

Chaos의 세계 (Ⅲ)

서 용 권
동아대학교 기계공학과 교수



● 1950년생
● 유체역학(경계층박리, 후류모델)을 전공하였으며, 열 및 유체의 비선형 동적거동과 Chaos에 관심이 있다.

7. Fractal 개념과 Fractal 차원

제6장에서 우리는 chaos의 판정에 사용되는 Lyapunov지수에 대하여 살펴 보았다. Lyapunov지수가 해의 유동의 초기조건에의 민감성 또는 그 확산정도를 나타내는 반면에, phase plane상에서의 strange attractor의 fractal한 정도를 나타내는 양으로 fractal 차원이라는 것이 있다. 이 장에서는 fractal 개념을 이해하고, fractal 차원의 의미 및 그 계산방법을 알아본다.

7.1 Fractal 개념

많은 chaos 운동은 poincare map을 통해 살펴 보면 큰 구조 속의 작은 구조, 그 속의 더 작고 비슷한 구조, ……와 같이 끝없는 구조들의 행렬을 포함하고 있다. 이러한 chaos 운동에 있어서의 poincare map과 같은 구조의 특성을 fractal이라 칭한다. fractal이라는 용어는 Mandelbrot가 영국의 들쭉날쭉한 해안을 묘사하기 위하여 사용한 것으로서, 그는 해안의 총 길이는 측정하는 자(scale)의 길이의 역(power)에 비례함을 발견하였다^(41,42). Mandelbrot는 fractal에 대한 기본적인면서 광범위한 연구를 하였으며, 그의 저서(참고 문헌 43)는 다양한 fractal 구조를 담고 있다. 그림 30은,

*第31卷 第1號에 이어서 계속

간단한 예로서, fractal 특성을 갖고 있는 koch curve의 제작 과정을 보이고 있다. 첫 삼각형의 한 변의 길이를 1이라 하면, koch curve의 외각선의 길이는 $1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \dots$ 와 같이 되어 ∞ 로 접근한다. 그러나 그 면적은 $1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 + 48 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 + \dots = \frac{8}{5}$ 와 같이 유한한 값에 수렴한다. 즉 무한히 긴 선이 유한한 지역을 감싸는 결과가 되며, 이는 마치 지도상에 나타난 섬의 면적이 유한한 반면 그 해안선의 길이는 무한하게(점근적 의미에서) 되는 것과 같다.

Cantor set은 koch curve와 상대적인 성격을 띠고 있다. 그림 31은 cantor set의 제작 과정을 보여주고 있다. 길이 1인 직선이 있을 때, 그것을 3등분하고 중간에 있는 선분을 없애버린다. 나머지 2개의 선분을 동일한 방법으로 3등분한 후 중간의 선분을 또 없애버린다. 이와 같은 과정을 되풀이할 때, 남아있는 선분의 총 길이는 0에 접근한다. cantor set은 strange attractor의 구조를 대변하는 set로서 strange attractor를 이해하는 전초 구조로 많이 다루어 지고 있다⁽⁴⁾.

7.2 Fractal 차원

(1) 용량 차원(capacity dimension)

점들의 집합(set of points)의 차원을 측정하

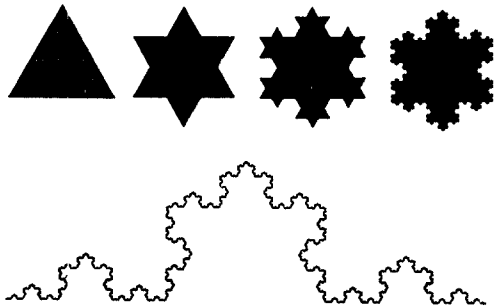


그림 30 Koch curve의 제작과정

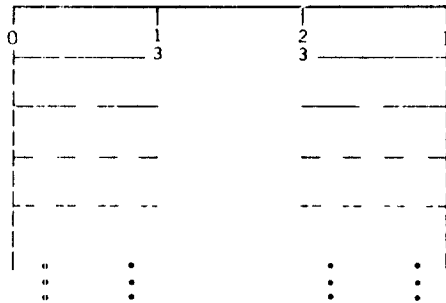


그림 31 Cantor set의 제작 과정

는 방법에는 여러 가지가 있다. 그 중에서도 매우 직관적이면서 기본적인 의미를 가진 양으로 용량차원(capacity dimension)이라는 것이 있다. 만약 N_0 개의 점들이 3차원 공간에서 1개의 有限한 길이를 가진 線상에 놓여 있을 때, 한 번의 길이가 ϵ 인 정육면체를 연결 사용하여 이 점들이 모두 그 속에 들도록 한다고 가정하자(그림 32). 이 경우 ϵ 를 작게 할수록 이 점들을 모두 포용할 수 있는 정육면체의 최소한의 갯수 $N(N < N_0)$ 은 $1/\epsilon$ 에 비례하여 증가할 것이다. 즉,

