Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol. 16, No. 1, June, 1990

가격할인과 처분이 가능한 동적 수송-재고 모형†

손 권 익*

A Dynamic Transportation-Inventory Model with Quantity Discounts and Disposals

Kweon-Ik Shon*

Abstract

This study deals with the dynamic transportation-inventory model for a single product from which the optimal procurement quantities and the transportation modes are determined simultaneously over a finite planning horizon. Moreover, it covers the situation where quantity discounts are applied to the transportation cost as well as the purchase cost and disposals of the excess are possible at the end of each period.

For a relevant mathematical model formulated, the theorems and properties of an optimal solution are discussed to present the efficient algorithm.

A numerical example is solved to illustrate the algorithm developed.

1. 서 론

대부분의 재고문제에서는 발주정책만을 고려하고, 발주상품의 수송정책은 별개의 분야로 연구되어 왔다. 그러나, 여러 수송수단이 존재하고 필요시 적절한 수송수단을 선택할 수 있다고 할 때, 두 분야를 동시에 고려하여야만 진정한 최적화를 이룰 수 있을 것이다. 예를 들어, 한 수송수단은 초기비용은 많이 들지만 단가는 싼 반면, 다른 수송수단은 초기비용은 적게 들지만 단가가 비싼 경우가 있다고 할 때, 우리는 구입량에 따라 적절한 수송수단을 결정할 필요가 생긴다. 이 경우, 구입량이 결정된 후 그 결과에 의해 수송수단을 결정하는 것은 최적화가 될 수 없는 것이다.

Aggarwal[1]은 수송정책의 중요성을 강조

* 강원대학교 공과대학 산업공학과

† 본 연구는 한국과학재단의 기초연구지원에 의하여 수행되었음

하고 현 재고체계를 개선하기 위한 몇가지 제안을 하였으며, Baumol과 Vinod[2]는 하주들의 총 수송수요의 추정과 아울러 수송수단의 선택에 관한 모형을 다루었으나 정적인 상태에 국한되었다. 본 연구에서는 가격 및 수요가 변화하는 동적인 상황을 다루기 위해 일반적인 동적 롯트 결정 모형[3, 4, 5]에 수송정책을 고려하여 최적 구매정책 뿐 아니라, 수송정책을 동시에 결정하는 수송-재고모형(Transportation-Inventory Model)을 정립하여 유한 계획기간(Finite Planning Horizon)내에서 최적화를 구하려 한다[7].

또한, 실제 거래에서 현실화 되어 있는 구매 및 수송과정에서의 가격할인(Quantity Discount), 가격할인을 받기 위한 초과 구입분의 처분가능성[6, 8, 9] 등을 고려하여 모델의 다양성을 더하여 그 이용가치를 높이려 한다.

2절에서는 수학적인 모형이 제시된다. 3절에서는 정식화된 문제를 동적계획법(Dynamic Programming)으로 접근하여 최적해를 구한다. 이때, 효과적인 문제해결을 위하여 필요한 정리를 세우고 이를 해법의 개발에 이용한다. 해법의 개발에는 적절한 성질(Property)들을 추가 규명함으로써 효율성을 높인다. 마지막으로, 개발된 해법을 이용하여 예제를 풀어 보인다.

2. 모형의 정립

가격할인은 All Units Discount와 Incremental Quantity Discount 두 종류가 있다[6]. 여기서는 구입량 전부에 할인이 적용되는 All Units Discount를 다루었다. 즉 가격할인점(Price Break Point) $q_1, q_2, \cdots, q_k$에 대하여 대응되는 가격할인율(Discount Rate)이 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$인 경우, t 시기에 $Q(t)$ $(q_j \le Q(t) < q_{j+1})$만큼 구입하면, 할인혜택이 없을 때의 가격을 $p(t)$라 할 때 구입단가는 $(1-\alpha_j)p(t)$가 된다.

모형에 쓰이는 가정, 변수설명과 수식화된 모형은 다음과 같다.

2.1. 가 정

1) M 종류의 수송수단이 이용 가능하다.
2) 수송 소요기간은 무시한다.
3) 계획기간 N은 한정되어 있다.
4) 주문 및 처분의 결정과 도착은 기간 초에 이루어진다.
5) 주문량과 운반량에 대한 제한은 두지 않는다.
6) 재고부족은 발생하지 않는 것으로 가정한다.
7) 기초와 기말재고는 없는 것으로 한다.

