

나선이론에 의한 로봇의 운동 및 역학적 해석

최 용 제
국방과학 연구소



● 1955년생
● 로봇공학에서 원격조정 로봇 및 충돌 회피를 전공했으며, 로봇의 운동학 동역학 및 자동 작업 계획에 관심을 가지고 있다.

1. 머리 말

로봇의 기하학적 그리고 운동 및 역학적 해석은 로봇의 운전자가 고정좌표계에서의 값들로 입력하게 되는 로봇의 손(end-effector)의 위치, 자세(orientation) 및 속도와, 로봇을 구동하기 위하여 필요로 하는 정보, 즉 각 구동축에 연결된 액츄에이터의 변위와 속도값들 사이의 관계에 대한 이해에서 시작한다. 로봇의 손의 위치 및 자세와 액츄에이터의 변위 사이의 관계는 기하학적 관계이며, 이의 시간에 대한 미분으로부터 얻을 수 있는 속도 관계는 운동학적 관계로서, Jacobian에 의하여 표현된다. 여기서 Jacobian은 속도 변환 행렬인데, 이 변환 행렬의 구성과 이를 구성하는 원소들의 기하학적 내지는 물리적 의미를 고찰해 보는 것도 매우 가치있는 일이며, 이러한 해석은 로봇의 운동을 이해하는 데에 도움을 준다. 이러한 시도에 있어서, 수학적인 도구로 사용되어 온 것이 '나선이론'(the theory of screw)이다. 나선이론은 19세기 초의 Poinsot의 강체에 작용하는 임의의 힘들과 커플(couple)들은 한 개의 합력과 커플(couple)로 대체할 수 있다고 하는 개념과, Plücker가 소개한 선좌표(line coordinates)의 개념⁽¹⁾, 스칼라량과 벡터의 조합에 의한 Hamilton의 사원수(quarter-

nion)의 개발에 따라 발전되었으며, 1871년에 이르러 Ball⁽²⁾은 처음 나선이론을 발표하고, 이어서 1873년에 Clifford⁽³⁾가 사원수의 이원적 조합에 의하여 나선의 연산자(operator)로서 사용할 수 있는 이차사원수(biquaternion)의 개념을 발표하였다. 1895년에는 Kotelnikov가 벡터와 나선의 상관관계를 규명하였고(the principle of transfer), Study⁽⁴⁾는 1901년에 또 다른 형태의 복소수인 이원수(dual number)의 기하학적 응용으로 공간상의 두 개의 직선의 상대 위치를 표현할 수 있는 이원각(dual angle)을 발표 하였는데 이들은 나선 이론에서 중요한 역할을 한다. 이러한 나선이론은 1948년에 와서야 Dientberg에 의하여 3차원 기구학에 이용되기 시작하였고,⁽⁵⁾ 1960년대에 들면서 Freudenstein, Yang 등⁽⁶⁻⁸⁾이 이차사원수와 나선대수를 3차원 기구의 운동 해석에 사용하였다. Hunt는 처음으로 상대운동하는 세 개의 물체의 운동 해석에 나선이론을 이용하였는데, 그는 Ball의 나선이론을 재발굴한 것으로 알려져 있으며, 나선이론에 의한 3차원 기구와 매니플레이터의 해석을 체계화하였다.⁽⁹⁾

나선은 강체의 변위(displacement)나, 순간 속도 및 물체에 작용하는 일반적인 힘을 표현하는 기하학적 요소(geometrical entity)이다. 나선이론은 근래에 들어 이미 많은 로봇 연구자들에 의하여 사용되고 있는데, 그 것은 3차

원 공간에서의 강체의 일반적인 변위나 속도가 나선에 의하여 표현되는 것이 매우 자연스럽게 간편하며, 따라서 나선의 이해로부터 로봇의 속도 Jacobian에 대한 기하학적 의미를 더욱 명백히 할 수 있기 때문이라 하겠다. 또한, 나선이 기하학적 요소이므로 인하여 해석하고자 하는 대상의 로봇에 대한 기하적 모델의 관찰만으로도 Jacobian을 용이하게 구할 수 있는 방법을 제시하며, 특히 로봇의 위치/힘 동시제어에 있어서는 중요한 이론적 배경을 제공하고 있다. 이 글에서는 나선이론을 통하여 Jacobian을 재조명하여 보고, 이러한 새로운 해석 방법이 로봇의 운동과 정역학적 해석에 어떻게 활용되는지를 설명하고자 한다.

2. 수학적 배경

2.1 플뤼커의 선좌표(Plücker Line Coordinate)

역학에서 속도나 힘 등을 표현하기 위하여 사용되는 벡터는 방향과 크기를 나타내며, 도식적으로는 화살표를 갖는 직선으로 표시한다. 그러나 때로는 벡터의 표기에 있어서 방향과 크기 이외에 위치를 더불어 표현하여야 보다 정확한 물리적 의미를 부여할 수 있는 경우가 있다. 전자의 경우와 같이 방향과 크기만을 나타내는 벡터를 자유벡터(free vector), 그리고 후자의 경우처럼 위치를 함께 표현하는 벡터를 속박벡터(line bound vector) 또는 간단히 선벡터(line vector)라 부르는데, 이와 같은 벡터의 엄밀한 구분은 나선이론의 전개에 있어 매우 중요하다. 벡터는 직선에 의하여 도식적으로 표시되는데, 사실상, 공간상에서의 한 개의 직선은, 주어진 두 개의 서로 다른 점들 또는 서로 다른 두 개의 평면에 의하여 결정할 수 있다. 플뤼커⁽¹⁾는 한 개의 직선을 결정함에 있어서 취할 수 있는 이와 같은 두 개의 서로 다른 방식을 수학적으로 구분하고 이의 역학에서의 이용 방법을 제시하였는데, 이러한 구분은 로봇의 해석에서 매우 진요히 사용될 수 있다.

