

# Chaos의 세계 (II)

## 서 용 권

동아대학교 기계공학과 교수



● 1950년생  
● 유체역학(경계층박리, 후류모델)을 전공하였으며, 열 및 유체의 비선형 동적거동과 Chaos에 관심이 있다.

### 3. Duffing-Holmes 방정식에서의 Chaos

다음에 생각할 식은 Duffing 방정식의 한 형태인

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} - ax + \beta x^3 = f_0 \cos wt \quad (5)$$

이다.  $x \rightarrow \sqrt{\alpha/\beta} x$ ,  $t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2a}} t$ ,  $\gamma \rightarrow \sqrt{\frac{\beta}{2a^2}} \gamma$ ,

$f_0 \rightarrow \sqrt{\frac{\beta}{4a^3}} f_0$ ,  $w = \sqrt{2a} w$ 로 치환하면 이 식은

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} - \frac{1}{2} x(1-x^2) = f_0 \cos wt \quad (6)$$

로 되며 소위 Duffing-Holmes 방정식으로, Holmes가 두개의 자석과 하나의 buckled beam으로 이루어진 진동계(그림 9)를 고안한 뒤 붙여진 이름이다. 이 식은 또한 plasma 진동을 지배하는 식으로도 알려져 있다<sup>(10)</sup>.

우선 식 (6)에서  $f_0=0$ 인 제차 방정식을 고려하자.  $\gamma > 0$ 인 경우 이 시스템은  $x=0$ (saddle),  $x=\pm 1$ (sink)의 세 평형점을 갖는다(그림 10의 phase plane 참조). 따라서 어떤 점을 초기조건으로 하든지 解의 흐름은  $x=1$  또는  $x=-1$ 로 귀착되는 모양을 보인다. 이제  $f_0 \neq 0$ 를 고려하자.  $f_0$ 가 작은 범위에서는 해는 주기적이어서 fourier spectrum은 한 개의 날카로운 기둥을 보이지만  $f_0$ 가 어떤 한계를 넘어 서면 해는 chaotic하여 평탄한 spectrum을 보인다(그림 11). 그림 12는 chaotic regime에서의

time series이며 그림 13은 phase plane상에서의 궤적을 그린 것이다.

Chaotic 한 진동계의 궤적은 소위 Poincare map을 통하여 그 성격을 규명하고 있다. 즉  $t_1, t_2, \dots$ 를 한 주기( $2\pi/w$ )만큼씩 커지는 값이라 하고  $x_n = x(t_n)$ ,  $y_n = \dot{x}(t_n)$ 으로 두면, 점의 집합  $(x_n, y_n)$ 은 phase plane 상에서

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n) \quad (7a)$$

$$y_{n+1} = g(x_n, y_n) \quad (7b)$$

의 2차원 map을 나타낸다. 그림 14는 그 결과이다. 우선 주목할 것은  $(x, \dot{x})$  궤적이 phase plane의 한정된 면적을 꼭 채우고 있지만(그림 13 참조; 따라서 2차원적임), Poincare map  $(x_n, y_n)$ 은 선과 면의 중간적 차원(fractal dimension, 즉 1과 2사이)을 취한다는 사실이