2.2. 변수설명

1) $d(t)$=기간 t의 수요
2) $p(t)$=기간 t의 단위당 정상 구입가격
3) $s(t, m)$=기간 t의 수송수단 m의 준비비용
4) $r(t, m)$=기간 t의 수송수단 m의 단위당 정상 운반비용
5) $h(t)$=기간 t의 단위 재고유지비용
6) $Q(t, m)$=기간 t의 수송수단 m로 운반되는 양
7) $I(t)$=기간 t말의 재고량
8) $R(t)$=기간 t의 처분량
9) $o(t)$=기간 t의 단위 처분비용
10) α_i, $(i=0, 1, \cdots, K)$=구입가격 할인율
11) q_i, $(i=0, 1, \cdots, K)$=구입가격 할인점
12) α_i^m, $(i=0, 1, \cdots, K^m)$=수송수단 m에 대한 운반비용 할인율
13) q_i^m, $(i=0, 1, \cdots, K^m)$=수송수단 m에 대한 운반비용 할인점

2.3. 모 형

$$\text{(P1)}\ \underset{Q(t,m),\,R(t)}{\text{Min}} \sum_{t=1}^{N} \Big[\sum_{m=1}^{M} [s(t,m)\delta(Q(t,m)) + \{P_t(\sum_{n=1}^{M} Q(t,n)) + T^m_t(Q(t,m))\} Q(t,m)] + h(t)I(t) + o(t)R(t)\Big]$$

$$\text{s.t.}\quad I(t)=I(t-1)+\sum_{m=1}^{M} Q(t,m)-d(t)-R(t),\quad t=1,2,\cdots,N$$

$$\text{with}\quad I(0)=I(N)=0$$

$$\text{where}\quad \delta(Q(t,m))=\begin{cases}1 & \text{if } Q(t,m)>0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$P_t(Q)=(1-\alpha_j)p(t),\ \text{if } q_j \le Q < q_{j+1} \quad \text{for some } j\in\{0,1,\cdots,K\}$$

$$\text{and}\quad T^m_t(Q(t,m))=(1-\alpha^m_j)r(t,m),\ \text{if } q^m_j \le Q(t,m) < q^m_{j+1} \quad \text{for some } j\in\{0,1,\cdots,K^m\}.$$

(P1)을 간단히 하기 위하여, 다음 정리를 제안한다.

정리 1 : 최적해에서는 한 기간에는 기껏해야 하나의 수송수단이 이용될 뿐이다.

같은 양을 여러 수송수단으로 분산하여 운반하느니 보다는 하나의 수송수단을 이용하는 것이 준비비용을 줄일 수 있을 뿐 아니라 가격할인을 받을 기회도 많아 유리하므로 정리 1은 당연한 것이다.

정리 1에 의해서, 결정사항은 기간 t초의 구입량 Q(t)와 그 수송수단 m(t) 및 처분량 R(t)로 제한될 수 있다.

$P_t(Q)$와 $T^m_t(Q(t,m))$을 하나로 하기 위하여 q_j와 q^m_j을 증가순으로 각 수송수단 m에 대하여 분류한다. 이 분류된 할인점을 $q'_i(m)$, $i=0,1,\cdots,J^m$(여기서 $q'_0(m)=0$, $J^m<K+K^m$)이라 하자. 그리고 $B_i(t,m)$을 다음과 같이 정의한다.

$$B_i(t,m)=(1-\alpha_j)p(t)+(1-\alpha^m_k)r(t,m)$$

단, 어떤 j, k에 대하여 $q_j \le q'_i(m) < q_{j+1}$, $q^m_k \le q'_i(m) < q^m_{k+1}$.

(P1)을 단순화하면 다음과 같다.

$$\text{(P2)}\quad \underset{Q(t),\,m(t),\,R(t)}{\text{Min}} \sum_{t=1}^{N} [s(t,m(t))\delta(Q(t)) + U_t(Q(t),m(t))Q(t) + h(t)I(t) + o(t)R(t)]$$

$$\text{s.t.}\quad I(t)=I(t-1)+Q(t)-d(t)-R(t).\quad t=1,2,\cdots,N$$

$$\text{with}\quad I(0)=I(N)=0$$

$$\text{where}\quad U_t(Q(t),m(t))=B_i(t,m(t)),\ \text{if } q'_i(m(t)) \le Q(t) < q'_{i+1}(m(t)) \quad \text{for some } i\in\{0,1,\cdots,J^{m(t)}\}.$$

여기서 다음과 같은 가정을 한다.

$$-\min_{\substack{j\le t\\ m}} [B_{jm}(j,m)+\sum_{i=j}^{t-1} h(i)] < o(t),\quad t=1,2,\cdots,N. \quad \cdots\cdots (1)$$

식(1)은 단순히 많은 양을 사서 나중에 그것을 팔음으로써 이익을 얻는 경우, 즉 구입, 운반, 재고 유지비용의 합보다 큰 값 -o(t)로 파는 경우를 배제한다.