공간상에 있는 두 개의 점, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 와 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 이 주어진 경우, 이 두 점들을 잇는 직선을 가리키는 단위 벡터를 S 라 하면, S 는 다음과 같다.

$$\underline{S} = \underline{L}\underline{i} + \underline{M}\underline{j} + \underline{N}\underline{k} \quad (1)$$

여기서,

$$\begin{aligned} L &= (x_1 - x_0) / |\underline{P}_0\underline{P}_1| \\ M &= (y_1 - y_0) / |\underline{P}_0\underline{P}_1| \\ N &= (z_1 - z_0) / |\underline{P}_0\underline{P}_1| \end{aligned} \quad (2)$$

로 표시할 수 있다. 이제 여기서 특정한 직선상에 놓여 있도록 제한된 벡터를 생각해 본다. 그림 1에서 벡터 r 이 특정 직선상의 임의의 점들을 가리키는 벡터라고 하면

$$(\underline{r} - \underline{r}_1) \times \underline{S} = 0 \quad (3)$$

즉,

$$\underline{r} \times \underline{S} = \underline{S}_0 \quad (4)$$

여기서 $\underline{S}_0 = \underline{r}_1 \times \underline{S}$ 로서 원점에 대한 이 직선의 모멘트를 나타낸다. \underline{S}_0 를 행렬식의 꼴로 표시해 보면 아래와 같다.

$$\underline{S}_0 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ L & M & N \end{vmatrix} = \underline{P}\underline{i} + \underline{Q}\underline{j} + \underline{R}\underline{k} \quad (5)$$

여기서

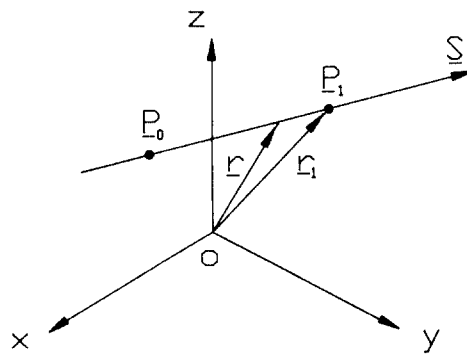


그림 1 공간상의 직선

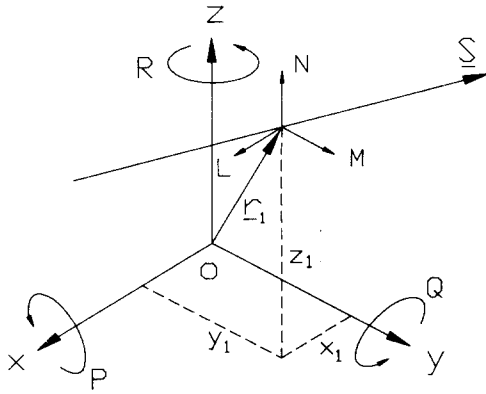


그림 2 플뤼커 선좌표

$$P = \begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} \quad Q = \begin{vmatrix} z_0 & x_0 \\ z_1 & x_1 \end{vmatrix}$$

$$R = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \quad (6)$$

이다. 이와 같이 특정한 직선위에 놓여 있도록 제한된 벡터를 선벡터(line vector)라 부른다. 선벡터는 $(\underline{S}; \underline{S}_0)$ 또는 $(L, M, N; P, Q, R)$ 과 같이 표기할 수 있는데 이러한 좌표를 이 직선의 플뤼커 선좌표(plücker line coordinate)라 부른다. 플뤼커 선좌표에서 L, M, N 은 선배길 축의 각 좌표축 성분, 그리고 P, Q, R 은 모멘트의 각 축에 대한 성분임을 쉽게 알 수 있다. (그림 2참조)

한편, 그림 3에서 보는 바와 같이, 공간상에 있는 두 개의 점과 두 개의 평면을 각각 제차좌표(homogeneous coordinate)로 $x(x_0, x_1, x_2, x_3)^T$, $y(y_0, y_1, y_2, y_3)^T$, $U(U_0, U_1, U_2, U_3)^T$, 그리고 $V(V_0, V_1, V_2, V_3)^T$ 로 표현할 수 있는데, 이들은 다음의 식들을 만족한다.^(10,11)

$$U^T x = U^T y = 0$$

$$V^T x = V^T y = 0 \quad (7)$$

앞서 언급한 바와 같이, 플뤼커는 두 개의 점에 의하여 결정된 직선과 두 개의 평면에 의하여 결정된 직선의 표현을 구별하였는데, 먼저 전자의 경우에 대한 직선을 λ 라 표시하면, λ

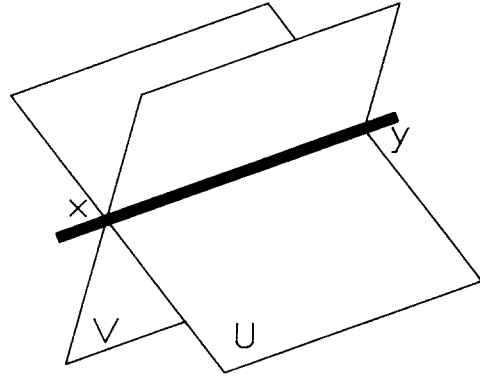


그림 3 직선의 서로 다른 방법에 의한 결정

는 $|x y|$ 의 01, 02, 03, 23, 31, 12의 순차적인 2차행렬식에 의하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\lambda = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \quad (8)$$

또는 간단히

$$\lambda = [\lambda_{01}, \lambda_{02}, \lambda_{03}, \lambda_{23}, \lambda_{31}, \lambda_{12}]^T \quad (9)$$

와 같이 표현할 수 있으며, 따라서 $\lambda_{ij} = x_i y_j - y_i x_j$ 임을 나타낸다. 마찬가지로, 두 개의 평면에 의하여 결정된 직선 Λ 는,

$$\Lambda = [\Lambda_{01}, \Lambda_{02}, \Lambda_{03}, \Lambda_{23}, \Lambda_{31}, \Lambda_{12}]^T \quad (10)$$

와 같이 표현할 수 있다. 여기서 $\Lambda_{ij} = U_i V_j - V_i U_j$ 이다. 플뤼커는 전자의 방식을 직선의 방사좌표(ray coordinate)라 하고, 후자의 표현을 축좌표(axis coordinate)라 명명하였다. 이 글에서는, 방사좌표는 영문 또는 그리스 소문자로 축좌표는 대문자로 표기하기로 한다. 두 개의 점들을 표현한 제차좌표는 투영기하학(projective geometry)적 표현이므로 x_0 와 y_0 를 일정 상수로 보아도 무방하다. 따라서, $x_0 = y_0 = 1$ 이라 하면, λ 는 앞서 설명된 선벡터의 표현과 같고, 또한 앞서 유도한 선벡터는

엄밀히 말하여 직선의 방사좌표에 의한 표현이 있음을 알 수 있다.

