 것이고, $C(E_T^*)>|V|-1$이면 없다는 것이다. ■

위의 정리에서 이용된 유방향 해밀토니안 경로는 유방향 그래프가 무환일때 polynomial time으로 찾을수 있다. 따라서, 이중 최소비용 극대방향 나무문제가 무환그래프에서는 NP-hard에 속하지 않을 수 있으므로, polynomial time의 알고리즘을 개발하고자 한다.

3. 무환네트워크의 최적해법

이제 유방향 그래프 $G=(V, E)$를 환이 없는 네트워크라 하자. 무환네트워크 $G=(V, E)$는 들어오는 호가 없는 마디와 나가는 호가 없는 마디가 적어도 1개씩은 존재하며, 호(i, j)가 $i<j$이도록 $O(|V|^2)$계산으로 마디의 순서를 바꿀 수 있다[7, 11]. 따라서, $G=(V, E)$는 마디 1으로 들어오는 호와 마디 n으로부터 나가는 호가 없으며, 호$(i, j)\in E$는 $i<j$라고 하자. 무환네트워크 G에서 구하려는 극대방향 나무는 마디 1을 원점으로 한다고 가정하고 G의 부분 네트워크인 $T=(V, E_T)$로 표현하자.

정리 2 : 무환네트워크 $G=(V, E)$가 outdegree(1) ≥1이라 하자.

$G=(V, E)$에서 마디 1이 원점인 극대방향 나무가 있을 필요 충분조건은 G의 마디 $j\in V\backslash\{1\}$가 indegree(j) ≥1이다.

증 명

$G=(V, E)$가 원점 1을 가진 극대방향 나무는 원점인 마디 1을 제외한 모든 마디 j가 indegree(j)=1 이므로 G 는 indegree(j)≥1, ∀j∈ V\{1}임이 당연하다.

이제 indegree(j)≥1, ∀j∈V\{1}인 G=(V, E)는 극대방향 나무가 있음을 보인다. G=(V, E)에서 마디 1을 제외하고는 각 마디 j 마다 그 마디로 들어오는 임의의 호를 하나씩을 선정하여 부분 네트워크 $T=(V, E_T)$를 만든다. 이 $T=(V, E_T)$는 무환네트워크 G=(V, E)의 부분 네트워크이므로, 환이 없으며 원점 1을 제외한 모든 마디의 indegree 가 1이다. 따라서, $T=(V, E_T)$는 극대방향 나무이다. ■

종정리 3 : 무환네트워크 G=(V, E)에서 호 (i, j)의 비용이 $C_{i,j}'$라 하자.

G=(V, E)가 outdegree(1)≥1 이고, indegree(j)≥1, ∀j∈V\{1}이면, 원점 1을 가진 최소비용 극대방향 나무 $T=(V, E_T)$의 호는 다음과 같다.

$$E_T=\{(i^*, j) \mid C_{i^*,j}' = \mathrm{Min}_{i<j}\{C_{i,j}'\}, \forall j\in V\setminus\{1\}\}$$

따라서 무환네트워크의 최소비용 극대방향 나무는 쉽게 얻을수 있지만, 이중의 호비용이 주어지면 종정리 3에 의해 구할수 없다. 이제 무환네트워크 G=(V, E)에서 호(i, j)의 비용이 $C_{i,j}$와 $C_{i,j}'$인 두가지로 주어질때 이중 최소비용 극대방향 나무문제를 0-1 정수계획법으로 모형화 한다. 이 수식모형에는 단순경로의 제약과 극대방향 나무의 제약이 포함된다. 일반적으로 단순경로와 극대방향 나무의 0-1 수식모형은 불법경로인 환의 제거를 위한 제약식이 포함되지만 주어진 무환네트워크는 환이 없으므로 이 모형에는 필요가 없으며, 0-1 정수계획법 모형은 다음과 같다.

