Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 16, No. 1, June, 1990

두개의 차별적인 용량형태를 갖는 단일설비에 대한 용량 확장계획 모형

장 석 화*

A Capacity Expansion Planning Model for Single-Facility with Two Distinct Capacity Type

Suk-Hwa Chang*

Abstract

A deterministic capacity expansion planning model for a two-capacity type facility is analyzed to determine the sizes to be expanded in each period so as to supply the known demands for two distinct capacity type(product) on time and to minimize the total cost incurred over a finite planning horizon of T periods. The model assumes that capacity unit of the facility simultaneously serves a prespecified number of demand units of each capacity type, that capacity type 1 can be used to supply demands for capacity type 2, but that capacity type 2 can't be used to supply demands for capacity type 1. Capacity expansion and excess capacity holding cost functions considered are nondecreasing and concave. The structure of an optimal solution is characterized and then used in developing an efficient dynamic programming algorithm that finds optimal capacity planning policy.

1. 서 론

많은 산업 부문에서 생산설비를 증가시키는 경우는 흔히 발생하는 문제이고, 실질적으로 많은 비용이 필요하다. 때문에 경영관리 관점에서 설비의 용량확장에 관한 문제는 중요하므로 신중한 계획이 요구된다.

설비의 용량확장 계획에 대한 최근 연구로 Luss[2]는 유한기간 동안의 설비 확장문제로서 용량형태 i에서 용량형태 j로 비용을 들여 설비

* 인천대학교 공과대학 산업공학과

변환이 허용되는 경우에 두가지 용량형태에 대한 설비 확장문제를 동적계획법을 이용하여 연구하였다. 여기서는 두 설비 형태의 확장은 각각 독립적으로 이루어지며, 형태 i에서 형태 j로 바뀌어진 용량은 각 기간말이 되어도 원래의 설비의 용량형태로 바뀌지 않는다. 또한 Luss[3]는 하나의 설비가 유한기간 동안 여러가지 종류의 제품에 대한 수요를 동시에 충족시키는 경우의 용량확장 모형을 연구하였다.

Sung와 Chang[5]은 여러 종류의 제품을 동시에 생산할 수 있는 단일설비의 처분이 허용되는 경우의 확장, 처분에 관한 연구를 하였다. 이러한 용량확장 모형들은 사실상 생산계획 문제와 유사한 것으로 이해될 수 있다. Wagner와 Whitin[6]은 유한기간 동안 각 기간마다 제품의 수요가 알려져 있는 경우에, 이 수요를 만족시키기 위하여 제품을 생산할때 최적 생산방법을 구하는 것을 연구하였다. 이 문제에서는 생산과 재고유지 비용함수는 concave 하다는 가정하에 발생하는 총비용을 최소화할 수 있도록 각 기간별 생산량을 결정하는 생산계획 문제를 다루었다. Florian과 Klein[1]은 Wagner와 Whitin의 모형을 각 기간마다 생산량에 상한이 주어진 문제로 확장하였다. 그들은 동적계획법을 이용하는 최단 경로해법을 고안하였다. 그리고 Sung[4]은 단일제품 모형을 다종제품 설비인 문제로 확장하였다.

본 논문은 유한기간 T 동안 이미 알려진 2종류의 용량형태의 수요를 만족시키기 위하여 설비용량을 확장하는 문제이다. 설비 확장시 발생하는 총비용이 최소화되는 각 기간별 최적 설비용량 확장량을 결정하는 것이다. 여기서 용량형태는 단일설비가 할 수 있는 여러 기능적인 형태, 혹은 단일설비 속에 포함된 부분설비의 형태를 나타낸다. 본 문제에서의 단일설비는 제품 1을 생산하는데 이용되는 용량형태 1과 제품 2를 생산하는데 이용되는 용량형태 2를 함께 각각 일정 비율씩 포함하고 있다. 따라서 어느 기간에 설비확장이 이루어지면 두 용량형태의 각 부분이 각각 일정 비율씩 동시에 확장되게 된다.