직선은 하나의 기하학적 요소이다. 그러나 이상에서 보아온 바와 같이 단지 그 표현은 상이할 수 있으므로, 이와 같은 직선의 서로 다른 표현 사이에는 특정한 수학적 관계가 존재하리라 짐작할 수 있는데, 식 (7)의 간단한 조합에 의하여 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\lambda = \Delta \lambda \quad (11)$$

또는

$$\lambda = \Delta \lambda \quad (12)$$

여기서

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ I_3 & 0_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

이다. 직선은 제 자신과 교차하므로 이 조건을 이용하여 다음의 쌍선형형식(bilinear form)

$$\lambda^T \lambda = 0 \quad (14)$$

또는

$$\lambda^T \lambda = 0 \quad (15)$$

을 얻을 수 있다.

2.2 나선(Screw)

Clifford는 일반 복소수 $a+ib$ 와 같은 꼴을 갖는 또 다른 복소수인 이원수(dual number) 즉 $a+\epsilon a_0$ 를 소개하였는데 여기서 a, a_0 는 실수이며, $\epsilon^2=0$ 라는 성질을 갖는다. 이원수는 일반 복소수와 마찬가지로 다음과 같이 합과 곱의 연산법칙을 갖는다:

$$\begin{aligned} & (a_1 + \epsilon a_{01}) + (a_2 + \epsilon a_{02}) \\ & = a_1 + a_2 + \epsilon (a_{01} + a_{02}) \\ & (a_1 + \epsilon a_{01})(a_2 + \epsilon a_{02}) \\ & = a_1 a_2 + \epsilon (a_1 a_{02} + a_2 a_{01}) \end{aligned} \quad (16)$$

선 벡터는 이원수와 같은 유추로부터 다음과 같은 이원 벡터로 조합할 수 있다.

$$\underline{\mathcal{S}} = \underline{S} + \epsilon \underline{S}_0 \quad (17)$$

여기서 주의할 점은 단위 선벡터는 $|\underline{S}|=1$, 그리고 $\underline{S} \cdot \underline{S}_0=0$ (직교성: orthogonality) 또는 $LP+MQ+NR=0$ (이차항등: quadratic identity)의 조건을 갖으므로 플뤼커 좌표를 표기하는 데에 사용된 6개의 변수 중에서 단지 4개만이 서로 독립적(independent)이다. 선 벡터는 운동학에서 강체의 순간적 회전운동을 표시하는데 사용할 수 있다. 즉, 강체가 회전할 때에 갖는 각속도를 $\omega(\underline{S}: r \times \underline{S})$ 로 표현할 수 있다.

선 벡터를 다룸에 있어서 중요한 사실은 두 개의 선 벡터 $\underline{\mathcal{S}}_1$ 와 $\underline{\mathcal{S}}_2$ 를 합하면 일반적으로는 선 벡터가 아니라는 것이다. 즉,

$$\underline{\mathcal{S}} = \underline{\mathcal{S}}_1 + \underline{\mathcal{S}}_2 = \underline{S} + \epsilon \underline{S}_0 \quad (18)$$

라 하면, 여기서 $\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2$, 그리고 $\underline{S}_0 = \underline{S}_{01} + \underline{S}_{02}$ 이므로

$$\underline{S} \cdot \underline{S}_0 = (\underline{S}_1 + \underline{S}_2) \cdot (\underline{S}_{01} + \underline{S}_{02}) \neq 0 \quad (19)$$

이다. 즉, 선벡터의 성질인 직교성을 만족하지 못하므로 두 개의 선벡터들의 합은 선벡터가 아님을 알 수 있다. 이러한 두 개의 선벡터들의 합 $\underline{\mathcal{S}}$ 는 나선(screw)이라 부른다. \underline{S}_0 의 구성은 \underline{S}_0 의 \underline{S} 성분을 살펴보면 되는데, \underline{S}_0 의 \underline{S} 방향 성분과 이에 수직인 방향 성분을 나누면,

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{S}} &= (\underline{S}; \underline{S}_0) \\ &= (\underline{S}; \underline{S}_0 - h\underline{S}) + (0; h\underline{S}) \end{aligned} \quad (20)$$

이 되고, 여기서 $h = \underline{S} \cdot \underline{S}_0 / \underline{S} \cdot \underline{S}$ 이며 이 나선의 피치(pitch)라 부른다. 만약, $h=0$ 이면, 나선은 선벡터가 되므로, 선벡터는 나선의 한 특수한 경우로 볼 수도 있겠다. 여기서 두개의 단위 선벡터사이의 대수를 잠시 살펴보면, 먼저 두 선벡터의 스칼라적은

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{S}}_1 \cdot \underline{\mathcal{S}}_2 &= (\underline{S}_1 + \epsilon \underline{S}_{01}) \cdot (\underline{S}_2 + \epsilon \underline{S}_{02}) \\ &= \underline{S}_1 \cdot \underline{S}_2 + \epsilon (\underline{S}_1 \cdot \underline{S}_{02} + \epsilon \underline{S}_2 \cdot \underline{S}_{01}) \end{aligned} \quad (21)$$