$$\mathrm{Min}\ Z=\Sigma_{i<n}\ \Sigma_{j>i}\ C_{i,j}\ X_{i,j}+\Sigma_{i<n}\ \Sigma_{j>i}\ C_{i,j}'\ Y_{i,j} \quad \cdots\cdots (2)$$

$$\text{s.t. } \Sigma_{j>1}\ X_{1,j} = 1 \quad \cdots\cdots (3)$$

$$\Sigma_{i>j}\ X_{j,i}-\Sigma_{i<j}\ X_{i,j}=0 \quad \forall j\in V\setminus\{1, n\} \quad \cdots\cdots (4)$$

$$-\Sigma_{i<n}\ X_{i,n}=-1 \quad \cdots\cdots (5)$$

$$\Sigma_{i<j}\ X_{i,j}+\Sigma_{i<j}\ Y_{i,j}=1 \quad \forall j\in V\setminus\{1, n\} \quad \cdots\cdots (6)$$

$$X_{i,j}\in\{0, 1\}\ \forall (i, j)\in E \quad \cdots\cdots (7)$$

$$Y_{i,j}\in\{0, 1\}\ \forall (i, j)\in E \quad \cdots\cdots (8)$$

여기서,

$X_{i,j}$=1, 호(i, j)가 극대방향 나무에 있고, 마디 1에서 마디 n 까지의 단순경로에 속할때
0, 그외의 경우

$Y_{i,j}$=1, 호(i, j)가 극대방향 나무에 있고, 마디 1에서 마디 n 까지의 단순경로에는 속하지 않을때
0, 그외의 경우

이 모형에서 극대방향 나무는 $X_{i,j}$와 $Y_{i,j}$의 값이 1인 호들의 집합이다. 식(2)는 식(1)의 비용값과 같은 목적식이다. 식(3)-(5), (7)은 단순경로에 대한 유통보존 제약인 마디-호 수식이다. 식(6)과 (8)은 극대방향 나무의 제약으로 각 마디는 들어오는 호가 반드시 한개씩 있어야 한다는 것이다.

이 0-1 정수계획법 문제에서 정수조건이 완화된 선형계획법 문제가 정수 최적해를 가진다는 것을 보장하기 위해 식(3)-(6)의 계수행렬이 Totally Unimodular 임을 보인다. 행렬 A 에서 모든 부분 정방행렬의 행렬식이 0, 1, -1이면, 이 행렬 A 를 Totally Unimodular 라고 한다. 행렬 A 가 Totally Unimodular 일 필요충분조건에 관한 연구가 많이 있는데, 이 모형은 네트워크에서 정의된 것이므로 다음의 정리를 이용한다.

보조정리 4[13] : mxn 행렬 A가 Totally Unimodular일 필요 충분조건은 모든 $Q \subseteq R = \{1, \cdots, m\}$에 대해서 다음을 만족하는 Q의 분할인 Q_1, Q_2가 존재한다.

$$\left| \sum_{i \in Q_1} a_{ij} - \sum_{i \in Q_2} a_{ij} \right| \leq 1, \ j=1,\cdots,n$$

정리 5 : 식(3)-(6)의 계수행렬은 Totally Unimodular이다.

증 명

식(3)-(6)의 계수행렬을 A라 하고, 행의 지수집합을 R이라 하자. 그리고, R에 속한 지수들을 식(3)-(5)의 R_1과 식(6)의 R_2로 구분하여 다음과 같이 표현하자.

$$R = R_1 \cup R_2$$

단, $R_1 = \{k \mid k=1, 2, 3, \cdots, n\}$

$R_2 = \{n+k \mid k=2, 3, \cdots, n-1\}$

그러면, 행렬 A의 각 열은 다음과 같이 구성되어 있다.

1. R_1에 대해 두 행만 1과 -1이고 나머지는 0이든지, 아니면 모두 0이다.

2. R_2에 대해 많아야 한개의 행만 1이고 나머지는 0이다.

3. R_2에 대해 1의 값을 가진 행이 n+k째 행이라 하면, R_1에 -1이 있는 행이 있을때 k째 행이다.

즉, 행렬 A는 0, 1, -1로 구성되어 있고, 각 열은 비영인 요소가 한개일때는 1이며 두개 또는 세개일때는 -1을 반드시 한개만 포함한다.