3. 해법의 개발

앞서 정립된 모형 (P2)를 DP화하기 위한 반복식(Recursive Equation)을 유도하기 위하여 먼저 다음 정리를 증명을 생략하고 적는다.

정리 2(Inventory Decomposition Property[4]) :

I(t)=0이면, 본래 문제의 최적해는 두개의 분리된 문제 즉 처음 t기간 동안의 문제와 나머지 N-t 기간 동안의 문제를 각각 풀음으로써 구할 수 있다.

정리 2을 이용하면, 문제 (P2)는 다음과 같은 반복식으로 나타낼 수 있다.

$F(t)$: $I(t)=0$일 때, 기간 $1, 2, \cdots, t$에 걸쳐서 최적계획일 때의 비용.

그러면,

$$F(0)=0.$$

$$F(v)=\min_{0\le u<v} \{F(u)+g(u,v)\},\ v=1,2,\cdots,N.$$

여기서, $g(u, v)$는 $I(u)=I(v)=0$이고 $t=u+1, u+2, \cdots, v-1$에 대하여는 $I(t)>0$일 때, 기간 $u+1, u+2, \cdots, v$에 걸쳐서 최적계획을 따를 때 비용이다.

윗 식은 $N(N+1)/2$개의 $g(u, v)$를 계산하여야 하는데, 이 $g(u, v)$의 계산에 많은 시간이 소요된다. 따라서 이 $g(u, v)$를 효과적으로 찾을 수 있는 방법의 발견이 중요하다. 이를 위하여 최적해의 성질을 조사하여 이용한다.

정의 1 : 어떤 $i(i\in\{0, 1, \cdots, J^{m(t)}\})$에 대하여 $q'_i(m(t))<Q(t)<q'_{i+1}(m(t))$인 시기 t를 "fraction period"라 한다.

정의 2 : $R(t)>0$ 인 시기 t를 "disposal period"라 한다.

다음 정리들을 제안하고 그 증명은 Appendix에 첨부한다.

정리 3 : $I(u)=I(v)=0$이고 $t=u+1, u+2, \cdots, v-1$에 대하여는 $I(t)>0$이면, $\{u+1, u+2, \cdots, v\}$중에 기껏해야 하나의 fraction period를 포함하는 최적해가 존재한다.

정리 4 : $I(u)=I(v)=0$이고 $t=u+1, u+2, \cdots, v-1$에 대하여는 $I(t)>0$이면, $\{u+1, u+2, \cdots v\}$중에 기껏해야 하나의 disposal period를 포함하는 최적해가 존재한다.

정리 4는 $g(u, v)$를 평가하는데 있어 처분을 그 기간동안 기껏해야 한번으로 제한할 수 있다는 것을 말한다. 따라서, 처분을 하는 경우의 비용($g^1(u, v)$)과 처분을 하지 않는 경우의 비용($g^0(u, v)$)을 비교함으로써 $g(u, v)$를 결정할 수 있다.

$g^1(u, v)$를 평가하는데 있어서 중요한 것은 처분시기를 찾는 것이다. 처분시기의 결정을 위하여

$$E(t)=o(t)+\sum_{i=u+1}^{t-1} h(i)-o(u+1),$$

$$t=u+1, u+2, \cdots, v.$$

$z=[t \mid \min_{u<t\le v} E(t)]$라 하자.

정리 5 : $I(u)=I(v)=0$이고 $t=u+1, u+2, \cdots, v-1$에 대하여는 $I(t)>0$인 최적해에서 만일 처분이 어느 시기 a, $u<a\le v$에서 발생된다면 $a=z$이다.

Note : i) z를 찾을 때, $E'(t)=o(t)+\sum_{i=1}^{t-1} h(i)$로 하여 $u<t\le v$에 대하여 $E'(t)$를 최소화하는 t를 찾으면 더욱 편리하다.

ii) $E(t)$ (혹은 $E'(t)$)를 최소화하는 z가 여럿 있는 경우는 최적화에 영향없이 나중 것을 택하면 된다.

정리 6 : $I(u)=I(v)=0$이고 $t=u+1, u+2, \cdots, v-1$에 대하여는 $I(t)>0$인 최적해에서는 $\{u+1, u+2, \cdots, v\}$중에 fraction period와 disposal period 둘 다는 포함되지 않는다.