$$N(\epsilon) \approx \frac{1}{\epsilon} \quad (24)$$

의 관계식이 성립한다. 마찬가지로, 점들의 집합이 공간상에서 面을 이룰 때는(그림 32),

$$N(\epsilon) \approx \frac{1}{\epsilon^2} \quad (25)$$

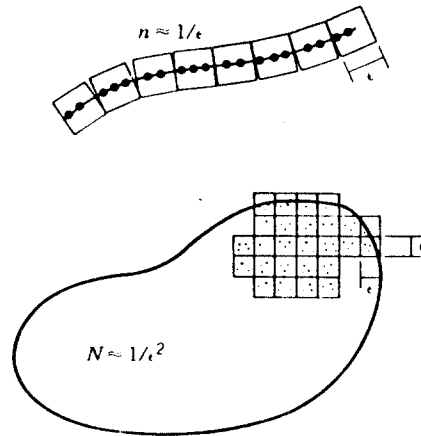


그림 32 용량차원의 개념 설명도

이 된다. 이와 같이 생각할 때 우리가 지금까지 보아온 attractor들은 정수가 아닌 d 에 대하여

$$N(\epsilon) \approx \frac{1}{\epsilon^d} \quad (26)$$

의 성격을 지닐 것이라는 것을 직관할 수 있다. 여기서 ϵ 을 0으로 접근시킬 때의 점근적 d 를 용량차원(d_c)라 한다. 즉 d_c 는

$$d_c = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)} \quad (27)$$

와 같이 구할 수 있다. 이때, d_c 가 정수가 아니면 그 집합을 fractal set라 할 수 있다.

예를 들어, Koch curve에서, n 째 제작 단계의 선분의 수는

$$N_n = 4^n \quad (28)$$

이고 그 길이는

$$\epsilon_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (29)$$

이 된다. $\epsilon \rightarrow 0$ 는 $n \rightarrow \infty$ 를 의미하므로 식 (27)에 의해 Koch curve의 용량차원은

$$d_c = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26185\dots$$

임을 알 수 있다. 동일한 방법으로 하면

Cantor set의 경우

$$d_c = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.63092 \dots$$

을 얻는다.

그러나 우리가 실제 접하는 set로부터 용량 차원을 구하기란 그리 쉬운 일이 아니며, 더구나 용량차원으로서 phase space상의 궤적이 주어진 정육면체를 지나는 빈도를 알 수가 없다. 따라서 그 대안으로 몇 가지가 제안되었는데, 點的 차원(pointwise dimension), 상관 차원(correlation dimension), 정보차원(information dimension) 등이 그것이다.

(2) 點的 차원(pointwise dimension)

총 N_0 개의 점의 집합인 3차원 attractor상의 어떤 한 점 x_i 를 중심으로 반경 r 의 球를 그렸을 때, 이 球내에 들어 있는 점의 수를 $N(r)$ 이라 하면 확률

$$P(r) = \frac{N(r)}{N_0} \quad (30)$$

은, 1차원 attractor에서는 충분히 작은 r 에 대하여 $P(r) \approx r$, 2차원 attractor에서는 $P(r) \approx r^2$, 일반적으로는 $P(r) \approx r^d$ 일 것이다. 즉 d 는

$$d = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log P(r; x_i)}{\log r} \quad (31)$$

와 같이 구할 수 있다. 그러나 실제 문제에 있어서 P 는 x_i 에 따라서 변하므로 點的 차원 d_p 는 d 의 평균값으로 하여 다음과 같이 계산한다.

$$d_p = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M d_p(x_i) \quad (32)$$

또는 P 자체를 평균하여 구하기도 한다.

$$d_p = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \left\{ \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P(r; x_i) \right\}}{\log r} \quad (33)$$

여기서 시료의 개수 M 은 N_0 의 $\frac{1}{10}$ 정도로 한다.

(3) 상관 차원(correlation dimension)

N_0 개의 점들로 구성된 주어진 set의 두 점 x_i, x_j 의 거리 $S_{ij} = |x_i - x_j|$ 가 r 보다 작은 짝 (i, j) 의 총 개수 $N(r)$ 을 N_0^2 으로 나눈 것을 $C(r)$ 이라 표시하고 상관 차원이라 칭한다:

$$C(r) = \frac{N(r)}{N_0^2} \quad (34)$$

그러면 충분히 작은 r 에 대하여 $C(r) \approx r^d$ (1차원이면 $d=1$, 2차원이면 $d=2$)로 되어 상관 차원 d_c 는 다음과 같이 구한다.

$$d_c = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C(r)}{\log r} \quad (35)$$

이 방법은 실험을 위주로 하는 연구자들에 의해 성공적으로 사용되었으며^(35,44), Grassberger & Proccacia⁽⁴⁵⁾는 이 차원에 대한 광범위한 연구를 한 바 있다.

(4) 정보 차원(information dimension)

우선 용량 차원에서 처럼 N_0 개의 점의 set를 모두 포함시킬 수 있는 한 변의 길이 ϵ 인 M 개의 정육면체로 이루어진 구조를 설정한다. i 번째의 정육면체 내에 있는 모든 점의 수를 N_i 라 할 때 그 안에서 점을 찾을 확률은

$$P_i = \frac{N_i}{N_0} \quad (i=1, 2, \dots, M) \quad (36)$$

이다. 여기서 information entropy $I(\epsilon)$ 를

$$I(\epsilon) = - \sum_{i=1}^M P_i \log P_i \quad (37)$$

와 같이 정의한다. 충분히 작은 ϵ 에 대하여 $I(\epsilon)$ 는

$$I(\epsilon) \approx d_i \log(1/\epsilon) \quad (38)$$

이 되어

$$d_i = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^M P_i \log P_i}{\log \epsilon} \quad (39)$$

으로부터 정보 차원 d_i 를 계산한다. 이에 대한 더 세부적인 사항은 Farmer 등⁽⁴⁶⁾, Grassberger & Proccacia⁽⁴⁵⁾, Shaw⁽³³⁾ 등의 논문에서 찾을 수 있다.