이제, 모든 $Q \subseteq R$에 대해 분할인 Q_1과 Q_2를 다음과 같이 나눌수 있다.

$$Q_1 = \{n+k \in Q \mid k \notin Q\}$$
$$Q_2 = \{n+k \in Q \mid k \in Q\} \cup \{k \mid k \in Q\}$$

$Q_1 \cup Q_2 = Q$, $Q_1 \cap Q_2 = \phi$이므로 Q_1과 Q_2는 Q의 분할이다. 이때, $Q_1 \subseteq R_2$이고, Q_2는 각 열에서 1인 행만 두개가 포함될 수 없으므로

$$0 \leq \sum_{i \in Q_1} a_{ij} \leq \sum_{i \in R_2} a_{ij} \leq 1$$

$$-1 \leq \sum_{i \in Q_2} a_{ij} \leq 1$$

가 된다. 따라서, 보조정리 4의 조건을 만족함을 보이기 위해

$$\sum_{i \in Q_1} a_{ij} - \sum_{i \in Q_2} a_{ij} = 2$$

인 열이 존재하지 않음을 보이는 것으로 충분하다. 이는 어떤 열에 대해서

$$\sum_{i \in Q_1} a_{ij} = a_{n+k,j} = 1$$

$$\sum_{i \in Q_2} a_{ij} = a_{k',j} = -1$$

인 임의의 $n+k \in Q_1$, $k' \in Q_2$가 존재할 때이다. 그런데, 행렬 A의 구성에 의해서 $k'=k$이므로 Q의 분할에서 $\{k, n+k\} \subseteq Q$이면 $\{k, n+k\} \subseteq Q_2$임에 위배된다. 그래서, 모든 $Q \subseteq R$에 대해 보조정리 4의 조건을 만족하므로 식(3)-(6)의 계수행렬은 Totally Unimodular이다. ■

이제 식(7)과 식(8)의 0-1 정수조건을 완화한 선형계획법의 모형에서 최적해의 특성을 알아보자. 정수조건을 완화하면 식(7), (8)은

$$X_{i,j} \geq 0, \quad Y_{i,j} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in E \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

$$X_{i,j} \leq 1, \quad Y_{i,j} \leq 1 \quad \forall (i, j) \in E \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

이 된다. 그런데, 식(10)은 식(3)-(6)에 의해 만족되므로 중복제약이다. 따라서, 정수조건을 완화한 문제는 식(2)-(6)과 식(9)로 이루어진 선형계획법 모형이고, 이를 『완화문제』라 하자. 『완화문제』의 계수행렬이 정리 5에 의해 Totally Unimodular이므로, 이 선형계획법 문제가 가해이면 정수 최적해를 가진다[13]. 이제, 선형계획법 문제인 『완화문제』에 대해 원가능해

와 쌍대가능해의 상보여유 정리를 이용하여 정수 최적해를 구하려고 한다.

『완화문제』에 대한 쌍대변수를 $\pi_1, \cdots, \pi_n$과 $\beta_2, \cdots, \beta_{n-1}$라 하자. π_1과 π_n는 식(3), (4)의 쌍대변수이고, π_j와 β_j ($j=2, \cdots, n-1$)은 식(5), (6)의 쌍대변수이다. 『완화문제』의 쌍대문제는 다음과 같다.

$$\text{Max } W = \pi_1 - \pi_n + \Sigma_{2<j<n-1}\ \beta_j \quad \cdots\cdots (11)$$

$$\text{s.t. } \pi_i - \pi_n \le C_{i,n} \quad \forall\ i<n,\ j=n \quad \cdots\cdots (12)$$

$$\pi_i - \pi_j + \beta_j \le C_{i,j} \quad \forall\ i<j,\ j \neq n \quad \cdots\cdots (13)$$

$$\beta_j \le C_{i,j}' \quad \forall\ i<j,\ j \neq n \quad \cdots\cdots (14)$$

π_j, β_j는 비제약 변수

이 쌍대문제는 모든 정수 $C_{i,j}$와 $C_{i,j}'$에 대해 항상 가능해가 존재한다.