이며, 크로스적은

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{S}}_1 \times \underline{\mathcal{S}}_2 &= \underline{S}_1 \times \underline{S}_2 \\ &+ \epsilon (\underline{S}_1 \times \underline{S}_{02} + \epsilon \underline{S}_2 \times \underline{S}_{01}) \end{aligned} \quad (22)$$

이고, 내적은

$$\underline{S}_1 * \underline{S}_2 = \underline{S}_1 \cdot \underline{S}_2 + \underline{S}_{01} \cdot \underline{S}_{02} \quad (23)$$

으로 정의된다. 나선이론에서는 이에 더 하여 선벡터의 역곱(reciprocal product)을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \underline{S}_1 \cdot \underline{S}_2 &= (\underline{S}_1 + \epsilon \underline{S}_{01}) \cdot (\underline{S}_2 + \epsilon \underline{S}_{02}) \\ &= \underline{S}_1 \cdot \underline{S}_{02} + \underline{S}_2 \cdot \underline{S}_{01} \end{aligned} \quad (24)$$

만약, $\underline{S}_1 \cdot \underline{S}_2 = 0$ 이면, \underline{S}_1 과 \underline{S}_2 는 서로 역관계(reciprocal)에 있다고 한다.

3. 로봇의 해석에서의 나선의 사용

3.1 운동학적 해석에의 이용

앞절에서, 선 벡터는 강체의 순간 회전속도를 표현하는데 사용할 수 있다고 하였는데, 이 절에서는 나선의 운동학에서의 사용을 살펴보기 위하여 그림 4에서 보이는 바와 같이 연속적으로 연결된 세 개의 강체들의 순간 상대 운동을 가상한다. 강체 2가 강체 1에 대하여 각속도 $\omega \underline{S}_1$ 로 회전 운동함과 동시에, 강체 3은 강체 2에 대하여 각속도 $\omega \underline{S}_2$ 로 회전 운동하는 경우를 생각해 본다. 이 때 강체 3이 강체 1에 대하여 갖는 순간 상대 속도의 $\omega \underline{S}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \omega \underline{S} &= \omega(S; S_0) \\ &= (\omega_1 \underline{S}_1 + \omega_2 \underline{S}_2; \omega_1 (\underline{r}_1 \times \underline{S}_1) \\ &\quad + \omega_2 (\underline{r}_2 \times \underline{S}_2)) \end{aligned} \quad (25)$$

$\underline{S} \cdot \underline{S}_0 \neq 0$ 이므로 $\omega \underline{S}$ 가 순수한 회전 운동을 표시하지 않음을 알 수 있다. 이 식을 다시 쓰면

$$\begin{aligned} \omega \underline{S} &= (\underline{\omega}; \underline{r} \times \underline{\omega} + \underline{v}) \\ &= \omega(\underline{S}; \underline{S}_0 - h \underline{S}) + \omega(0; h \underline{S}) \end{aligned} \quad (26)$$

이 된다. 위 식의 우변 첫째항은 순수한 회전 속도만을, 둘째항은 순수한 선속도(translational velocity)만을 나타낸다. 이렇게 해서 강체 3의 강체 1에 대한 상대 운동은 그림 4에서 보이는 바와 같이, 강체 3이 피치 h 를 갖는 가상적인 나선을 따라 순간적으로 운동하는 현상으로 해석할 수 있다. 이 때 $\omega \underline{S}$ 를 크기 ω 를 갖는 트위스트(a twist of amplitude ω)라 부르는데 이 글에서는 간단히 $\omega = (\underline{\omega}; \underline{v})$ 로 표기하기로 한다. 따라서 운동학적 측면에서 본 나선은 단위 트위스트라 할 수 있겠다. 순수한 회전 속도만을 갖는 경우, 즉 $(\underline{\omega}; \underline{r} \times \underline{\omega})$ 는 $h=0$ 인 경우이며, 순수한 선속도만을 갖는 경우, 즉 $(0; \underline{v})$ 는 $h=\infty$ 인 경우라 할 수 있다. 주목할 점은 위에서 트위스트는 플뤼커의 방사 좌표로 표현되어 있으며, 이를 플뤼커의 축좌표로 표현하기 위하여, 식 (11)를 이용할 수 있는데, 즉,

$$\underline{\hat{\Omega}} = \mathcal{A} \underline{\hat{\omega}} \quad (27)$$

또는

$$\left[\begin{array}{c} \underline{\Omega} \\ \underline{V} \end{array} \right] = \mathcal{A} \left[\begin{array}{c} \underline{\omega} \\ \underline{v} \end{array} \right] \quad (28)$$

이 된다. 플뤼커의 원래의 표기에 의하면, 트위스트는 위 식과 같이 플뤼커의 축좌표로 표현한다.

6 자유도를 갖는 기구학적 직렬형 로봇(serial robot)의 손이 고정좌표계에 대하여 갖는 순간적 운동은 트위스트로 표시할 수 있는데(그림 5 참조), 로봇의 손의 이러한 순간 속도는 6개의 관절이 고정좌표계에 대하여 갖는 속도의 합으로 표시된다.