위에 설명한 여러 가지 차원들의 관계에 대해서는 Grassberger & Proccacia⁽⁴⁵⁾가 연구한 바 있다.

8. 유동문제에 있어서의 난류의 시작 (Onset of Turbulence)

공학 문제뿐만 아니라, 우리가 일상생활에서 경험하는 많은 유체의 유동 현상에 있어서, 난류는 예외적인 현상이 아니라 보편적인 현상이다⁽⁴⁷⁾. 따라서 난류에 대한 연구는 유동 문제를 다루는 연구자들에게는 실용적인 면에서 매우 중요한 과제임에 틀림없다. 그러나 그럼에도 불구하고, 난류에 있어서의 근본적인 몇 가지 의문은 아직도 제기되며, 풀리지 않은 수수께끼로 남아 있다. 그 중에 하나가 “난류는 어떻게 시작되느냐?” 하는 난류의 시작(onset of turbulence)에 관한 의문이다.

지금까지의 난류에 관한 연구는 두 가지의 형태로 분류할 수 있다. 하나는, 난류가 이미 발생하여 그야말로 강한 난류, 충분히 발달된 상태를 대상으로 하는, 말하자면 통계학적 또는 시간에 대한 평균적 방법이다. 따라서 이것은 수동적인 입장에서 난류의 현상을 관찰하며 예측하는 성격을 갖고 있다.

또 다른 하나는, 난류의 조정(control of turbulence)을 염두에 둔 것으로서 어디서(또는 언제), 어떻게 난류가 발생하느냐 하는 적극적 성격을 지닌 형태이다. 이것은 난류를 조정하여 공학적으로 이용하기 위해서는 필요 불가결한 기초연구의 한 분야이다. 이 두 번째 연구 방법 중에서, 난류의 시작 위치, 장소적 의미뿐만 아니라 매개변수(레이놀즈 수, 레일리 수, 등의 의미도 갖고 있음)에 관한 것이 소위 안정성(stability) 문제이다. 나머지, 층류에서 난류로 넘어가는 발전 과정에 관한 것이 본장에서 취급하고자 하는 부분이다.

앞에서 제기한 의문은 아직 풀리지 않은 것이 사실이나, Lorenz⁽³⁾의 커다란 발견을 기점으로 하여 1970년대부터 이 의문을 풀기 위한

끊임없는 노력이 이루어 졌고, 또한 그에 따라 답을 찾을 가능성도 농후해 졌다. 이를 위한 유일한 도구가 strange attractor에 입각한 chaos이론이다. 즉 time series나 phase plane 상의 궤적을 보면 질서를 찾지 못할 것같은 거동을 다른 시각(Poincare map 등을 의미함)에서 보면 그것이 정교하고도 복잡한 질서를 품고 있다는 사실에서부터 그 가능성은 크게 부각된 것이다.

Lorenz⁽³⁾의 발견 이후, 난류의 시작에 있어서의 의문을 풀기 위한 이론 연구자들의 가장 주된 관심사는, Lorenz 식 (3) 또는 logistic map 식 (9)와 같은 낮은 차원의 모델들이 과연 실제의 물리적 현상으로서의 난류에 숨어 있는 기본 특성들을 대변할 수 있겠느냐 하는데 있다. Lanford^(48,49)는 이러한 시각에서 난류의 정체와 관련한 chaos의 이론적 배경과 문제점 및 전망을 다양하게 논하였다. 이러한 관점에서의 난류의 시작에 관한 이론을 일목요연하게 분류할 수는 없지만, 대책적인 입장에서 Eckmann⁽⁵⁰⁾은 4 가지로 분류하여 상세히 설명하였고, Lichtenberg & Lieberman⁽⁴⁾과 Miles⁽⁵¹⁾는 이를 토대로 부연적으로 논하였다. 그러나 이 모델들은 진위(true or false)적 입장에서 평가해서는 안 된다는 것이다. 예를 들면, Gollub & Benson⁽⁵²⁾은 Bénard convection에 관한 실험에서, aspect ratio, Prandtl 수 등을 변화시킨 결과, Landau 모델을 제외한 모든 모델들이 모두 확인되었다.

층류에서 난류로 변화하는 과정을 Eckmann⁽⁵⁰⁾은 “scenario”라고 명명하였는데, 그 4가지 모델은 다음과 같다.

8.1 Landau 모델

Landau의 이론⁽⁵³⁾에 의하면, 난류는 불안정 현상의 단계적 발달 과정(hierarchy of instability)으로 이루어 진다는 것이다. 즉 매개변수(레이놀즈 수, 데일리 수 등)가 충분히 낮을 때는 정상 상태이나, 어떠한 한계점을 지나면 이 상태는 불안정하여 새로운 안정상태인 w_1

주기의 단주기 운동을 한다. 변수를 더욱 증가시키면 w_1 주기운동은 불안정해 지고, w_2 주기의 mode가 새로 영입하여, w_1, w_2 의 공존 주기운동을 한다. 이와 같이 하여 필경에는 w_1, w_2, \dots 의 무한히 많은 주기들(rational하지 않음, 즉 incommensurate함)이 복합적으로 참여하여 혼란스런 운동을 하게 된다는 것이다.

그러나 여러 가지 실험결과에 의하면, Landau의 이론은 그 초기과정 부분을 제외하고는

실제 현상과 거리가 멀다는 것이 입증되었고, 현재로서는, 1950~1970년대에 걸쳐 비선형 안정성 이론에 기저가 되었다는 역사적 관심거리로만 남아 있는 것 같다⁽⁵¹⁾.