정리 6 : 『완화문제』는 식(14)를 만족하는 어떤 β_j^*, $j=2,,,n-1$의 값에 대해서도 쌍대가능해 (π^*, β^*)가 존재한다.

증 명

식(14)를 만족하는 쌍대변수값 β_j^*, $j=2,,,n-1$을 식(12), (13)에 대입하면 다음과 같은 문제가 된다.

$$\text{Max } W1 = \pi_1 - \pi_n + B^* \quad \cdots\cdots (15)$$

$$\text{s.t. } \pi_i - \pi_j \le C_{i,j}^{\sim} \quad \forall (i, j) \in E \quad \cdots\cdots (16)$$

단,

$$B^* = \Sigma_{2<j<n-1}\ \beta_j^*$$

$$C_{i,j}^{\sim} = \begin{cases} C_{i,n} & \forall\ i<j,\ j=n \\ C_{i,j} - \beta_j^* & \forall\ i<j,\ j \neq n \end{cases}$$

식(15)-(16)은 최단경로 문제의 쌍대문제인데, 환이 없는 네트워크이므로 언제나 가능해가 존재한다. 따라서, 식(16)을 만족하는 가능해를 π^*라 하면,

$$\pi_i^* - \pi_n^* \le C_{i,n} \quad \forall\ i<j,\ j=n$$

$$\pi_i^* - \pi_j^* + \beta_j^* \le C_{i,j} \quad \forall\ i<j,\ j \neq n$$

이다. 여기서, (π^*, β^*)는 식(12)와 (13)를 만족하고, β^*는 조건에 의해 식(14)를 만족하므로 (π^*, β^*)는 『완화문제』의 쌍대가능해이다. ■

여기서, 식(15)-(16)의 문제는 무환네트워크에서 호비용이 $C_{i,j}^{\sim}$ 일때, 마디 1로부터 마디 n까지의 최단경로 문제가 되므로 이 문제의 최적해와 그에 대한 최단경로는 쉽게 구할수 있다. 또한, 식(15)-(16)의 최적해를 π^*, 최단경로를 $X^{\sim}$이라 하면, 상보여유 조건으로부터 다음을 만족한다[1].

$$X_{i,j}^{\sim}(=1) > 0 \text{ 일때}, \ \pi_i^* - \pi_j^* = C_{i,j}^{\sim} \quad \cdots\cdots (17)$$

$$\pi_i^* - \pi_j^* < C_{i,j}^{\sim} \text{일때}, \ X_{i,j}^{\sim} = 0 \quad \cdots\cdots (18)$$

이제 식(15)-(16)의 최적해로 부터 『완화문제』의 최적해를 구하도록 한다.

정리 7 : β^*의 값을 $\beta_j^* = C_{i^*,j}' = \text{Min}_{i<j}\{C_{i,j}'\}$ $j=2, \cdots, n-1$라 하자.

호비용이 $(C_{i,j} - \beta_j^*)$인 무환네트워크에서 마디 1로부터 마디 n까지의 최단경로 $X^{\sim}$가 주어질 때, 『완화문제』의 해 (X^*, Y^*)를 다음과 같이 정의하자.

$$X_{i,j}^* = \begin{cases} 1, & \text{호}(i, j)\text{가 } X_{i,j}^{\sim} = 1\text{일때} \\ 0, & \text{호}(i, j)\text{가 } X_{i,j}^{\sim} = 0\text{일때} \end{cases}$$

$$Y_{i,j}^* = \begin{cases} 1, & \text{마디 } j\text{에서 } \Sigma_i X_{i,j}^{\sim} = 0\text{이고 호}(i, j)\text{가 } \beta_j^* = C_{i^*,j}'\text{인 호}(i^*, j)\text{일때} \\ 0, & \text{그외의 모든 호}(i, j)\text{일때} \end{cases}$$

이 (X^*, Y^*)는 『완화문제』의 최적해이다.