그리고 용량형태 1이 용량형태 2보다 기능상 우위에 있다고 한다. 즉, 용량형태 2는 제품 1의 생산에는 이용될 수 없으나, 용량형태 1은 유휴용량이 있을 경우 제품 2의 생산에 이용될 수 있는 경우이다. 그러나 용량형태 1이 제품 2의 생산에 이용되는 경우라 할지라도 용량형태가 완전히 바뀌는 것이 아니라 용량형태 1을 계속하여 유지하면서 용량형태 1에 대한 수요가 발생하면 다시 제품 1의 생산에 이용된다.

본 문제에서의 수요는 각 용량형태에 대한 수요증가분(demand increments)을 의미하고, 이미 각 기간별로 확실하게 알려져 있다. 비용요소는 각 기간 설비를 증가시키는데 드는 용량확장 비용과 설비의 각 유휴 용량형태를 유지하는데 드는 재고유지 비용으로 이루어져 있으며, 이 비용함수들은 볼록한 모양(concave)이고 단조증가한다. 그리고 설비의 용량부족은 허용하지 않는다.

본 문제의 응용분야는 화학장치, 콤퓨터 혹은 전화 통신망의 용량계획과 같은 제조 및 서비스 시스템에서 발견될 수 있다. 하나의 설비가 우열이 있는 두 종류의 수요에 서비스 할 수 있도록 두 용량형태를 동시에 갖고 있다. 그리고 높은 등급의 용량은 모든 종류의 수요에 응할 수 있으나, 낮은 등급의 용량은 낮은 등급의 수요에만 응할 수 있다.

본 연구에서는 이와같은 문제에 대하여 설비의 최적 용량확장 계획의 구조에 관한 유용한 특성을 발견하는 것이다. 그것은 설비의 모든 용량형태의 수요를 충분히 만족시키며, 각 확장기간에서 적어도 하나의 용량형태의 수요에 대하여는 정확히 충족시키는 부분계획들로 이루어져 있다. 그러한 독립된 부분계획만으로 이루어진 각 실현가능한 계획은 본 문제에 대한 실현가능

한 확장계획 집합의 극점이 된다는 것이 증명되고 있다. 이러한 특성들은 동적계획 해법에 이용되고 있다. 그리고 이 해법은 수치적 예제로 설명되고 있다.

2. 모형 형성

설비의 용량 한 단위가 용량형태(제품) $j(j=1, 2)$을 α_j 수요 단위만큼씩 동시에 사용될 수 있는 설비의 용량확장 문제를 생각하자. x_t는 기간 $t(t=1, 2, \cdots, T)$에서 설비의 용량확장 크기를 나타내고, y_t는 용량형태 1이 제품 2의 생산에 이용된 용량으로 용량의 대체이용량을 나타낸다. 또한 $r_t(t=1, 2, \cdots, T)$는 기간 t에서 이미 알려진 용량의 수요벡터를 나타낸다. 즉, $r_t=(r_{t1}, r_{t2})$로 각 성분 $r_{tj}\geq 0$는 기간 t에서 용량형태 j에 대한 수요 증가분을 나타낸다. 기간 t는 이산형으로 기간단위는 대상에 따라 다를 수 있지만 년으로 생각한다. 각각의 수요 증가량 r_{tj}는 반드시 총 수요증가량의 $\alpha_j/M(M=\sum_{j=1}^{2}\alpha_j)$일 필요는 없다. 각 용량형태의 유휴설비 용량인 재고수준은 기초재고와 기말재고 수준은 0으로 가정하여도 무방하다. 이는 $R_{1T}(j)/\sum_{i=1}^{2} R_{1T}(i)=\alpha_j/M$(여기서 $R_{mn}(j)=\sum_{t=m}^{n} r_{tj}$)의 등식이 어떠한 j에 대하여 유지되지 않으면 추가적인 수요를 최종 수요의 각각에 등식이 되도록 조정하기 위하여 고려될 수 있다. 그러면, 본 문제는 모든 기간에서 발생하는 총비용을 최소화 하도록 각 기간 설비 용량확장량 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_T)$을 결정하는 것이다: 모든 $t=1, 2, \cdots, T;\ j=1, 2$에 대하여