정리 3부터 정리 6의 결과는 다음과 같이 요약될 수 있다.

i) 처분이 없는 경우

기껏해야 한번의 fraction period가 있다.

ii) 처분이 있는 경우

fraction period는 없고 처분은 $E(t)$를 최소화하는 시기에 발생한다.

이상의 정리들을 이용하여 $g^0(u, v)$와 $g^1(u, v)$를 계산하여 최적해를 구하는 효과적인 방법을 제시한다.

1) $g^0(u, v)$의 계산

다음의 변수들을 먼저 정의한다.

$D(t)$=기간 $u+1$부터 기간 t까지의 누적수요. 즉 $D(t)=\sum_{i=u+1}^{t} d(i)$.

$S(t)$=기간 $u+1$부터 따져서 기간 t에서의 가능 누적 주문수준의 집합.

$X_t=S(t)$의 요소.

또한, $Z(a\,;\,u,v)$를 a를 fraction period로 미리 정해 놓고 $g^0(u,v)$를 푸는 문제로 하고 $O(a\,;\,u,v)$를 이 문제의 최소값이라 하자. 그러면,

$$g^0(u,v)=\min_a O(a;\,u,v).$$

$Z(a\,;\,u,v)$를 푸는데 있어, 각 시기의 가능 누적주문 수준의 집합은 다음과 같이 찾는다.

$t=u$에서, $S(t)$는 하나의 요소, 즉 $X_u=0$를 갖는다.

$t=u+1,\ u+2,\cdots,a-1$에 대하여는 전진법(Forward Recursion)으로 $S(t-1)$에서부터 $S(t)$를 구한다. 즉,

$$X_t=X_{t-1}+q'_i(m),\ \ i=0,1,\cdots J^m,\ m=1,2,\cdots,M.$$

이때, $D(t)<X_t\leq D(v)$를 만족한다.

$t=a,\ \ a+1,\cdots,v-1$에 대하여는 후진법(Backward Recursion)으로 $S(t+1)$으로부터 $S(t)$를 구한다. 즉,

$$X_t=X_{t+1}-q'_i(m),\ \ i=0,1,\cdots,J^m,\ m=1,2,\cdots,M.$$

이때, $D(t)<X_t\leq D(v)$.

$t=v$에서는 $X_v=D(v)$.

끝으로, $S(a-1)$와 $S(a)$의 모든 쌍(X_{a-1}, X_a)를 모든 수송수단에 대하여 비교를 하면 된다. 이때 $X_a-X_{a-1}\geq 0$을 만족하는 쌍에 대하여만 비교를 한다.

계산의 효율성을 높이기 위하여, $Z(a\,;\,u,v)$와 $Z(a+1\,;\,u,v)$의 관계를 살펴보자. 이는 fraction period가 a로부터 $a+1$로 이동한 것으로 전진법으로 계산되는 u부터 $a-1$까지의 기간 동안에 대하여는 $S(t)$가 서로 동일하다. 이는 후진법으로 계산되는 v부터 $a+1$까지에 대하여도 마찬가지다. 따라서, $a=u+1$일 때 후진법으로 v부터 $u+1$까지 집합을 구해 놓으면, $u+1$과 v 사이의 fraction period a에 대하여는 a 시점에서의 전진법만 이용하면 된다.

전, 후진법 과정에서 다음 성질들을 이용하면 더욱 계산량을 줄일 수 있다.

성질 1: i) 전진법에서 $S(t-1)$의 요소 X_{t-1}이 $X_{t-1}>D(t)$이면 $S(t)$의 요소가 된다.

ii) 후진법에서는 $S(t+1)$의 요소는 $S(t)$의 요소가 된다.

iii) 후진법에서의 제약식은 $X_t>D(t)$이면 충분하다.

성질 1의 i), ii)는 $q'_0(m)$은 모든 m에 대하여 0이므로 $X_t=X_{t-1}$ 또는 $X_t=X_{t+1}$이 되는데, X_t가 제약식을 만족하는가를 조사할 때, 그 일부 또는 전부를 생략할 수 있음을 말한다. 이것의 타당성은 나머지 부등식이 자동적으로 만족되는데 있다. iii)는 $X_v=D(v)$로부터 출발하므로 후진법에서 X_t는 $D(v)$ 보다 클 수가 없다.

성질 2: 만일 전진법 사용중에 $S(a)=\phi$이면 a보다 큰 fraction period에 대하여는 고려할 필요가 없다.

이것은 $S(a+1)$이 $S(a)$로부터 생성되므로 $S(a)$가 ϕ이면 $S(a+1)$은 만들어질 수 없으므로 당연하다.