8.2 Ruelle-Takens의 모델

Ruelle & Takens⁽⁵⁴⁾는 Landau의 모델 중 초기 과정(즉 w_2 까지의 과정)을 그대로 받아들이고, w_3 주기 이후의 운동이 이에 가세하는

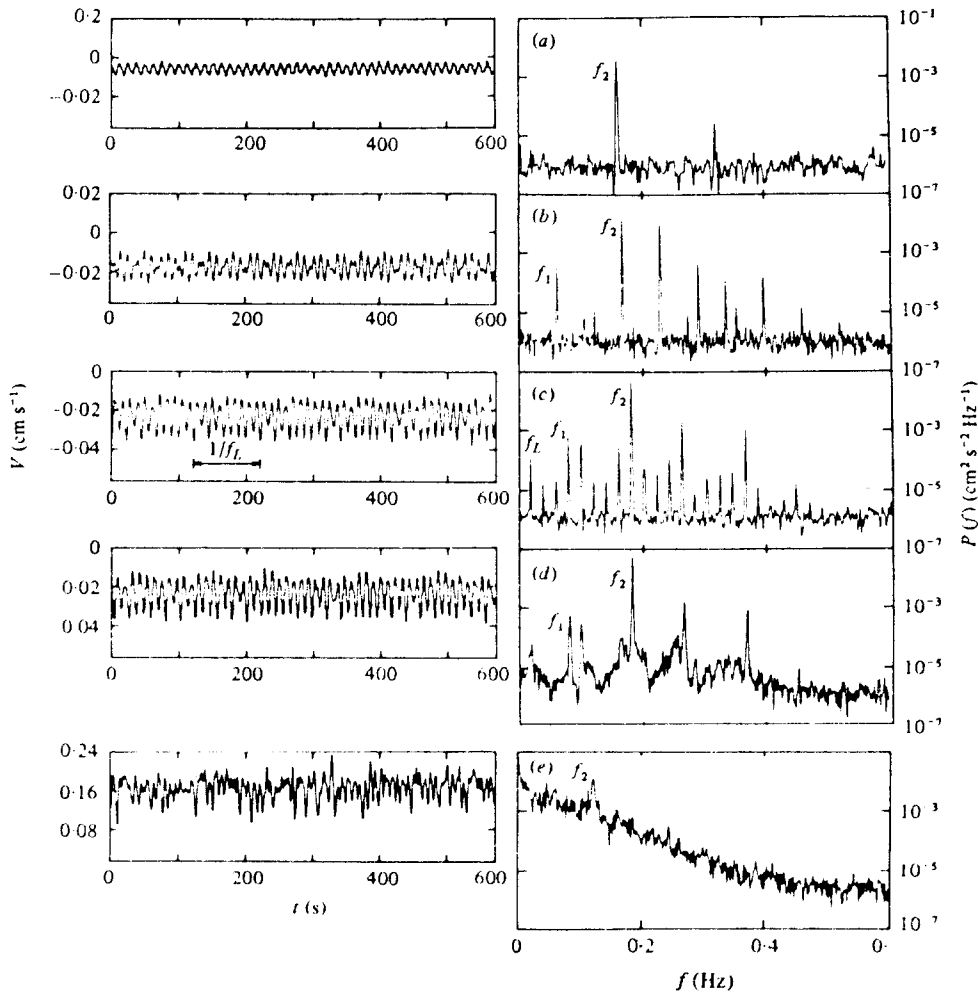


그림 33 Bénard convection 에서의 속도의 time series(좌측)와 power spectrum(우측), (a) $R/R_c=31$ (b) $R/R_c=35$ (c) $R/R_c=45.2$ (d) $R/R_c=46.8$ (e) $R/R_c=65.4$

것은 비선형 효과로 인하여 불가능하다는 추측을 하였다(w_3 주기의 불안정성은 그 후 Newhouse 등⁽⁵⁵⁾에 의해 입증되었다). 그림 33은 Gollub & Benson⁽⁵²⁾의 Bénard convection에 관한 실험 결과로서 이 이론을 뒷받침하고 있다. 이 spectrum에서 보면 $R/R_c=31$ 에서는 f_2 주기(그 정수배의 주기는 subharmonic으로 체계적의 형태와 관계됨)만 나타나고 $R/R_c=35$ 에서는 f_1 이 가세한 형태(정수 m, n 에 대한 $mf_1 + nf_2$ 의 주기도 subharmonic 임)로 된다. $R/R_c=45.2$ 에서는 소위 phase locking($f_L = f_2/9 = f_1/4$)이 일어나 f_L 및 그 subharmonic이 추가된 상태이다. $R/R_c=46.8$ 에서는 noise 성격을 벗어난 넓은 spectrum이 보이는데 chaos(또는 weakly turbulent flow)가 발생한 상태이다. $R/R_c=65.4$ 에서는 f_1, f_2 의 날카로움이 사라지고 완전히 평탄해진 spectrum이 된 바, 강한 chaos 운동을 시사하고 있다. McLaughlin & Orszag의 수치해석⁽⁵⁶⁾결과 역시 이 이론을 뒷받침하고 있다. 그러나 추가할 것은 앞의 f_3 주기의 불안정성 이론과는 달리, 조건에 따라서는 f_3 도 공존할 수 있다는 것이 Gollub & Benson⁽⁵²⁾의 동일한 실험에서 확인되었다(그림 34).