$$\text{Minimize } G(X)=\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{2}\left[C_t(x_t)+H_{tj}(I_{tj})\right]$$

$$\begin{aligned}
\text{subject to }\ & I_{t1}=J_{t1}-y_t\delta_1(J_{t2})\\
& I_{t2}=J_{t2}+\beta y_t\delta_1(J_{t2}) \qquad\qquad (P1)\\
& J_{tj}=J_{t-1,j}+\alpha_j x_t-r_{tj}\\
& 0\leq y_t\leq J_{t1}\\
& x_t\geq 0,\ I_{tj}\geq 0,\ J_{t1}\geq 0\\
& I_{0j}=0=I_{Tj},\ J_{0j}=0=J_{Tj}
\end{aligned}$$

여기서 $\delta_1(J_{t2})=\begin{cases}1, & \text{if } J_{t2}<0\\ 0, & \text{if } J_{t2}\geq 0\end{cases}$

$C_t(.)$는 기간 t에서 설비용량 확장함수로 concave 하다. 그리고 $H_{tj}(.)$는 기간 t에서 기간 t+1로 유휴 용량형태 j를 유지함으로서 발생하는 재고비용으로 concave 하다. J_{tj}는 기간 t에서 용량형태 j의 실제 설비의 재고용량을 나타내는 것으로, 용량형태 1이 제품 2의 생산에 이용되기 전의 재고용량을 말한다. I_{tj}는 용량이 대체이용된 후의 재고용량을 나타낸다. 그러므로 기간 t에서 용량형태 1이 제품 2의 생산에 이용되면 J_{tj}와 I_{tj}는 같지 않게 된다. β는 용량형태 1의 한 단위가 용량형태 2로 이용될 때 용량형태 2에서 이용되는 용량단위를 나타낸다.

문제 (P1)의 제약조건은 closed bounded convex set이다. 그리고 G는 concave 하므로, 우리는 이미 최소값이 극점(extreme point)에서 존재한다는 것을 알고 있다. D를 실현가능해(feasible solution) 영역의 모든 극점의 집합이라 하자. 그리고 최적 용량확장 계획을 구하는데 이용하기 위하여 사용될 수 있는 D의 특징에 관한 기술을 다음 부분에서 다루고자 한다.

3. 극점의 특징

먼저 다음 정의들을 도입하자.

정의 : $x_t>0$이면 기간 t는 설비용량 확장기간이라 하자.

극점의 집합 D의 특징의 기본을 이루게 될 "기껏-하나의 용량확장" 배열(sequence)의 개념을 도입하자.

정의 : 어떠한 $j \in \{1, 2\}$에 대하여 $I_{nj}=0$이면 기간 n은 용량점이라 하자. 그러면 용량점 n에서는 어떠한 j에 대하여는 $I_{nj}=0$이고, 모든 i에 대하여 $I_{ni} \geq 0$이다. 더불어, L_{mn}은 "용량확장 배열"이라 하자. 여기서 L_{mn}은 두개의 연속된 용량점 m과 n 사이의 모든 기간에 대한 용량확장 계획으로, T까지의 모든 기간에서의 실현가능한 용량확장 계획 X의 성분에 포함되는 것으로 계획 X의 부분집합을 나타낸다. 즉,

$$L_{mn}=\left\{ \begin{array}{l|l} x_t & I_{mi}=0=I_{nj},\ \text{어떠한 } i, j \in \{1, 2\} \\ t=m+2,\cdots,n & I_{tk}>0,\ \text{모든 } k \text{ 와 } t\ m<t<n \end{array} \right\}$$

여기서 $0 \leq m < n \leq T$이다.