Note: $D(t)=\sum_{i=1}^{t} d(i)$로 정의하면 $X_u=0$에서 $X_u=D(u)$로 바꿔 주어 위의 방법을 그대로 따를 수 있다. 이렇게 함으로써 u가 바뀔 때마다 $D(t)$를 달리 계산하는 번거러움을 줄일 수 있다.

반복법의 수행과정에서 병행되는 비용계산을 위해 다음의 변수를 정의한다.

$W(t, X)$=기간 t에서 가능 누적주문량이 X일 때의 부분비용.

$W(t, X)$는 다음 반복식에 의하여 계산된다.

$W(u,X_u)=W(v,X_v)=0.$

$t=u+1,\ u+2, \cdots, a-1$에 대하여,

$$W(t,X_t)=\begin{cases} W(t-1, X_{t-1})+h(t)[X_t-D(t)], \\ \qquad \text{if } X_t=X_{t-1} \\ W(t-1, X_{t-1})+s(t,m) \\ \quad +B_i(t,m)q'_i(m)+h(t)[X_t-D(t)] \\ \qquad \text{if } X_t=X_{t-1}+q'_i(m), \\ \qquad i=1,2,\cdots,J^m,\ m=1,2,\cdots,M. \end{cases}$$

$t=v-1,\ v-2, \cdots, a$에 대하여,

$$W(t,X_t)=\begin{cases} W(t+1, X_{t+1})+h(t)[X_t-D(t)], \\ \qquad \text{if } X_t=X_{t+1} \\ W(t+1, X_{t+1})+s(t+1,m) \\ \quad +B_i(t+1,m)q'_i(m)+h(t)[X_t-D(t)] \\ \qquad \text{if } X_t=X_{t+1}-q'_i(m), \\ \qquad i=1,2,\cdots,J^m,\ m=1,2,\cdots,M. \end{cases}$$

fraction period a에서 $X_a-X_{a-1}\geq 0$을 만족하는 쌍들에 대하여 $Z(a\ ;\ u, v)$의 총비용 $O(a\ ;\ u, v)$를 다음과 같이 계산한다.

$$O(a; u,v)=\min_{(X_{a-1}, X_a)}\min_{m}[W(a-1, X_{a-1}) \\ +W(a,X_a)+s(a,m)\delta(X_a-X_{a-1}) \\ +B_i(a,m)(X_a-X_{a-1})]$$

여기서, $q'_i(m)\leq X_a-X_{a-1}<q'_{i+1}(m)$이다.

그러면, $g^0(u,v)=\min_a O(a; u,v).$

2) $g^1(u, v)$의 계산

z를 정리 5에 의해서 결정된 disposal period라 하자. 처분시기는 알지만 처분량을 결정하기가 일반적인 경우 힘이 들므로 $g^0(u, v)$의 계산시 사용하였던 전진법과 후진법을 응용한다.

$t=u$에서 $X_u=0.$

$t=u+1,\ u+2, \cdots, z$에 대하여 전진법을 이용한다. 즉,

$X_t=X_{t-1}+q'_i(m),\ \ i=0,1,\cdots,J^m,\ m=1,2,\cdots,M.$

이 때, $X_t>D(t).$

$g^0(u, v)$의 계산시와는 달리 X_t의 상한이 없는 이유는 훗날의 처분가능성 때문이다.

$t=v,\ \ X_v=D(v)$로부터, $t=v-1,\ \ v-2, \cdots, z$에 대하여는 후진법을 이용한다. 즉,

$X_t=X_{t+1}-q'_i(m),\ \ i=0,1,\cdots,J^m,\ m=1,2,\cdots,M.$

여기서, $X_t>D(t).$

전진법, 후진법 모두 기간 z까지 계산을 하여 전진법으로 구해진 $S(z)$의 원소(X^f_z)와 후진법으로 구해진 $S(z)$의 원소(X^b_z)들을 서로 대응시켜 $X^f_z-X^b_z>0$이 되는 쌍에 대하여만 비교한다.

비용 $W(t, X_t)$의 계산은 기간 z에서를 제외하고는 $g^0(u, v)$의 경우와 같다. 전진법으로 u+1부터 z까지, 후진법으로 v-1부터 z까지 $g^0(u, v)$와 같은 방법으로 계산한 후 disposal period z에서 $X^f_z-X^b_z>0$을 만족하는 쌍들에 대하여 처분비용을 더하고 중복 계산된 시기 z에서의 재고비용을 빼준다.

$$g^1(u,v)=\min_{(X^f_z,X^b_z)}\{W(z,X^f_z)+W(z,X^b_z) \\ +o(z)(X^f_z-X^b_z)-h(z)[X^f_z-D(z)]\}.$$

$g^0(u, v)$, $g^1(u, v)$의 계산시 다음 성질을 이용함으로써 생성되는 집합의 크기를 줄일 수 있다.