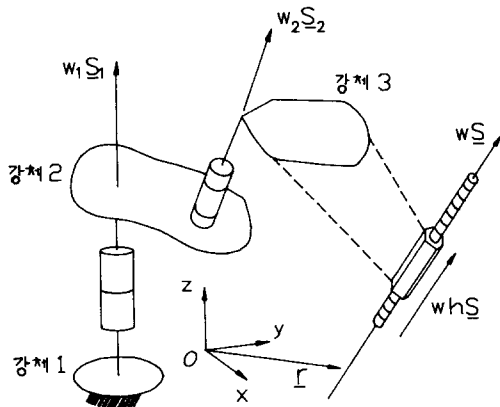


그림 4 강체의 상대운동

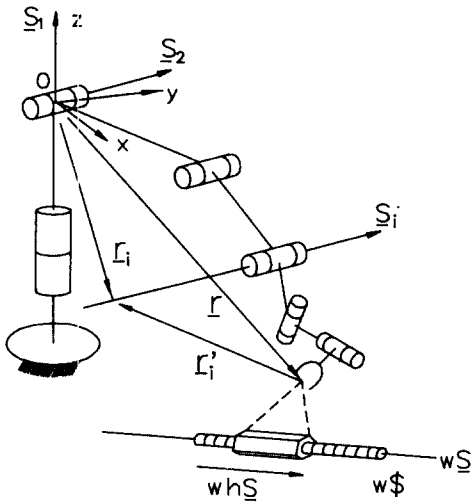


그림 5 트위스트에 의한 로봇손의 속도 표현

$$\hat{\omega} = \sum_{i=1}^6 \omega_i \underline{S}_i \quad (29)$$

이 식을 직렬형 로봇의 나선 방정식이라 부른다. 이 식을 행렬식의 꼴로 표현하면,

$$\begin{bmatrix} \underline{\omega} \\ \underline{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_1 & \dots & \underline{S}_6 \\ \underline{r}_1 \times \underline{S}_1 & \dots & \underline{r}_6 \times \underline{S}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{r} \times \underline{\omega} \end{bmatrix} \quad (30)$$

와 같다. $\underline{r}'_i = \underline{r}_i - \underline{r}$ 로 대치하면(그림 5 참조),

$$\begin{bmatrix} \underline{\omega} \\ \underline{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_1 & \dots & \underline{S}_6 \\ \underline{r}'_1 \times \underline{S}_1 & \dots & \underline{r}'_6 \times \underline{S}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_6 \end{bmatrix} \quad (31)$$

로 된다. 보다 간략히 표현하면,

$$\hat{\omega} = J\omega \quad (32)$$

여기서,

$$J = \begin{bmatrix} \underline{S}_1 & \dots & \underline{S}_6 \\ \underline{r}'_1 \times \underline{S}_1 & \dots & \underline{r}'_6 \times \underline{S}_6 \end{bmatrix} \quad (33)$$

이다. 이처럼 Jacobian의 열벡터(column vector)들은 각각 나선 좌표들(screw coordi-

nates)로 구성된다. 주지하는 바와 같이 Jacobian의 역행렬 J^{-1} 이 존재하지 않는 경우에는 ω 값을 구할 수 없으므로 로봇의 운동 제어(kinematic control)가 불가능해진다. 수학적으로는 이 경우 Jacobian의 열벡터들이 일차종속(linearly dependent)인 때라 할 수 있다. 나선이 기하적인 요소라는 점과, Jacobian의 열벡터들은 로봇의 각 관절의 회전축을 축으로 하는 선벡터들이라는 사실은, 해석하고자 하는 로봇의 Jacobian이 기하적으로 손쉽게 구하여 질 수 있음을 암시한다고 할 수도 있겠는데, 이러한 점을 이용한 연구 결과는 주목할 만한 가치가 있다. Hunt⁽¹²⁾는 Cincinnati Milacron의 T^3 로봇과 PUMA 로봇과 같이 로봇의 손목점(wrist point)에서 세 개의 관절의 축들이 교차하는 경우를 예를 들어 설명하는데, 원점(Cincinnati Milacron T^3 로봇을 나타내는 그림 6에서 점 O_4)을 이러한 로봇의 손목점에 두었다고 했을 경우에, 각 관절의 축을 축으로하는 선벡터들은 매우 용이하게 구할 수 있다. 이렇게 구한 선벡터들이 이 로봇의 Jacobian을 형성한다. 속도 Jacobian은 직교좌표상에서 주어진 로봇의 손의 속도를 각 구동 액츄에이터의 속도로의 변환이므로,

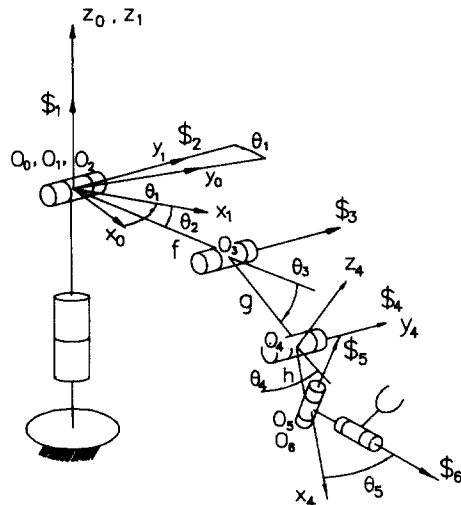


그림 6 T^3 형 직렬 로봇의 표현

이를 구하는 과정에서 어느 지점을 기준으로 하였는지는 문제가 되지 않는다.

한 좌표계 $(0_i, x_i, y_i, z_i)$ 에서 표현된 나선을 다른좌표계 $(0_j, x_j, y_j, z_j)$ 에 대하여 표현하는 나선 좌표변환⁽¹³⁾에 대하여 살펴보기로 한다. i 번째 좌표계에서 표현된 0_j 의 좌표를 (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) 라 하고, $[S_{(ij)}]$ 를 j 번째 좌표계에서의 나선을 i 번째의 좌표계의 나선좌표로 변환하는 나선변환이라 하면, 이는 다음의 6×6 행렬식으로 표현될 수 있다.

$$[S_{(ij)}] = \begin{bmatrix} [R_{ji}]_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 3} \\ [A_{ji}]_{3 \times 3} & [R_{ji}]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_1 &= [-s_{234}, \quad 0, \quad c_{234}; \quad 0, \quad (fc_2 + gc_{23}), \quad 0]^T \\ \underline{S}_2 &= [0, \quad 1, \quad 0; \quad (fs_{34} + gs_4), \quad 0, \quad -(fc_{34} + gc_4)]^T \\ \underline{S}_3 &= [0, \quad 1, \quad 0; \quad gs_4, \quad 0, \quad -gc_4]^T \\ \underline{S}_4 &= [0, \quad 1, \quad 0; \quad 0, \quad 0, \quad 0]^T \\ \underline{S}_5 &= [0, \quad 0, \quad 1; \quad 0, \quad -h, \quad 0]^T \\ \underline{S}_6 &= [c_5, \quad s_5, \quad 0; \quad 0, \quad 0, \quad hs_5]^T \end{aligned} \quad (37)$$