림 34).

8.3 Period-Doubling 모델

이것은 Feigenbaum⁽¹⁵⁾이 제안한 것으로서, 그 발달 과정은 $f_1, \frac{1}{2}f_1, \frac{1}{4}f_1$, 과 같이 주기가 2배씩 증가하는 모델이다. Gollub & Benson⁽⁵²⁾과 Gollub 등⁽⁵⁷⁾의 실험 결과에서 그 타당성이 확인된 바 있다(그림 35). 놀라운 사실은 Feigenbaum의 모델이 예측하기를, 충분한 bifurcation 후에 각 main harmonic의 subharmonic의 진폭은 약 8.2dB만큼씩 낮아져야 한다는 것인데, 그림 35에서 보는 것처럼 실험 결과 이것이 입증되었다. 이 모델은 앞에서 본 바와 같이 logistic map, Henon map, Duffing 방정식 등과 같은 많은 낮은 차원의 방정식에서 확인된 사항이다.

8.4 Intermittent Scenario

Manneville & Pomeau⁽⁵⁸⁾의 제안으로서, 단주기 운동 후에 단주기 운동과 chaos 운동이 공존하고 그 후에 전적인 chaos만의 운동이 나타난다는 것이다. 역시 Gollub & Benson⁽⁵²⁾의 실험 결과는 이를 뒷받침한다(그림 36).

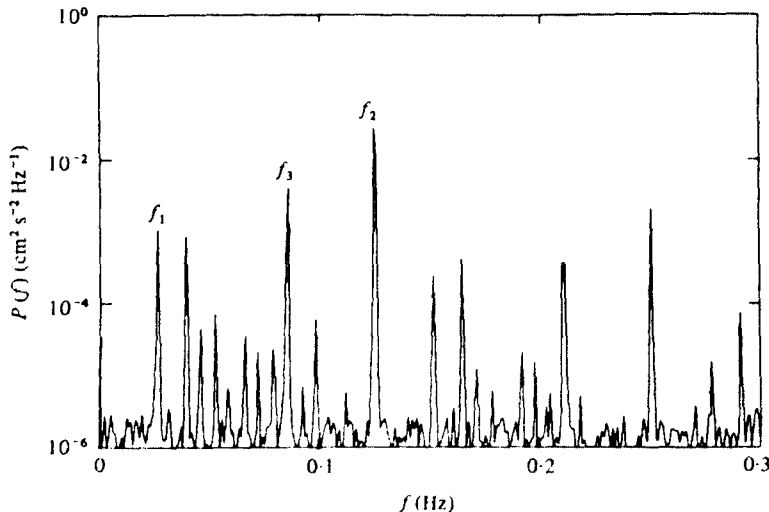


그림 34 $R/R_c=42.3$ 에서의 spectrum (Bénard convection). 세 가지 주기의 공존현상을 보이고 있다.

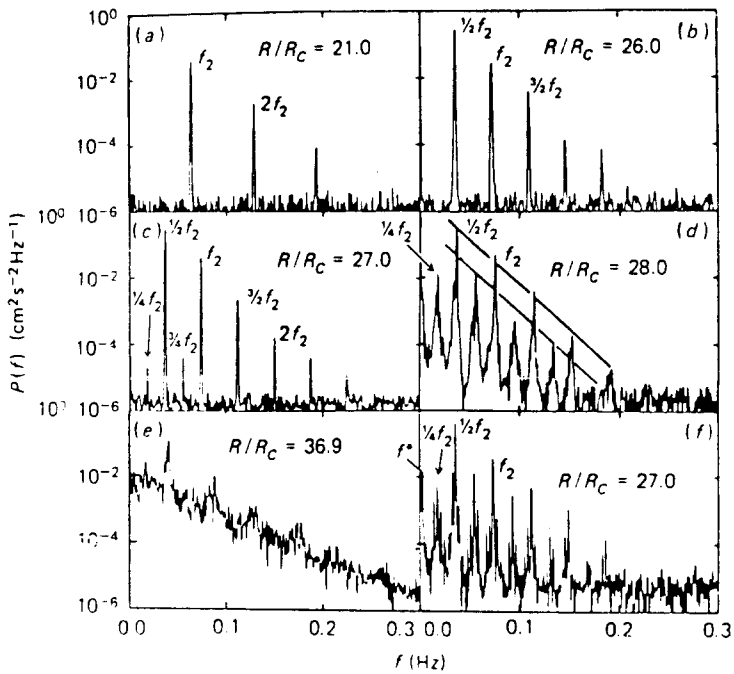


그림 35 Bénard convection 에서의 period-doubling 현상

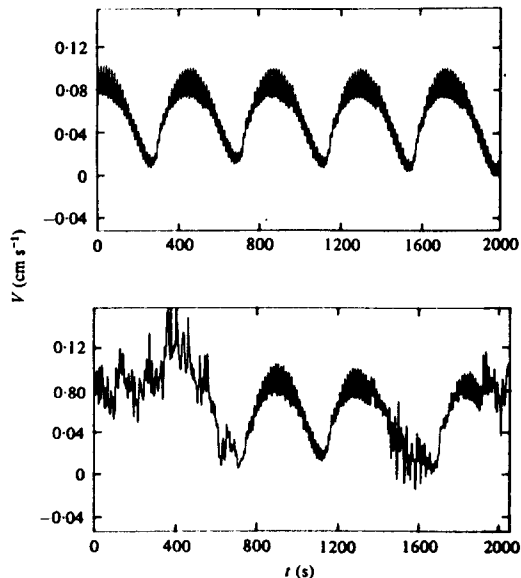


그림 36 Bénard convection 에서의 intermittent scenario. (a) $R/R_c=100.4$ (b) $R/R_c=102.8$

9. 문제점과 과제 및 전망

Strange attractor 이론이 난류의 시작에 관한 의문을 풀어 줄 것이라는 낙관적인 견해가 지배적이긴 하지만, 그에 못지 않게 부수적으로 해결해야 할 문제점이나 처리해야 할 과제들이 많다는 사실도 간과할 수 없다.