성질 3 (Dominance Property) :

어떤 기간에서 같은 누적주문량을 가진 일련의 주문이 여럿 있는 경우, 더 큰 부분비용을 가진 일련의 주문은 최적이 될 수 없다.

4. 예 제

지금까지 개발한 해법을 이용하여 간단한 5-기간 예제를 풀어본다.

관련된 비용은 표 1과 같다. 구매 및 운반시 모두 가격할인점은 한군데 있는데 구매시의 가격할인점은 $q_1=150$이며, 할인율은 $\alpha_1=20\%$이고 운반시 각 수송수단의 운반비용의 할인은 각각 $q_1^1=100$, $\alpha_1^1=10\%$, $q_1^2=200$, $\alpha_1^2=20\%$인 문제를 생각해 본다. 표 2는 계산결과를 요약한 것이다.

표 1. 예제 자료

	m \ t	1	2	3	4	5
s(t,m)	I	100	70	110	130	80
	II	115	80	120	150	90
r(t,m)	I	1	1	1	1	1
	II	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
p(t)		8	7	9	5	6
h(t)		1	1	1	1	1
o(t)		-5	-6	-7	-4	-5
d(t)		50	80	60	100	40

최적의 정책은 기간 1에 수송수단 I로 50을 주문하고 기간 2에 수송수단 II로 200을 주문하며, 기간 4에 수송수단 I로 150을 주문한다. 그리고 초과하여 주문된 양은 기간 3에서 60, 기간 5에서 10을 처분한다. 이 때 최소비용은 2443이다. 기간 2와 기간 4 모두 구입가격 및 운반비용 양쪽 다 할인을 받을 수 있는 양을 구매한 것이 된다.

처분비용이 매우 크다면, 즉 처분이 허용되지 않으면 기간 1, 2와 4에 각각 수송수단 I, II, I로 50, 150, 130을 주문함으로써 최소비용은 2607이 된다. 따라서, 처분비용이 유한하다면 이를 이용함으로써 많은 비용의 절감이 가능하다는 것을 보여준다.

5. 결 언

본 연구에서는 구매 및 수송과정에서의 가격할인과 초과구입분의 처분 문제 등을 고려한 수

표 2. 계산결과

v	u	g°(u,v)	g'(u,v)	DP	DA	g(u,v)	F(u)+g(u,v)	F(v)	(Q(v), m(v))
1	0	550	695			550	550	550	(50,I)
2	0	1337	1175	2	20	1175	1175		
	1	704	608	2	120	608	1158	1158	(50,I), (200,II)
3	0	1683	1673	3	10	1673	1673		
	1	1232	1028	3	60	1028	1578	1578	(50,I), (200,II), 0
	2	708	690	3	90	690	1848		
4	0	2423	2523			2423	2423		
	1	1790	2098			1790	2340		
	2	1500	1508			1500	2658		
	3	720	665	4	50	665	2243	2243	(50,I), (200,II), 0, (150,I)
5	0	2690	2803			2690	2690		
	1	2057	2108			2057	2607		
	2	1868	1770	3	50	1770	2928		
	3	996	865	5	10	865	2443	2443	(50,I), (200,II), 0, (150,I), 0
	4	360	378			360	2603		

DP : Disposal Period
DA : Disposal Amount

송-재고모형을 다룸으로써 기별 적정 구매량 및 처분량과 수송수단을 함께 결정할 수 있도록 하여 구매-수송계획의 최적화를 이루도록 하였다.

이렇게 개발된 모형과 그 해법은 특히 수송비가 구입단가에 큰 몫을 차지하는 업체가 이용함으로써 적절한 구매계획을 수립하는데 큰 도움이 될 수 있을 것이다.

뿐만 아니라, 효과적인 해법을 찾기 위해 정립된 여러 정리와 성질들은 유사문제 또는 앞으로 개선될 모형들의 해법을 찾는데 많은 도움을 줄 것으로 본다.

앞으로의 연구과제로는 각 수송수단의 제한된 수송능력과 수송 소요기간의 상이점 등을 고려한 보다 현실적인 문제를 들 수 있겠다.

Appendix

정리 3의 증명 : 역으로 기간 $u+1,\ u+2,\cdots,$ v에 걸쳐서 fraction period가 여럿 있는 비용이 TC인 최적해를 가정하자. 여럿중 두 fraction period를 a, b라 하자. 단, $u<a<b\le v$.