분명히 어떠한 실현가능한 용량확장 계획도 하나 혹은 그 이상의 용량확장 배열들로 나누어 질 수 있다. 그리고 $I_0=0=I_T$이기 때문에 적어도 하나의 용량확장 배열 L_{0T}가 존재한다. 더우기 실현가능한 용량확장 계획 X의 모든 용량점은 보조정리(Lemma) 1에서 설명될 두개의 서로 다른 실현가능한 계획의 용량점과 함께 공유된다.

보조정리(Lemma) 1 : 만약 X'과 X"가 서로 다른 실현가능한 계획이고 실현가능한 계획 $X=\frac{1}{2}(X'+X'')$이면, X'와 X"는 X의 모든 용량점을 함께 공유한다.

증명 : 기간 s가 X의 용량점이라 생각하자. 그리고 제품 i에 대한 수요는 정확히 기간 s에서 만족된다고 하자. 그러면 가설에 의해

$$\sum_{t=1}^{s} \alpha_i x_t=\frac{1}{2}\left[\sum_{t=1}^{s} \alpha_i x'_t+\sum_{t=1}^{s} \alpha_i x''_t\right]$$

만일 $\sum_{t=1}^{s} r_{ti}$을 각 항에서 빼면

$$\sum_{t=1}^{s}(\alpha_i x_t-r_{ti})=\frac{1}{2}\left[\sum_{t=1}^{s}(\alpha_i x'_t-r_{ti})+\sum_{t=1}^{s}(\alpha_i x''_t-r_{ti})\right]$$

여기서 $y_t>0$이면 모든 각 항에서 같이 발생하므로 생략하여도 무방하다. 그리고 $I_{si}=\frac{1}{2}(I'_{si}+I''_{si})$. $I_{si}=0$이므로, I'_{si}와 I''_{si}는 모두 0이어야 한다. 따라서 두 계획은 용량점 s를 공유한다. 그렇지 않으면 I'_{si}와 I''_{si} 중 하나는 음수가 된다. 이 경우 관련된 계획은 실현가능하지 않다. 이것으로 증명이 완료된다.

정의 : 용량확장 배열 L_{mn}은 용량확장이 기껏-하나의 기간 $d(m+1 \leq d \leq n)$에서 발생한다면 기껏-하나의 용량확장 배열이라 불린다.

정리(Theorem) 1 : 실현가능한 용량확장 계획 X가 D안에 있으면 이것은 기껏-하나의 용량확장 배열들로 이루어져 있고, 그리고 이것의 반대도 성립한다.

증명 : $X \in D$라 하자. L_{mn}은 X의 일부분이나, L_{mn}은 기껏-하나의 용량확장 배열이 아니라고 하자. 그러면 적어도 두개의 $x_b>0$, $x_d>0$인 기간 b와 $d(m+1 \leq b < d \leq n)$가 존재한다고 하자. 이는 일반성을 잃지 않으면서, 우리는 그러한 기간이 있다고 생각할 수 있다.

$$\delta=\frac{1}{2}\min\left[x_b, x_d, \min_{b \leq t \leq d}\{I_{ti}/\alpha_i\ \forall i\}\right]$$

라 하자. 그리고 U_t는 t번째 위치는 1이고, 나머지는 모두 0인 (n-m) 구성 벡터라 하자. 지금 서로 다른 용량확장 배열들을 다음과 같이 정의한다.

$L'_{mn}=L_{mn}-\delta U_b+\delta U_d$, 그리고

$L''_{mn}=L_{mn}+\delta U_b-\delta U_d$

$\delta>0$이므로 이 배열들도 쉽게 실현가능함을 알 수 있다. 그러나 $L_{mn}=\frac{1}{2}(L'_{mn}+L''_{mn})$이므로 X가 극점이라는 가정에 모순이 된다. 이것으로 정리의 필요조건이 증명되었다.