여기서, $s_{ijk} = \sin(\theta_i + \theta_j + \theta_k)$, $c_{ijk} = \cos(\theta_i + \theta_j + \theta_k)$ 를 나타내며 표기법은 참고문헌 (12)에 따랐다. 따라서 Jacobian은

$$J_{(4)} = [\underline{S}_1^T \quad \underline{S}_2^T \quad \underline{S}_3^T \quad \underline{S}_4^T \quad \underline{S}_5^T \quad \underline{S}_6^T] \quad (38)$$

이 되므로, 원하는 로봇의 손의 트위스트를 발생시키기 위한 각 관절 액츄에이터의 각속도는

$$\underline{\omega} = J_{(4)}^{-1} [S_{(04)}] \hat{\omega} \quad (39)$$

로 구할 수 있다. $\det[J_{(4)}] = -fgs_3c_5(fc_2 + gc_{23} + hc_{234})$ 임을 쉽게 알 수 있으므로 $J_{(4)}^{-1}$ 의 해석적(analytic)인 유도가 용이해진다.

3.2 역학적 해석에의 사용

여러 개의 강체가 각각 한 개의 회전 조인트들에 의하여 연결되어 운동하는 다 자유도 시스템의 경우, 주목하는 한 강체의 운동은 트위스트로 표현될 수 있었는데, 이와 같은 유추로부터, 강체에 작용하는 힘의 작용도 또한 단위

여기서

$$[A_{ji}] = \begin{bmatrix} 0 & -z_{ij} & y_{ij} \\ -z_{ij} & 0 & -x_{ij} \\ -y_{ij} & -x_{ij} & 0 \end{bmatrix} [R_{ji}] \quad (35)$$

$$[S_{(ij)}] = \begin{bmatrix} [R_{ji}]^T & [0] \\ [A_{ji}]^T & [R_{ji}]^T \end{bmatrix} \quad (36)$$

이다. $[R_{ji}]$ 는 회전 행렬식(rotation matrix)이다.

그림 6¹⁾에서 원점 0_4 에 대한 각 관절의 나선좌표값들은 다음과 같이 관찰에 의하여 구할 수 있다.

선벡터에 의하여 표현될 수 있다. 어떤 한 강체에 단위 벡터 \underline{S} 의 방향으로 힘 f 가 작용한다고 하면, 원점 0 에 대한 이 힘의 모멘트는 $f(\underline{r} \times \underline{S})$, 즉, 강체에 작용한 힘은 선벡터에 스칼라량 f 를 곱한 꼴로 표현할 수 있다. 이제 강체에 두 개의 힘, $f_1(\underline{r}_1 \times \underline{S}_1)$ 와 $f_2(\underline{r}_2 \times \underline{S}_2)$ 가 임의의 방향에서 작용한다고 하면, 그 합력은

$$\begin{aligned} f(\underline{S}; \underline{S}_0) &= (f_1 \underline{S}_1 + f_2 \underline{S}_2; (\underline{r}_1 \times \underline{f}_1) \\ &\quad + (\underline{r}_2 \times \underline{f}_2)) \\ &= f(\underline{S}; \underline{S}_0 - h\underline{S}) + f(0; h\underline{S}) \end{aligned} \quad (40)$$

으로 되는데 여기서 $h = \underline{S} \cdot \underline{S}_0 / \underline{S} \cdot \underline{S}$ 이다. 위 식 우변의 첫째 항은 순수한 힘만을, 그리고 둘째 항은 힘의 작용선에 평행한 커플(couple)을 나타낸다. 이 때 $f(\underline{S}; \underline{S}_0)$ 는 피치, h 를 갖는 나선에 대한 크기 f 를 갖는 웬치(a wrench with amplitude f)라 하며 이 글에서는 간단히 $\underline{\hat{f}} = (f; \underline{c})$ 로 표기하기로 한다. 웬치는 플뤼커 원

래의 표기대로 플뤼커의 방사좌표로 표현한다.

트위스트와 웬치는 모두 이와 같이 나선에 스칼라량을 곱한 꼴로 표현할 수 있음을 알 수 있다. 만일 트위스트 $\hat{\Omega}$ 로 운동하는 강체에 웬치 \hat{f} 가 가해졌다고 하면, 이에 의하여 발생된 순간 가상일(the instantaneous virtual work) δW 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta W &= (\underline{f} \cdot \underline{V} + \underline{\Omega} \cdot \underline{c}) \delta t \\ &= f \Omega (\underline{S}_1 \cdot \underline{S}_{02} + \underline{S}_2 \cdot \underline{S}_{01}) \delta t \end{aligned} \quad (41)$$

이제 이러한 배경으로부터, 로봇의 정역학 문제를 취급할 수 있는데, 우선 외부로부터 로봇에 가해지는 가장 일반적인 형태의 힘을 생각해 보기 위하여, 로봇이 나무에 나사못을 박는 작업을 가상해 볼 수 있다. 이를 역으로 생각하면 로봇에 웬치가 가해진다고 할 수 있을 것이다. 따라서 외부로부터 가해진 웬치 \hat{f} 에 의하여 i 번째의 조인트에 발생된 가상일 δW_i 는

$$\delta W_i = (\underline{f} \cdot \underline{V}_i + \underline{\Omega}_i \cdot \underline{c}) \delta t \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \Omega_i \underline{S}_i^T \begin{bmatrix} 0_3 & I_3 \\ I_3 & 0_3 \end{bmatrix} \hat{f} \delta t \\ &= \tau_i \Omega_i \delta t \end{aligned} \quad (43)$$

이다. 따라서

$$\tau_i = \underline{S}_i^T \Delta \hat{f} \quad (44)$$

이며, $\underline{\tau} = [\tau_1 \cdots \tau_6]^T$ 라 하면

$$\underline{\tau} = J^T \Delta \hat{f} \quad (45)$$

이 된다. 이 식은 로봇에 가해진 외력과 이를 극복하기 위한 각 관절의 역추에이터에서의 힘(토크)과의 관계를 설명한다. 나선 이론에 의한 이와 같은 유도는 매우 간편하며, 식이 내포하는 기하학적 의미를 명확히 설명하고 있음을 알 수 있다. 위 식을 참고 문헌 14에서 유도된 내용과 비교해 보면 이는 더욱 자명해진다.