증 명

위에서 정의한 (X^*, Y^*)는 『완화문제』의 제약식을 만족하는 원가능해이다. 그리고, 조건에서

주어진 β^*와 수정된 호비용$(C_{i,j}-\beta_j^*)$을 가진 최단경로 문제로부터 얻은 π^*로 이루어진(π^*, β^*)는 정리 6에 의해 『완화문제』의 쌍대가능해이다. 이제 『완화문제』의 원가능해(X^*, Y^*)와 쌍대가능해(π^*, β^*)가 다음과 같은 상보여유조건을 만족함을 보인다.

$X_{i,j}^*>0$ 일때, $\pi_i^*-\pi_j^*+\beta_j^*=C_{i,j}$ ………… (19)

$Y_{i,j}^*>0$ 일때, $\beta_j^*=C_{i,j}'$ ……………………… (20)

$\pi_i^*-\pi_j^*+\beta_j^*<C_{i,j}$일때, $X_{i,j}^*=0$ ………… (21)

$\beta_j^*<C_{i,j}'$일때, $Y_{i,j}^*=0$ ……………………… (22)

식 (19)와 (21)는 식 (15)-(16)에 대한 상보여유 조건인 식 (17)-(18)에 의해 만족된다. 그리고, $Y_{i,j}^*$는 마디 j로 들어오는 호 중에서 $\beta_j^*=C_{i^*,j}'$를 가지는 하나의 호(i^*, j)에 대해서만 1의 값으로 정의된 것이므로 식 (20)와 (22)도 만족된다. 따라서, (X^*, Y^*)는 『완화문제』의 최적해이다. ■

위의 정리 7에서 구한(X^*, Y^*)는 무환네트워크의 0-1 정수모형으로부터 정수조건이 완화된 선형계획법 문제에서 0-1의 값을 가진 정수 최적해이므로, 이(X^*, Y^*)는 식 (2)-(8)의 최적해이며, 그 비용값은 식 (15)에 의해 최단경로 값과 B^*의 합으로부터 얻을수 있다.

이제 무환네트워크 $G=(V, E)$에서 호(i, j)의 비용이 $C_{i,j}$와 $C_{i,j}'$인 두가지로 주어지고 두가지 비용중에 적어도 하나는 값을 가진다고 하자. 이 무환네트워크에서의 이중 최소비용 극대방향 나무는 $C_{i,j}'$의 최소값에 의해 수정된 호비용에 대한 최단경로상의 호와 이 최단경로에 포함되지 않은 마디로 들어오는 $C_{i,j}'$가 최소인 호들로 이루어지며, 그 절차는 다음과 같다.

계산절차

단계 1. $C_{i,j}'$의 최소값 $Q(j)$ 계산

$Q(1)=0,\ Q(n)=0; Q(j),\ j=2,\cdots,n-1$

$Q(j)=C_{i^*,j}'=\mathrm{Min}_{i<j}\{C_{i,j}', M\}$

단, M은 큰 양의 정수

단계 2. 최단경로 계산

/무환네트워크에서 호비용이 $C_{i,j}-Q(j)$인 최단경로를 구한다.

D(j)는 마디 1로부터 마디 j까지의 최단경로 값이다./

$D(j)=\mathrm{Min}_{i<j}\{D(i)+(C_{i,j}-Q(j))\}\ j=2,3,\cdots,n$

단, $C_{i,j}$의 값이 없는 호는 제외

단계 3. 극대방향 나무 출력

(1) 단계 2에서 최단경로가 없으면 극대방향 나무가 없다.

(2) 단계 2의 최단경로에 속한 호들과 그외의 마디에 대해서 단계 1의 Q(j)의 값을 가진 호들로 이루어진 방향나무를 만든다.

(3) 이 방향나무가 모든 마디를 포함하지 않으면 극대방향 나무가 없다.

(4) 극대방향 나무의 비용값은 단계 2의 D(n)과 단계 1의 Q()의 합이다.