반대를 증명하기 위하여 $X \notin D$라 하자. 그러면 $X=\frac{1}{2}(X'+X'')$인 실현가능한 두개의 서로 다른 계획 X'와 X"이 존재한다. 보조정리 1로

부터 X'와 X''는 모든 용량점을 공유하게 된다. m과 n이 이러한 두개의 연속적인 점이라 하자. 그리고 L_{mn}, X'_{mn}과 X''_{mn}은 각각 X, X'과 X'' 계획내에 포함된 다른 부분계획이라 하자. 분명히, $L_{mn}=\frac{1}{2}(X'_{mn}+X''_{mn})$이고, 그리고 X'_{mn}와 X''_{mn}는 어느것도 기껏-하나의 용량확장 배열이 아니다. 이것은 충분히 작은 $\sigma>0$에 대하여 다음과 같이 나타낼 수 있는 적어도 두개의 b와 d $(m+1\leq b<d\leq n)$이 존재한다는 것을 의미한다.

$$X'_{mn}=L_{mn}-\sigma U_b+\sigma U_d, \quad \text{그리고}$$
$$X''_{mn}=L_{mn}+\sigma U_b-\sigma U_d$$

배열 L_{mn}은 기껏-하나의 용량확장 배열이기 때문에 X'_{mn}와 X''_{mn}은 동시에 실현가능할 수 없다. 따라서 X'와 X''도 실현가능할 수 없다. 이것은 $X\not\in D$이라는 우리의 가정에 모순이 된다. 그러므로 이것으로 위 정리가 증명되었다.

정리 1은 극점의 집합 D는 기껏-하나의 용량확장 배열들로 이루어진 모든 실현가능한 해로 확인된다는 것을 의미한다. 그러므로 이러한 실현가능한 해들중 하나는 T 기간 동안 최소비용을 발생하는 최적해가 될 수 있다.

다음 정리 2에서는 용량점 n에서의 각 용량형태의 재고상태가 어떻게 나타내지는가를 설명하고 있다.

정리 2 : 기간 n에서 $R_{1n}(1)/\alpha_1>R_{1n}(2)/\alpha_2$이면 용량확장 배열 L_{mn}의 기간 n에서 모든 $i\in\{1, 2\}$에 대하여 $I_{ni}=0$이 된다.

증명 : $J_{n1}>0$ 그리고 $J_{n2}<0$이고, $I_{n1}>0$ 그리고 $I_{n2}=0$이라 가정하자. 그러면 기간 n에서 $y_n=-J_{n2}/\beta>0$이 된다. 그러면 기간 n에서는 이 가정을 만족시키고, L_{mn}의 설비 용량확장 기간 $k(m<k\leq n)$에서의 확장량이 x_k, $x_k+\theta$, $x_k-\theta$인 서로 다른 용량확장 계획 X, X'와 X''이 존재한다. 그리고 I_n, I'_n와 I''_n은 기간 n에서 각각 계획 X, X'와 X''가 관련된 재고벡터라고 하자. τ는 각 계획과 관련하여 θ에 의하여 발생하는 기간 n에서 y_n의 변화량이다. x_k, $x_k+\theta$, $x_k-\theta$의 각 확장량의 차이는 y_n, $y_n-\tau$, $y_n+\tau$의 변화를 발생시킨다. 그리고 $\tau=\theta\,\alpha_2/\beta$의 관계를 유지한다. 따라서 위 가정을 유지하면서 다음식을 만족시키는 적은값의 $\theta>0$, $\tau>0$인 것이 존재한다.

$I'_{n1}=I_{n1}-\theta\,\alpha_1-\tau$, 그리고 $I''_{n1}=I_{n1}+\theta\,\alpha_1+\tau$
$I'_{n2}=I_{n2}-\theta\,\alpha_2+\tau\beta$, 그리고 $I''_{n2}=I_{n2}+\theta\,\alpha_2-\tau\beta$

따라서 $\frac{1}{2}(I'_{n1}+I''_{n1})=I_{n1}$, 그리고 $\frac{1}{2}(I'_{n2}+I''_{n2})=I_{n2}$이다.

그리고 $X=\frac{1}{2}(X'+X'')$이 성립하므로 X가 극점해가 아니라는 것을 의미한다. 이것으로 이 증명이 완료되었다.