어떤 i, j에 대하여 $q'_i(m(a))<Q(a)<q'_{i+1}(m(a))$와 $q'_j(m(b))<Q(b)<q'_{j+1}(m(b))$라 가정한다.

$$\Delta=\min\{q'_{i+1}(m(a))-Q(a),\ Q(b)-q'_j(m(b))\},$$

$$\eta=\frac{1}{2}\min\{Q(a)-q'_i(m(a)),\ \min_{a\le t<b} I(t),\ q'_{j+1}(m(b))-Q(b)\}$$

라 하면, $\Delta,\ \eta>0$이다.

i) 시기 a에서의 수송수단 $m(a)$로의 발주량을 $Q(a)+\Delta$로 Δ만큼 증가시키고 시기 b에서는 $Q(b)-\Delta$로 감소시킨다. 이때, 만일 $Q(a)+\Delta=q'_{i+1}(m(a))$이면, 이 새로운 계획의 총비용 TC_1은

$$TC_1=TC+B_{i+1}(a,m(a))[Q(a)+\Delta]-B_i(a,m(a))Q(a)+\Delta[\sum_{t=a}^{b-1}h(t)-B_j(b,m(b))]-s(b,m(b))\ [1-\delta(Q(b)-\Delta)].$$

TC는 최적해의 비용이므로, $TC_1\ge TC$이다. 따라서,

$$B_{i+1}(a,m(a))[Q(a)+\Delta]-B_i(a,m(a))Q(a)+\Delta[\sum_{t=a}^{b-1}h(t)-B_j(b,m(b))]-s(b,m(b))\ [1-\delta(Q(b)-\Delta)]\ge 0. \quad \cdots\cdots (2)$$

한편, $Q(a)+\Delta<q'_{i+1}(m(a))$이면, 같은 방법으로 다음 부등식을 얻는다.

$$\Delta[B_i(a,m(a))+\sum_{t=a}^{b-1}h(t)-B_j(b,m(b))]-s(b,m(b))[1-\delta(Q(b)-\Delta)]\ge 0. \quad \cdots\cdots (3)$$

식 (2)와 (3)으로부터,

$$B_i(a,m(a))+\sum_{t=a}^{b-1}h(t)-B_j(b,m(b))\ge 0. \quad \cdots\cdots (4)$$

ii) 시기 a에서의 발주량을 $Q(a)-\eta$로 감소시키고, 시기 b에서의 발주량을 $Q(b)+\eta$로 증가시키면 $a\le t<b$에서의 재고수준 $I(t)$는 η만큼씩 감소되지만 여전히 0보다는 크다. 이 새로운 계획의 총비용과 최적비용과의 관계로부터 다음 부등식을 얻는다.

$$B_i(a,m(a))+\sum_{t=a}^{b-1}h(t)-B_j(b,m(b))\le 0. \quad \cdots\cdots (5)$$

식 (4)와 (5)는 등식인 경우를 제외하고는 모순이다. 등식인 경우는 disposal period가 하나인 최적해가 존재할 수 있음을 알 수 있다.

Q.E.D.

정리 4의 증명 : 역으로, 비용이 TC인 어떤 최적해에서 기간 $u+1,\ u+2,\cdots,v$에 걸쳐서 disposal period가 여럿 있다고 가정하자. 그중 두 disposal period, a, b($u<a<b\le v$)를

선택한다.

$\Delta=\frac{1}{2}\min\{R(b), \min_{a\leq t<b} I(t)\}$. 그러면, $\Delta>0$.

i) 시기 a에서의 처분량을 $R(a)+\Delta$로 증가시키고 사기 b에서는 $R(b)-\Delta$로 감소사키자. 이러한 변화에 따른 총비용 TC_1은

$$TC_1=TC+[o(a)-\sum_{t=a}^{b-1}h(t)-o(b)]\Delta.$$

$TC_1\geq TC$이므로,

$$o(a)-\sum_{t=a}^{b-1}h(t)-o(b)\geq 0. \quad\cdots\cdots (6)$$

ii) R(a)를 0으로 하고 시기 b의 처분량을 $R(a)+R(b)$로 증가시키자. i)의 경우와 같은 방법을 적용하면 다음 부등식을 얻는다.

$$o(a)-\sum_{t=a}^{b-1}h(t)-o(b)\leq 0. \quad\cdots\cdots (7)$$

식 (6)과 (7)은 등식이 아닌 경우 모순이다. 등식인 경우는 같은 최소값으로 disposal period가 하나인 해를 찾을 수 있다.　　Q.E.D.