첫째, 실용적인 측면에서 이 이론은 선형 안정성 이론 등이 제시하는 천이점이나, 난류 문제에 있어서 중요한 의미를 지닌 난류점도의 모델 등을 제시하지 못하고 있다⁽⁴⁹⁾.

둘째, 이 이론은 현재까지 집적된 난류에 관한 실험 결과를 설명하지 못하고, 오히려 이 이론을 연구하기 위한 또 다른 기본 실험을 요구하고 있다⁽⁴⁹⁾. 즉, 아직까지는 직접적인 실용가치가 없다고 보겠다.

셋째, 지금까지의 연구는 대부분 시간에 대한 무질서 운동을 대상으로 하였으나, 실제 문

제에 있어서는 시간적 무질서 이전에 공간적으로 복잡한 유동구조가 先行하는 경우가 종종 있기 때문에, 이에 관한 복합적 연구도 뒤따라야 할 것이다^(48,49).

넷째, Gollub & Benson⁽⁵²⁾의 연구 결과에서 보는 바와 같이, 난류의 시작은 경계조건이나 경계의 형상(Bénard convection에서는 aspect ratio), 그리고 다른 매개변수(Prandtl 수 등)에 따라 다르므로 이에 대한 구체적인 연구가 수행되어야 할 것이다. 예를 들면 Bénard convection 실험에 있어서 Libchaber & Maurer⁽⁵⁹⁾의 직사각형 cell과 Ahlers & Behringer⁽⁶⁰⁾의 원형 cell의 실험 결과는 서로 다른 모델(난류의 시작 모델)을 보이고 있다.

다섯째, 지금까지의 실험은 대부분 Bénard convection이나 Taylor-Couette 유동에 관한 것인데, 그 이유는 이 두 가지 형태의 유동은 그 천이 구역이 비교적 길기 때문에 다른 형태의 유동에 비하면 실험 조건의 설정이나 실험 환경의 조정에 있어서 그렇게 큰 어려움이 없기 때문이다. 그러나 실용적인 측면에서 보면, 천이 구역이 짧은 관내의 유동이나 고립 물체 주위의 유동이 더욱 중요한 의미를 갖고 있다. 따라서 chaos의 工學化를 위해서는, 이러한 실험 장치의 정교화, 실험 기술의 고도화 등이 실현되어야 할 것이다.

여섯째, strange attractor 이론으로 유동에 관한 올바른 예측을 하기 위해서는 많은 종류의 비선형 미분 방정식을 해석하여 그 動的 특성을 분류해 놓아야 한다⁽⁶¹⁾. 그리하여 실험에 의한 관측 결과와 비교하여 실제의 문제를 더 한층 쉽게 그리고 빨리 해석할 수 있기 때문이다.

이러한 문제점과 과제들을 안고 있는 chaos 이론은, 그러나, 현재 사회과학과 자연과학의 많은 분야에 있어서 연구 수단 또는 연구 대상으로서의 폭발적인 인기를 누리고 있다. 열·유체역학, 동력학, 구조역학, 화학(화학 분야에 있어서의 chaos개념은 Prigogine(1978년 Nobel상 수상자)과 Stengers의 저서⁽⁶²⁾에 잘

記述되어 있음), 플라즈마 물리학, 전자공학, 전기공학 등 우리들에게 친숙한 학문은 말할 것 없고, 의학, 생태학, 생물학, 인구학, 경제학, 회계학 등에서도 종래의 것과는 완전히 다른 시각에서 현상을 분석하고 예측하려는 노력을 하고 있다. 그리고 최근에는 computer graphics에서도 간단한 수식 모델로 fractal set를 형성시켜, 각종 나무, 꽃, 파도, 구름 등 자연의 산물들을 성공적으로 묘사하고 있다^(63~66).

Gleick⁽¹⁾는 chaos 이론에 의한 각 분야에 있어서의 새로운 현상을 Newton-Einstein 이후의 또 다른 과학 혁명이라 부르고 있다. 그리고, 지금까지의 서양 학문이 줄곧 세부화의 길을 달려 왔으나 chaos에 의해 그 과정이 逆으로 될 것이라는 인식이 일고 있다⁽¹⁾. 이는 chaos의 질서의 법칙이 보편타당성(universality)의 일면을 갖고 있다는데 기인되며, 종합화를 지향하는 東洋의 제반 학문과 그 성격상 일맥상통한 점이 있어, chaos學이 東洋人の 기호 학문이 되리라 믿는다.