4. 해 법

해법을 설명하기 전에 최적해 X^*의 모든 구성요소 $x_t(t=1, 2, \cdots, T)$을 어떻게 결정할 것인가를 상세히 설명할 필요가 있다.

정리 1에서 주어진 D의 구성요소에 대한 기술은 최적해 X^*을 발견하는데 이용하기 위하여 사용될 수 있다. $x_{mn}(k)$은 모든 j와 $t(m<t<n)$에 대하여 $I_{tj}>0$, $\prod_{i=1}^{2}I_{mi}=0$ 그리고 $\prod_{i=1}^{2}I_{ni}=0$이 주어지고, 기간 $m+1, \cdots, n$에 대한 모든 수요를 만족시키기 위하여 기간 $k(0\leq m<k<n\leq T)$에서 확장된 용량크기를 나타낸다.

정리 2는 기간 t까지의 총수요와 확장비율에 따라 기간 t까지의 총확장량 $\sum_{s=1}^{t}x_s$와 대체이용량 y_t를 구하는데 이용된다. 먼저 $\sum_{s=1}^{t}x_s$와 y_t를 결정하는 것을 설명한다.

$\frac{R_{1t}(1)}{\alpha_1}\geq\frac{R_{1t}(2)}{\alpha_2}$이면, $I_{t1}=0$, $I_{t2}>0$이므로

$\sum_{s=1}^{t} x_s = R_{1t}(1)/\alpha_1$이고, $y_t=0$이다.

$\frac{R_{1t}(1)}{\alpha_1} < \frac{R_{1t}(2)}{\alpha_2}$이면, 정리 2에 의해 $I_{t1}=0$, $I_{t2}=0$이므로,

$$\alpha_1 \sum_{s=1}^{t} x_s - y_t = R_{1t}(1),$$

$$\alpha_2 \sum_{s=1}^{t} x_s + \beta\, y_t = R_{1t}(2),$$

이 성립한다. 위 식을 $\sum_{s=1}^{t} x_s$와 y_t에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\sum_{s=1}^{t} x_s = \frac{R_{1t}(2)+\beta R_{1t}(1)}{\alpha_2+\beta\,\alpha_1},$$

$$y_t = \frac{\alpha_1 R_{1t}(2)-\alpha_2 R_{1t}(1)}{\alpha_2+\beta\,\alpha_1}$$

정리 3 : 최적 용량확장 계획 X는 다음 관계를 만족하는 식을 통하여 얻어지는 구성요소 x_t $(T=1, 2, \cdots, T)$로만 이루어져 있다. 각 실현가능한 배열 L_{mn}와 기간 $k(0 \le m < k \le n \le T)$에 대하여,

$$x_m(k) = L(n) - L(m).$$

여기서,

$$L(t) = \begin{cases} \frac{R_{1t}(1)}{\alpha_1}, & \text{if } \frac{R_{1t}(1)}{\alpha_1} \ge \frac{R_{1t}(2)}{\alpha_2} \\ \frac{R_{1t}(2)+\beta R_{1t}(1)}{\alpha_2+\beta\,\alpha_1}, & \text{if } \frac{R_{1t}(1)}{\alpha_1} < \frac{R_{1T}(2)}{\alpha_2} \end{cases}$$

정리 3의 결과는 최적 용량확장 계확은 이러한 L_m 배열들의 최적(최소비용) 결합을 찾음으로써 발견될 수 있다. 그후에 이를 동적계획 순한식에 이용할 수 있을 것이다.

d_{mn}은 어떠한 i, $j \in \{1, 2\}$에 대하여 $I_{mi}=0=I_{nj}$이고, 모든 k와 $t(m<t<n)$에 대하여 $I_{tk}>0$이 주어지고, 기간 $m+1, \cdots, n$ 동안의 최적 용량확장 계획 L_{mn}과 관련된 비용이다. 그러면 d_{mn}은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$0 \le m < n \le T$ 에 대하여,

$$d_{mn} = [\min_{m<k\le n} \{C_k(x_{mn}(k)) + \sum_{t=m+1}^{n} \sum_{j=1}^{2} H_{tj}(I_{tj})\}] \quad \cdots\cdots (1)$$