정리 5의 증명 : 역으로 어떤 최적해에 시기 z가 아닌 시기 b, $u<b\leq v$에서 처분이 발생한다고 가정하고, 다음 두가지 경우로 나누어 새로운 계획을 세워 보자.

i) $z<b$인 경우, $\Delta=\frac{1}{2}\min\{R(b), \min_{z\leq t<b} I(t)\}$라 하면 $\Delta>0$이다.

이 경우 시기 z에서의 처분량을 $R(z)+\Delta$로 증가시키고, 시기 b에서의 처분량을 $R(b)-\Delta$로 감소시킨다.

ii) $z>b$인 경우, $R(b)=0$으로 하고 시기 z의 처분량을 $R(z)+R(b)$로 증가시킨다.

각 경우, 새로운 계획들이 가정된 최적해 보다 더 낮은 비용이 된다. 따라서, 처분시기는 z이어야 한다.　　Q.E.D.

정리 6의 증명 : 역으로 어떤 최적해에 기간 $u+1, u+2, \cdots, v$에 걸쳐서 fraction period와 disposal period 둘 다 존재한다고 가정하자. a를 disposal period라 하고, b를 fraction period라 하자. TC를 이 최적해의 총비용이라 하자. 어떤 i에 대하여 $q'_i(m(b))<Q(b)<q'_{i+1}(m(b))$라 가정한다.

i) $u<a<b\leq v$인 경우

$\Delta=\frac{1}{2}\min\{\min_{a\leq t<b} I(t), q'_{i+1}(m(b))-Q(b)\}$,

$\eta=\min\{R(a), Q(b)-q'_i(m(b))\}$라 하면

$\Delta, \eta>0$이다. 다음 두가지 경우를 생각한다.

(1) 시기 a에서 처분량이 $R(a)+\Delta$로 증가하고 시기 b에서 수송수단 m(b)로 발주한 양을 $Q(b)+\Delta$로 증가한다.

(2) 시기 a에서의 처분량을 $R(a)-\eta$로 감소하고 시기 b에서의 발주량을 η만큼 감소한다.

지금까지의 증명과 유사한 방법으로 각 경우에 있어 얻어지는 결과가 서로 모순이 됨을 알 수 있다.

ii) $u<b\leq a\leq v$인 경우

$$\Delta=\begin{cases}\frac{1}{2}\min\{Q(b)-q'_i(m(b)), \min_{b\leq t<a} I(t), R(a)\}, & b<a\text{인 경우}\\ \frac{1}{2}\min\{Q(b)-q'_i(m(b)), R(a)\}, & b=a\text{인 경우}\end{cases}$$

그러면 $\Delta>0$.

Q(b)를 $Q(b)-\Delta$로 R(a)를 $R(a)-\Delta$로 감소시킨 새로운 계획의 총비용과 가정한 최적비용과의 차이는

$-\Delta[B_i(b,m(b))+\sum_{t=b}^{a-1}h(t)+o(a)]$이 다. 이 것은 식(1)로부터 음이 된다.

따라서, 최적이라는 가정은 모순이 된다.

Q. E. D.

참고문헌

[1] Aggarwal, S.C., "Auditing Inventory and Transportation Policies," *Industrial Engineering,* Vol. 6, No. 11, pp.28-35, 1974.

[2] Baumol, W.J., and H.D. Vinod, "An Inventory Theoretical Model of Freight Transport Demand," *Management Science,* Vol. 16, No. 7, pp.413-421, 1970.

[3] Eppen, G.D., et al., "Extensions of the Planning Horizon Theorem in the Dynamic Lot Size Model," *Management Science,* Vol. 15, No. 5, pp.268-277, 1969.

[4] Florian, M., and M. Klein, "Deterministic Production Planning with Concave Costs and Capacity Constraints," *Management Science,* Vol.18, No. 1, pp.12-20, 1971.

[5] Florian, M., et al., "Deterministic Production Planning: Algorithms and Complexity," *Management Science,* Vol. 26, No. 7, pp.669-679, 1980.

[6] Hadley, G., and T.M. Whitin, *Analysis of Inventory Systems,* Prentice-Hall, 1963.

[7] Hwang, H., and Kwon-Ik Sohn, "An Optimal Policy for Dynamic Transportation-Inventory Model with Deteriorating Items," *IIE Transactions,* Vol. 17, No. 3, pp.233-241, 1985.

[8] Sethi, S.P., "A Quantity Discount Lot Size Model with Disposals," *International J. of Production Research,* Vol. 22, No. 1, pp.31-39, 1984.

[9] Sohn, Kwon-Ik, and H. Hwang, "A Dynamic Quantity Discount Lot Size Model with Resales," *European J. of Operational Research,* Vol. 28, No. 3, pp.293-297, 1987.