단계 1에서 마디 j로 들어오는 모든 호에 대해 $C_{i,j}'$가 없으면, 이 마디 j는 구하려는 극대방향 나무에서 마디 1로부터 마디 n까지의 경로상에 포함되어 있어야 하므로 $Q(j)=M$으로 둔 것이다. 이는 수정된 호비용을 가진 무환네트워크의 최단경로를 구하는 단계 2에서 그러한 마디들로 들어오는 호중에 적어도 한개가 큰 음수를 가지고 있으면, 그 마디가 마디 1로부터 마디 n까지의 경로에 있을 경우에는 최단경로에 반드시 포함되기 때문이다. 따라서, 그런 마디가 경로상에 없다면, 극대방향 나무는 없다. 또한, 단계 2에서 $C_{i,j}$의 값이 없는 호를 제외시키는 이유는 이 호가 마디 1로부터 마디 n까지의 경로에 포함될 수 없기 때문이다.

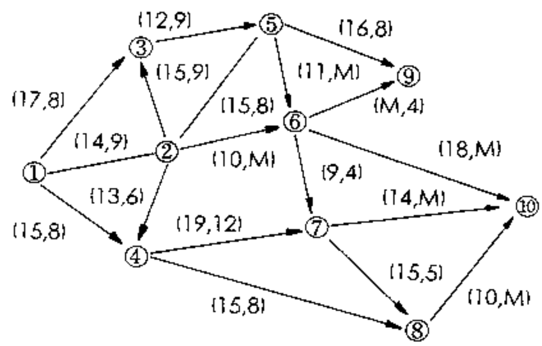
정리 8 : 무환네트워크 $G=(V, E)$의 이중 최소비용 극대방향 나무문제에 대한 계산복잡도는 $O(|V|^2)$이다.

증 명

위의 계산절차에서 보면, 단계 1은 Q(j)의 계산을 위해 각 호를 한번씩 비교하면 되므로 | E | 의 계산이 걸린다. 단계 2는 무환네트워크의 최단경로 기법으로써 최대로 $0(|V|^2)$의 덧셈과 비교가 요구된다[11]. 단계 3은 단계 1과 2를 이용한 출력이므로 | V | 의 계산이 걸린다. 즉, 이 계산절차의 계산복잡도는 최단경로를 구하는 단계 2에 의해 결정되며 $0(|V|^2)$이다. ■

예 제

이중 호비용을 가진 무환 네트워크가 [그림 1]과 같이 주어져 있을때, 마디 1을 원점으로 하는 이중 최소비용 극대방향 나무를 구해보자.



이중 호비용($C_{i,j}$, $C_{i,j}'$), M은 값이 없는 경우

[그림 1] 이중 호비용을 가진 무환네트워크의 예

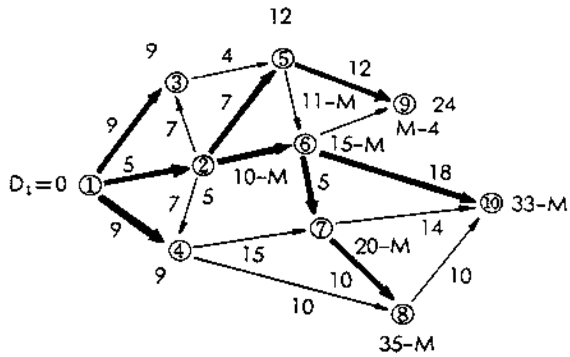
단계 1. Q(j) 계산

Q( ) = (0, 9, 8, 6, 8, M, 4, 5, 4, 0)

이고, Q(j)의 합은 44+M이다.

단계 2. 최단경로 계산

호비용이 $C_{i,j}-Q(j)$일때 최단경로를 구한 결과는 [그림 2]와 같다.