4. 위치/힘의 동시제어 (Hybrid Position/Force Control)에서의 나선이론

앞 절에서, 임의의 강체에 웬치 \hat{f} 가 가해진 경우에 강체는 트위스트 $\hat{\Omega}$ 로 운동하며, 발생된 일률은 이 트위스트와 가해진 웬치의 역곱(reciprocal product)임을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta W_i / \delta t &= \underline{f} \cdot \underline{V}_i + \underline{\Omega}_i \cdot \underline{c} \\ &= \hat{f} \cdot \hat{\Omega}_i \\ &= f \Omega (\underline{S}_1 \cdot \underline{S}_2) \end{aligned} \quad (46)$$

로 표현할 수 있다. 이제 위의 식으로부터, $\underline{S}_1 \cdot \underline{S}_2 = 0$ 인 경우를 생각해 보면, 이 때에는 강체에 웬치를 가하여도 일이 생성되지 않게 된다. 이러한 경우에 두 나선 \underline{S}_1 와 \underline{S}_2 은 역관계(reciprocal)에 있다고 한다. 이에 대한 수학적 배경을 좀더 상세히 설명해 보면 다음과 같다: 먼저 한 개의 강체에 가해진 임의의 트위스트 $\hat{\Omega}$ 를 생각해 본다. 이 트위스트를 6개의 변수(parameter)를 갖는 한 개의 열벡터로 보고, $A = [\hat{\Omega}_1, \hat{\Omega}_2, \cdots, \hat{\Omega}_6]$ 를 트위스트 공간(the twist space)을 생성하는 기저(basis)라 하고, 이와 마찬가지로, $B = [\hat{f}_1, \hat{f}_2, \cdots, \hat{f}_6]$ 를 웬치공간(the wrench space)을 생성하는 기저라 하면, 임의의 트위스트와 웬치는 각각 이들의 일차결합(linear combination)에 의하여 표현할 수 있는데, 만약 어떤 트위스트 $\hat{\Omega}_f$ 와 웬치 \hat{f}_c 가 역관계에 있다고 하면, 즉,

$$\hat{\Omega}_f = \alpha_1 \hat{\Omega}_1 + \alpha_2 \hat{\Omega}_2 + \cdots + \alpha_m \hat{\Omega}_m \quad (47)$$

$$\hat{f}_c = \beta_1 \hat{f}_1 + \beta_2 \hat{f}_2 + \cdots + \beta_n \hat{f}_n \quad (48)$$

로 표현할 때

$$\hat{\Omega}_f^T \hat{f}_c = 0 \quad (49)$$

이 될 것이며, $m+n=6$ 이고, 이는 식 (15)의 꼴이다. 이 때 $\hat{\Omega}_f$ 를 자유 트위스트, 그리고 \hat{f}_c 를 구속 웬치라 부르는데, 자유 트위스트는 강체의 구속된 운동을 정량적으로 표현하는 한편, 구속 웬치는 정지 상태의 강체에 가하여져도 운동을 발생시킬 수 없는 힘과 커플을 표현

한다.

직렬형 로봇의 특이자세(singular configurations)를 연구하는데에 역나선을 사용하였던 Waldron⁽¹⁵⁾은, 이러한 나선들 사이의 역관계를 이용할 수 있는 한 가지 예를 들었는데, 만약 로봇의 손에 킁치가 가해지고 있는 상태에서 로봇을 정지상태로 유지시켜야 할 경우에는 이를 위하여 각 관절 액츄에이터에 반력 토크(또는 정지 토크 : braking torques)를 부가시켜야만 하는데, 이 때 가해지고 있는 킁치가 역나선(reciprocal screw)과 일치한 경우라면 반력 토크는 사라지게 된다. 그러므로 만약 로봇이 동력드릴을 사용하는 드릴작업을 수행할 경우에 있어서, 드릴을 역나선의 축과 일치하도록 하면, 로봇의 각 관절 액츄에이터에 부가시켜야 할 반력 토크는 없게 된다.

나선이론을 이용할 수 있는 다른 예로서는 로봇의 위치/힘 동시제어 문제를 들 수 있다. Duffy는 근래에 발표한 그의 논설⁽¹⁶⁾에서 많은 연구자들이 로봇의 위치/힘 동시제어 문제를 다룸에 있어서 심각한 이론상의 문제점이 있음을 지적하였다. 즉, 그 문제의 근본은 자유 트위스트와 구속 킁치는 각기 서로 다른 공간들(spaces)에 속하는 벡터이므로, 자유 트위스트와 구속 킁치는 서로 역관계(reciprocal)를 만족시키는 조건에서 로봇의 작업 명령이 결정되어야 하는데, 이미 발표된 연구 결과들은^(17,18) 자유 트위스트와 구속 킁치를 같은 공간(spaces)에 속하는 벡터로 보고 이들이 서로 직교적 여집합관계(orthogonal complement)에 있다고 해석함으로써, 트위스트와 킁치의 사용에 있어서의 단위의 부적합성과 사용하는 단위의 선택에 따른 의존성, 그리고 좌표의 원점을 어떻게 선택하느냐에 따라 결과가 다를 수 있다는 등의 중대한 문제점을 내포하고 있다고 지적하였다(보다 자세한 내용은 참고문헌 10, 11, 16을 참조). 특히 이러한 지적은 발표된 연구 결과에서⁽¹⁷⁾ 선속도와 회전속도의 이원적 조합(트위스트) 그리고 힘과 커플의 이원적 조합(킁치)을 표현하기 위하여 사용한 벡터

들이, 나선이론과 같은 체계적인 수학적 전개에 기초하지 못한 데에 그 원인이 있음을 밝히고 있다.