정리 3의 결과와 함께 d_{mn} 값은 기간 0, 1, 2, $\cdots$, T을 단계로 사용하여 동적계획 순환식을 만들어 적용할 수 있다. F_t는 $\prod_{i=1}^{2} I_{ti}=0$이 주어지고, 기간 0, 1, 2, $\cdots$, $t(t=0, 1, 2, \cdots, T)$에 대한 최소비용이라 하자. 모든 d_{mn} 값이 알려지면, 주어진 문제는 다음의 동적계획 문제로 다시 공식화될 수 있다.

$$F_n = \min_{0 \le m \le n-1} [F_m + d_{mn}],\ n=0, 1, 2, \cdots, T \quad \cdots\cdots (2)$$

그리고 $F_0 \equiv 0$. 순환식 (2)는 처음 n 기간에 대한 최소비용은 기간 $k(m<k \le n)$에서 용량확장비용, 기간 m+1부터 n까지의 유휴 용량을 유지함으로써 발생하는 재고비용과 기간 0부터 m까지의 자체 비용에서의 최적 정책을 백합으로써 발생하는 비용으로 이루어져 있다.

모든 비용함수는 concave 하기 때문에 실현가능 영역의 극점에 해당하는 곳에서 원래 문제의 최적해가 존재한다. 더우기, 정리 1, 2와 3은 기간 n에서 이러한 형태의 최적 용량확장 계획을 발견하는 것을 보장하여 준다. 그러므로 여기서는 주어진 문제의 극점해의 일부분이 될 수 있는 d_{mn} 값을 찾는것에 중점을 둔다. 그리고 최적해는 기껏-하나의 용량확장 배열들로만 이루어진 실현가능한 용량확장 계획으로 이루어져 있다.

정리 3과 관계식 (1), (2)의 결과들을 이용하여 해를 푸는 과정을 다음의 단계로 나타낸다.

단계 1 : $F_0=0$, $n=1$, 그리고 $m=0$로 놓는다.

단계 2 : 정리 3과 관계식 (1)을 사용하여 각 $m(0 \le m \le n-1)$에 대하여 d_{mn} 값을 계산한다. 그리고 $m=n-1$까지 $m=m+1$로 하여 단계 2를 반복한다.

단계 3 : 각 최적 정책 F_n을 발견하기 위하여 순환식 (2)를 적용한다. 그리고 마지막 기간 $n=T$ 까지 $n=n+1$로 하여 단계 2와 3을 반복한다.

본 문제에 대한 해법의 필요한 계산량은 기간 T의 다항 함수로 나타내어짐을 쉽게 알수 있다.

5. 수치적 예제

6-기간, 2-제품 단일설비 문제로 해법을 설명하고자 한다. 용량확장비율은 $\alpha_1=3$, $\alpha_2=2$이고, 그리고 $\beta=1.5$이다. 용량확장 비용함수와 재고유지 비용함수는 다음과 같이 주어진다.

$$C_t(x_t)=(50-t)\ \delta_2(x_t)+(10-0.5t)x_t$$

$$H_{t1}(I_{t1})=2I_{t1}$$

$$H_{t2}(I_{t2})=1.5I_{t2}$$

여기서 $\delta_2(w)=\begin{cases}1, & \text{if } w>0,\\ 0, & \text{if } w=0.\end{cases}$

$\{r_{t1}\}$에 대한 수요들은 (12, 7, 8, 13, 9, 11)이고, 그리고 $\{r_{t2}\}$에 대한 수요들은 (6, 10, 5, 4, 6, 9)이다. 이러한 수요들은 각 기간 $t(0\leq m<t\leq n \leq T)$에서 x_t의 계산을위하여 $L(n)$과 $L(n)$-$L(m)$ 값이 표 1에 나타내어져 있다. 표 1의 마지막 행은 해의 풀이과정을 통하여 계산한 최적해 X^*을 나타낸다.