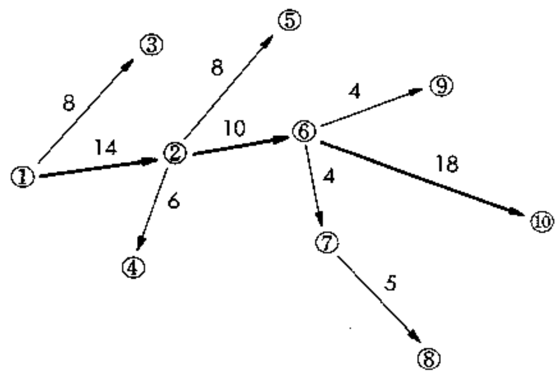


호비용 $C_{i,j}-Q(j)$

[그림 2] 단계 2의 최단경로 계산결과

단계 3. 극대방향 나무의 출력

이중 최소비용 극대방향 나무는 [그림 3]과 같고, 그 비용값은 (44+M)+(33-M)=77이다.



[그림 3] 이중 최소비용 극대방향 나무

6. 결 론

도로망, 송전망, 수로망 등의 네트워크 설계에 있어서 호의 건설방법에 따라 고속도로와 간선도로의 비용과 같이 호비용이 두가지로 주어질 수 있다. 이중 최소비용 극대방향 나무문제란

유방향 네트워크에서 두 마디를 잇는 호의 비용이 극대방향 나무상에서 원점으로부터 주어진 특정마디까지의 단순경로에 속하는 경우와 속하지 않는 경우에 따라 다르게 주어질때 호비용의 합이 최소인 극대방향 나무를 구하는 문제로서 NP-hard임을 보였다.

여기서는 수로망과 같이 중력에 의해 한 방향으로 수송되는 경우의 모형인 무환네트워크에서는 최단경로 기법을 이용하여 계산복잡도가 $0(|V|^2)$인 기법을 제시했다. 우선, 무환네트워크의 이중 최소비용 극대 나무문제를 0-1 정수계획법으로 모형화 하고, 정수조건을 완화한 선형계획법 문제로부터 상보여유 정리에 의해 0-1 정수인 최적해를 구할수 있음을 보였다. 이는, 무환네트워크의 최단경로 문제에 대한 선형계획법의 수식모형을 이용한 것이다.

무환네트워크에서의 수식모형에 대한 특성의 연구결과는 일반적인 유방향 네트워크의 문제에 대한 효율적인 분지한계법을 개발하는데 이용될 수 있다.

참고문헌

[1] 박순달, OR(경영과학), 대영사, 1986.

[2] Y.P. Aneja, V. Aggarwal, and K.P.K. Nair, "Shortest Chain Subject to Side Constraints," *Networks*, Vol. 13, pp.295-302, 1983.

[3] P.M. Camerini, L. Fratta, and F. Maffioli, "The K Best Spanning Arborescences of a Network," *Networks*, Vol. 10, pp.91-110, 1980.

[4] D. Cheriton and R.E. Tarjan, "Finding Minimum Spanning Trees," *SIAM J. Comput.*, Vol. 5, pp. 724-740, 1976.

[5] J.R. Current, C.S. Revelle, and J.L. Cohon, "The Hierarchical Network Design Problem," *European Journal of Operations Research*, Vol. 27, pp.57-77, 1986.

[6] J.R. Current and H. Min, "Multiobjective Design of Tranportation Networks: Taxanomy and Annotation," *European Journal of Operations Research*, Vol. 26, pp. 187-201, 1986.

[7] N. Deo, *GRAPH THRORY with Applications to Engineering and Computer Science*, Prentice-Hall, 1974.

[8] M.R. Garey and D.S. Johnson, *Computer and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, 1979.

[9] R. Gould, *Graph Theory*, Benjamin/Cummings Publishing Company, 1988.

[10] B. Gravish, "Formulations and Algorithms for the Cpacitated Minimal Directed Tree Problem," *JACM*, Vol. 30, pp.118-132, 1983.

[11] E.L. Lawler, *Combinatorial Optimization: and Matroids*, Holt, Rinehart, and Winston, 1976.

[12] T.L. Magnanti and R.T. Wong, "Network Design and Transportation Planning: Models and Algorithms", *Transportation Science*, Vol. 18, pp.1-55, 1984.

[13] G.L. Nemhauser and L.A. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*, John Wiley & Sons, 1988.

[14] P.A. Steenbrink, *Optimization of Transport Networks*, John Wiley & Sons, 1974.