5. 맺음말

운동하는 임의 강체의 순간속도는 플뤼커의 축좌표에 의한 트위스트로 표현될 수 있고 마찬가지로 직렬형 로봇의 손의 운동 또한 한 개의 트위스트로써 순간속도를 표현할 수 있었으며, Jacobian이 나선좌표로 구성되어 있음을 알았다. 한편, 강체에 작용하는 힘은 플뤼커의 방사좌표에 의한 킁치로 표현될 수 있으며, 역관계에 있는 두 나선에 의하여 표현된 트위스트와 킁치가 로봇의 역학적 해석에 어떻게 이용되는 가를 예를 들어 설명하였다. 이처럼 나선이론은 다 자유도를 갖는 로봇의 운동 및 역학적 해석에 이용될 수 있는 효과적인 수학적 도구라 할 수 있다. 나선은 하나의 기하적 요소이며, 복잡한 강체의 운동을 표현함에 있어서 간편함을 제공한다. 이미 한 세기 전쯤에 소개된 나선이론이 근래에 와서 이와 같이 로봇의 운동해석에 활용되고 있음은 이러한 때문이라 할 수 있겠다. 나선이론⁽¹⁹⁾은 이 글에서 설명이 생략된 로봇의 동역학적 해석에도 활용되며, 또한 병렬형 구조를 갖는 로봇⁽²⁰⁾(parallel robots)의 해석 등에서도 찾아 볼 수 있다.

참 고 문 헌

- (1) Plücker, L. 1865, "On a New Geometry of Space," Phil. Trans. Royal Society of London, Vol. 155, pp. 725~791.
- (2) Ball, R.S., 1900, A Treatise on the Theory of Screws, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- (3) Clifford, W.K., 1873, "Preliminary Sketch of Biquaternions," Mathematical Papers, 1882, Reprinted Chelsea Publishing Co. New York, 1968, pp. 181~200.
- (4) Study, E., 1901, "Geometrie der Dynamen," Verlag Teubner, Leipzig, Germany.

- (5) Dimentberg, F.M., 1965, The Screw Calculus and Its Applications to Mechanics, Moscow, English Trans. AD 680993, 1969.
- (6) Yang, A.T., Freudenstein, F., 1964, "Application of Dual-Number Quaternion Algebra to the Analysis of Spatial Mechanisms," ASME J. Applied Mechanics, Vol. 31, pp.300~308.
- (7) Yuan, M.S.C., Freudenstein, F., 1971, "Kinematic Analysis of Spatial Mechanisms by Means of Screw Coordinates. Part 1-Screw Coordinates," ASME J. Engr. for Industry, February, pp.61~66.
- (8) Yuan, M.S.C., Freudenstein, F., Woo, L.S., 1971, "Kinematic Analysis of Spatial Mechanisms by Means of Screw Coordinates. Part 2-Analysis of Spatial Mechanisms," ASME J. Engr. for Industry, February, pp. 67~73.
- (9) Hunt, K.H., 1978, Kinematic Geometry of Mechanisms, Clarendon Press, Oxford.
- (10) Lipkin, H., Duffy, J., "The Elliptic Polarity of Screws," ASME Paper No-84-DET-107, (ASME J. Mech. Trans. and Auto. in Design,).
- (11) Lipkin, H., Duffy, J., "Hybrid Twist and Wrench Control for a Robotic Manipulator," ASME Paper No. 86-DET-74, (ASME J. Mech. Trans. and Auto. in Design).
- (12) Hunt, K.H., 1987, "Robot Kinematics-A Compact Analytic Inverse Solution for Velocities," ASME J. Mech. Trans. and Auto. in Design, Vol.109, March, pp.42~49.
- (13) Sugimoto, K., Matsumoto, Y., 1984, "Kinematic Analysis of Manipulator by Means of the Projective Transformation of Screw Coordinates," Robotics Research, Brady, M. and Paul, R., eds., MIT Press, Cambridge, MA, pp.695~705.
- (14) Paul, R.P 1981, Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control, MIT Press, Cambridge, MA.
- (15) Wang, S., Waldron, K.J., 1987, "A Study of the Singular Configurations of Serial Manipulators," ASME J. Mech. Trans. and Auto. in Design, Vol.109, pp.14~20.
- (16) Duffy, J., 1990, "The Fallacy of Modern Hybrid Control Theory that is Based on 'Orthogonal Complements' of Twist and Wrench Spaces," J. Robotic Systems, Vol.7(2), pp.139~144.
- (17) Mason, M.T., 1981, "Compliance and Force Control for Computer Controlled Manipulators," IEEE Trans. on Sys. Man. and Cyber., Vol.SMC-11, No.6, pp.418~432.
- (18) Raibert, R.H., Craig J.J., 1981, "Hybrid Position/Force Control of Manipulators," ASME J. Dynamic Sys. Meas. and Cont., Vol.105, pp.126~133.
- (19) Pennock, G.R., Yang, A.T., 1985, "Dynamic Analysis of Multi-Rigid-Body Open-Chain Systems," ASME J. Mech. Trans. and Auto. in Design, Vol.105, pp.28~34.
- (20) Mohamed, M.G., Duffy, J. 1985, "A Direct Determination to the Instantaneous Kinematics of Fully Parallel Robot Manipulators," ASME J. Mech. Trans. and Auto. in Design, Vol.107, pp.226~229.
- Brand, L., 1947, Vector and Tensor Analysis, Wiley, New York.
 - Duffy, J., 1980, Analysis of Mechanisms and Robot Manipulators, Arnold, London, Wiley, New York.
 - Bottema, O. and Roth, B., 1979, Theoretical Kinematics, North-Holland Publishing Co. New York.
 - Hunt, K.H., 1984, "Mechanisms-Research Directions in Kinematics and Geometry," ASME. J. Mech. Trans. and Auto. in Design, Vol.106, pp.262~263.