참고문헌

- (1) Gleick, J., 1987, "Chaos", Viking.
- (2) Moon, F.C., 1987, "Chaotic Vibrations", Wiley-Interscience.
- (3) Lorenz, E.N., 1963, "Deterministic Non-Periodic Flow", J. Atmos. Sci., Vol. 20, pp. 130~141.
- (4) Lichtenberg, A.I. and Leiberman, M. A., 1983, "Regular and Stochastic Motion", Springer-Verlag.
- (5) Ott, E., 1981, "Strange Attractors and Chaotic Motions of Dynamical Systems", Rev. Mod. Phys., Vol. 53, No. 4, Pt 1, pp. 655~671.
- (6) Yorke, J.A. and Yorke, E.D., 1979, "Metastable Chaos: The Transition to Sustained Chaotic Behaviour in the Lorenz Model", J.

- Stat. Phys., Vol. 21, No. 3, pp. 263~277.
- (7) Kaplan, J. L. and Yorke, J. A., 1979, "Preturbulence : A Regime Observed in a Fluid Flow Model of Lorenz", *Comm. Math. Phys.*, Vol. 67, pp. 93~108.
- (8) Guckenheimer, J. and Holmes, P., 1983, "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag.
- (9) Rand, D., 1978, "The Topological Classification of Lorenz Attractors", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol. 83, pp. 451~460.
- (10) Mahaffey, R. A., 1976, *Phys. Fluids*, Vol. 19, pp. 1387~1391.
- (11) Dowell, E.H. and Pezeshki, C., 1986, "On the Understanding of Chaos in Duffings Eq. Including a Comparison with Experiment", *J. Appl. Mech.*, Vol. 53, pp. 5~9.
- (12) Moon, F.C., 1980, "Experiments on Chaotic Motions of a Forced Nonlinear Oscillator : Strange Attractors", *J. Appl. Mech.*, Vol. 47, pp. 638~644.
- (13) Pezeshki, C. and Dowell, E. H., 1987, "An Examination of Initial Condition Maps for the Sinusoidally Excited Buckled Beam Modeled by the Duffing Equation", *J. Sound and Vibrations*, Vol. 117, pp. 219~232.
- (14) May, R.M., 1976, "Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics", *Nature*, Vol. 261, pp.459~467.
- (15) Feigenbaum, M. J., 1978, "Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations", *J. Stat. Phys.*, Vol. 19, No. 1, pp. 25~52.
- (16) Feigenbaum, M. J., 1979, "The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations", *J. Stat. Phys.*, Vol. 21, No. 6, pp.669~706.
- (17) Feigenbaum, M. J., 1980, "Universal Behavior in Nonlinear Systems", *Los Alamos Sci.(Summer)*, pp. 4~27.
- (18) Derrida, B. and Pomeau, Y., 1980, "Feigenbaum's Ratios of Two-Dimensional Area Preserving Maps", *Phys. Letters*, Vol. 80 A, No. 4, pp. 217~219.
- (19) May, M. and Oster, G. F., 1980, "Period Doubling and the Onset of Turbulence ; An Analytical Estimate of the Feigenbaum Ratio", *Phys. Letters*, Vol. 78A, No. 1, pp. 1~3.
- (20) Grebogi, C., Ott, E. and Yorke, J.A., 1982, "Chaotic Attractors in Crisis", *Phys. Review Letters*, Vol. 48, No. 22, pp. 1507~1510.
- (21) Henon, M., 1976, "A Two-Dimensional Map with a Strange Attractor", *Commun. Math. Phys.*, Vol. 50, p. 69.
- (22) McLaughlin, J., 1979, "The Role of Dissipation in a Truncation of Henon's Map", *Phys. Letters*, Vol. 72A, No. 4,5, pp. 271~274.
- (23) Hitzl, L. and Zele, F., 1985, "An Exploration of the Henon Quadratic Map", *Physica* 14D, pp. 305~326.
- (24) Holmes, P.J., 1982, "The Dynamics of Repeated Impacts with a Sinusoidally vibrating Table", *J. Sound Vib.*, Vol. 84, pp. 173~189.
- (25) Tufillaro, N.B. and Albano, A.M., 1986, "Chaotic Dynamics of a Bouncing Ball", *Am. J. Phy.*, Vol. 54, pp. 939~944.
- (26) Zbigniew, J. K., Franaszek, M. and Pieranski, P., 1988, "Self-Reanimating Chaos in the Bouncing-Ball System", *Phys. Review A*, Vol. 37, No. 10, pp. 4106~4022.
- (27) Gwinn, E. G. and Westervelt, R. M., 1985, "Intermittent Chaos and Low-Frequency Noise in the Driven Damped Pendulum", *Phys. Rev. Letters*, Vol. 54, No. 15, pp. 1613~1616.