부분 4에서의 해의 풀이과정을 예제에 적용한다. 그리고 $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$이 다음과 같이 계산된다.

$x_{01}(1)=4$ 에서 $F_1=F_0+d_{01}=90$; $x_{02}(1)=89/13$ 에서 $F_2=\min_{0\leq m\leq 1}[F_m+d_{m2}]=F_0+d_{02}=142.65$; $x_{12}(2)=71/13$ 에서 $F_3=\min_{0\leq m\leq 2}[F_m+d_{m3}]=F_1+d_{13}=210.31$; $x_{34}(4)=151/39$ 에 서 $F_4=\min_{0\leq m\leq 3}[F_m+d_{m4}]=F_3+d_{34}=289.78$; $x_{35}(4)=268/39$ 에서 $F_5=\min_{0\leq m\leq 4}[F_m+d_{m5}]=F_3+d_{35}=343.28$; $x_{56}(6)=11/3$ 에서 $F_6=\min_{0\leq m\leq 5}[F_m+d_{m6}]=F_5+d_{56}=412.95$; 이와같이 하여 예제의 최적해는 $X^*=(4,\ 71/13,\ 0,\ 268/39,\ 0,\ 11/3)$이고, 이 때 총비용은 412.95이다.

6. 결　　론

본 논문에서 단일설비가 2종류의 제품을 동시에 생산할 수 있는 용량형태들을 갖고 있는 경우의 설비용량 확장문제를 연구하였다. 여기서 각 용량형태 사이에는 높은 등급의 용량형태는 낮

표 1. 수요 데이타 및 L_{mn}의 확장량

n	r_{n1}	r_{n2}	$\frac{R_{1n}(1)}{\alpha_1}$	$\frac{R_{1n}(2)}{\alpha_2}$	L(n)	L(n)-L(m)					
						m					
						0	1	2	3	4	5
1	12	6	4	3	4	4					
2	7	10	19/3	8	89/13	89/13	37/13				
3	8	5	9	21/2	123/13	123/13	71/13	34/13			
4	13	4	40/3	25/2	40/3	40/3	28/3	253/39	151/39		
5	9	6	49/3	31/2	49/3	49/3	37/3	370/39	268/39	9/3	
6	11	9	20	20	20	20	16	171/13	137/13	20/3	11/3
					t	1	2	3	4	5	6
					X^* x_t	4	71/13	0	268/39	0	11/3

은 등급의 제품생산에는 이용될 수 있으나, 낮은 등급의 용량형태는 높은 등급의 제품생산에는 이용될 수 없는 경우이다. 우리는 기껏-하나의 확장 배열로만 이루어진 실현가능한 계획으로 최적 계획의 구조의 특징을 규명하였다. 이 특징들은 최적 용량계획 정책을 발견하는데 유용한 동적계획 해법을 만드는데 이용되었다.

본 논문의 확장으로서 각 기간 용량확장량이 제한적인 경우와 설비의 용량형태 구성비율 α_j 이 각 기간마다 달라지는 경우 (α_{tj})와 용량형태가 M 종류인 경우 등을 생각할 수 있을 것이다.

참고문헌

[1] Florian, M. and M. Klein, "Deterministic Production Planning with Concave Costs and Capacity Constraints," Management Sci., 18, 12-20(1971)

[2] Luss, H., "A Capacity Expansion Model for Two Facility Types," Naval Res. Logist. Quart., 26, 291-303(1979)

[3] Luss, H., "Capacity Expansion Planning for a Single Facility Products Line," European J. of Operational Res., 18, 27-34(1984)

[4] Sung, C.S. "A Production Planning Model for Multi-Product Facilities," J. Operations Res. Soc. of Japan, 28, 345-358(1985)

[5] Sung, C.S. and S.H. Chang, "A Capacity Planning Model for a Multi-Product Facility," Engineering Optimization, 10, 263-270(1987)

[6] Wagner, H.A. and T.M. Whitin, "Dynamic Version of the Economic Lot Size Model," Management Sci., 5, 89-96(1959)