- (28) Levin, P.W. and Koch, B. P., 1981, "Chaotic Behavior of a Parametrically Excited Damped Pendulum", *Phys. Lett., A* 86, No. 2, pp. 71~74.
- (29) Mc Laughlin, J.B., 1981, "Period-Doubling Bifurcations and Chaotic Motion for a Parametrically Forced Pendulum", *J. Stat. Phys.*, Vol. 24, No. 2, pp. 375~388.
- (30) Miles, J., 1984, "Resonant Motion of spherical Pendulum", *Physica* 11 D, pp. 309~323.
- (31) Brandstater, A. and Swinney, H. L., 1987, "Strange Attractors in Weakly Turbulent Couette-Taylor Flow", *Phy. Rev.*, Vol. 35, No.5, pp. 2207~2220.
- (32) Greenside, H.S., Ahlers, G., Hohenberg, p.c. and Walden, R.W., 1982, *Physica*, 5D, p. 322.
- (33) Shaw, R., 1984, "The Dripping Faucet as a Model Chaotic System", Aerial Press, Santa Cruz, C.A.
- (34) Keolian, R., Turkevich, L.A., Putterman, S.J., Rudnick, J. and Rudnick, J.A., 1981, "Subharmonic Sequences in the Faraday Experiment : Departures from Period Doubling", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 47, No.16, pp. 1133~1511.
- (35) Ciliberto, S. and Gollub, J.P., 1985, "Chaotic Mode Competition in Parametrically Forced Surface Waves", *J. Fluid Mech.*, Vol. 158, pp. 381~398.
- (36) Holmes, P.J., 1986, "Chaotic Motions in a Weakly Nonlinear Model for Surface Waves", *J. Fluid Mech.*, Vol. 162, pp. 365~388.
- (37) Funakoshi, M. and Inoue, S., 1988, "Surface Waves due to Resonant Horizontal Oscillation", *J. Fluid Mech.*, Vol. 192, pp. 219~247.
- (38) Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L. and Vastano, J.A., 1985, "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series", *Physica*, 16D, pp. 285~317.
- (39) Eckmann, J.P. and Ruelle, D., 1985, *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 57, p. 617
- (40) Eckmann, J.P., Kamphorst, S.O., Ruelle, D. and Ciliberto, S., 1986, "Liapunov Exponents from Time Series", *Phys. Rev. A*, Vol. 34, No.6, pp.4971~4979.
- (41) Mandelbrot, B.B., 1967, "How Long is the Coast of Britain ? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension", *Science*, Vol. 156, pp.636~638.
- (42) Turcotte, D.L., 1988, "Fractals in Fluid Mechanics", *Aun. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 20, pp.5~16.
- (43) Mandelbrot, B.B., 1977, "Fractals, Form, Chance, and Dimension", W.H. Freeman, San Francisco, C.A.
- (44) Moon, F.C. and Li, G. X., 1985, "The Fractal Dimension of the Two-Well Potential Strange Attractors", *Physica*, 17D, pp. 99~108.
- (45) Grassberg, p. and Proccacia, I., 1983, "Characterization of Strange Attractors", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 50, pp. 346~349.
- (46) Farmer, J.D., Ott, E. and Yorke, J.A., 1983, "The Dimension of Chaotic Attractors", *Physica*, 7D, pp. 153~170.
- (47) Tennekes, H. and Lumley, J.L., 1983, "A First Course in Turbulence", The MIT Press.
- (48) Lanford, O.E., 1985, "Strange Attractors and Turbulence", in *Hydrodynam Instabilities and the Transition to Turbulence*, 2nd ed. by Swinney, H.L. and Gollub, J.P., Springer-Verlag, pp. 7~26.
- (49) Landford, O.E., 1982, "The Strange Attractor Theory of Turbulence", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 14, pp.347~364.

- (50) Eckmann, J.P., 1981, "Roads to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems", Rev. Mod. Phys., Vol. 53, No. 4, pp. 643~654.
- (51) Miles, J., 1984, "Strange Attractors in Fluid Dynamics", Advances in Applied Mech. Vol. 24, pp. 189~214.
- (52) Gollub, J.P. and Benson, S.V., 1980, "Many routes to Turbulent Convection", J. Fluid Mech., Vol. 100, pp. 449~470.
- (53) Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., 1959, "Fluid Mechanics", Section 27, Pergamon.
- (54) Ruelle, D. and Takens, F., 1971, "On the Nature of Turbulence", Commun. Math. Phys., Vol. 20, pp. 167~192 ; Vol. 23, pp. 343~344.
- (55) Newhouse, S., Ruelle, D. and Takens, F., 1978, "Occurrence of Strange Axiom A Attractors near Quasi-Periodic Flows on T^m , $m \geq 3$ ", commun. Math. Phys., Vol. 64, pp.35~40.
- (56) McLaughlin, J.B. and Orszag, S.A., 1982, "Transient from Periodic to Chaotic thermal Convection", J. Fluid Mech., Vol. 122, pp.123~142.
- (57) Gollub, J. P., Benson, S.V. and Steinman, J., 1980, "A Subharmonic Route to Turbulent Convection", Am. N.Y. Acad. Sci., Vol. 357, pp. 22~27.
- (58) Manneville, P. and Pomeau, Y., 1980, "Different Ways to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems", Physica, 1D, pp.219~226.
- (59) Libchaber, A. and Maurer, J., 1980, J. Phys., Vol. 41, C3, p.51.
- (60) Ahlers, G. and Behringer, R.P., 1978, Prog. Theor. Phys. Suppl., Vol. 64, p. 186.
- (61) Guckenheimer, J., 1986, "Strange Attractors in Fluids : Another View", Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 18, pp. 15~31.
- (62) Prigogine, I. and Stengers, I., 1984, "Order out of Chaos", Bantam Books.
- (63) Smith, A.R., 1984, "Plants, Fractals, and Formal Languages", Computer Graphics, Vol. 18, No.3, pp.1~10.
- (64) Demko, S., Hodges, L. and Nayer, B., 1985, "Construction of Fractal Objects with Iterated Function Systems", Computer Graphics, Vol. 19, No. 3, pp. 271~278.
- (65) Gardner, G.Y., 1985, "Visual Simulation of Clouds", Computer Graphics, Vol. 19, No. 3, pp.297~303.
- (66) Oppenheimer, P.E., 1986, "Real Time Design and Animation of Fractal Plants and Trees", Computer Graphics, Vol. 20, No. 4, pp.55~64.