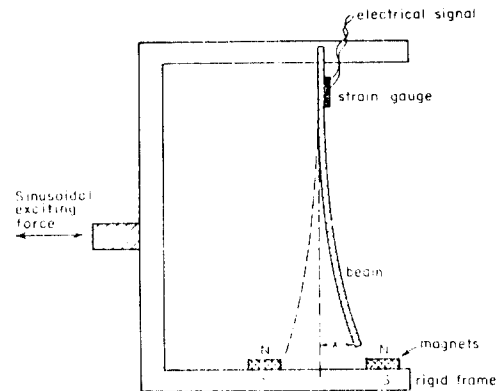


그림 9 두개의 자석과 하나의 buckled beam으로 이루어진 진동계

\* 第29卷 第5號에 이어서 계속

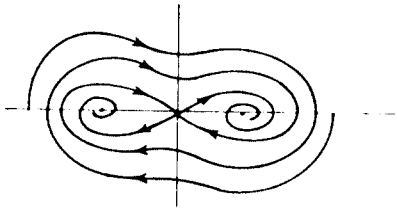


그림 10  $f_0=0, r>0$ 인 경우의 Duffing-Holmes 방정식의 궤적

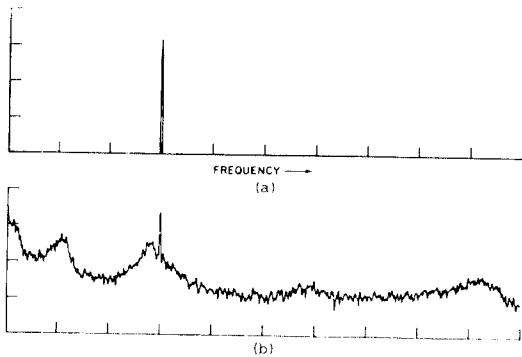


그림 11 Duffing-Holmes 방정식의 해  $x(t)$ 의 power spectrum (a)는 작은  $f_0$  (b)는 큰  $f_0$ 에 대한 것

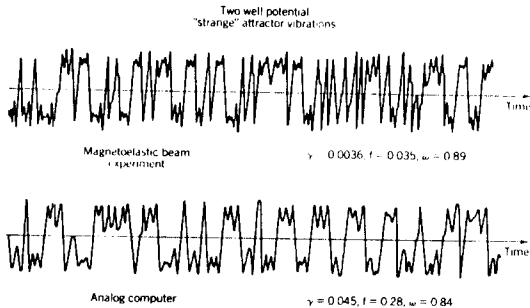


그림 12 Duffing-Holmes 방정식의 해  $x(t)$ 의 time series (상부) 수치해석 결과, (하부) 실험 결과

다. 이는 무수히 많은 곡선들 위에  $(x_n, y_n)$ 이 놓여 있지만 그 곡선들은 무한히 가깝기 때문이다. 유사한 양상을 앞의 Lorenz attractor에서도 보았다. Cornell 大學에서는 실험에서 poincare map을 바로 얻는 시스템을 개발하였

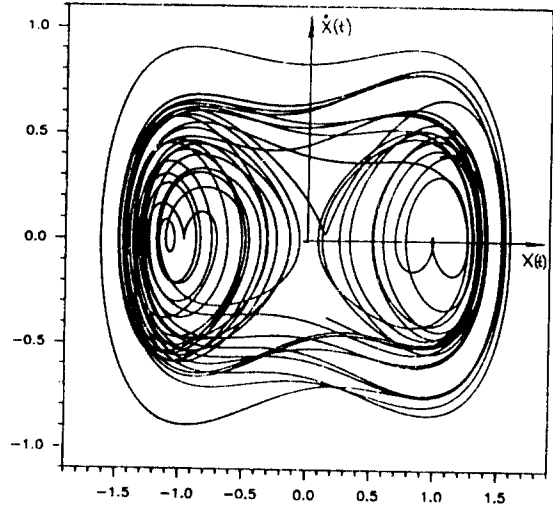


그림 13 Duffing-Holmes 방정식의 해  $x(t)$ 의 phase plane 상의 궤적

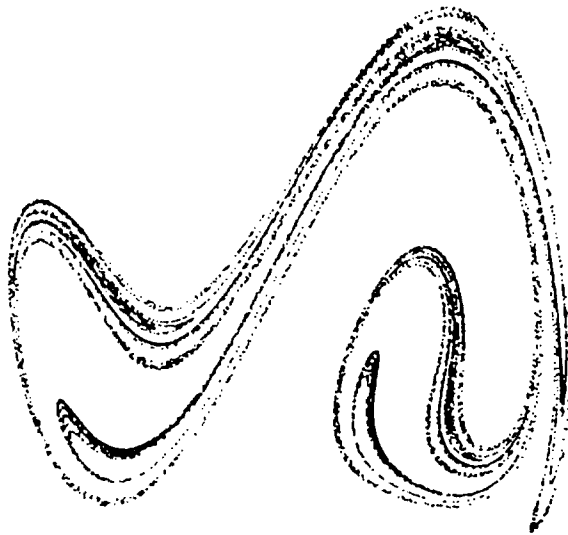


그림 14 Duffing-Holmes 방정식의 poincare map (15,000개의 점)

는데, 그림 15는 그 실험적 결과이다<sup>(2)</sup>. 한편 Dowell & Pzeshki<sup>(11)</sup>는 본 문제의 chaotic diagram을 구하였으며 Moon의 실험결과<sup>(12)</sup>와 비교하였다.

한편 Pezeshki & Dowell<sup>(13)</sup>은 Duffing-

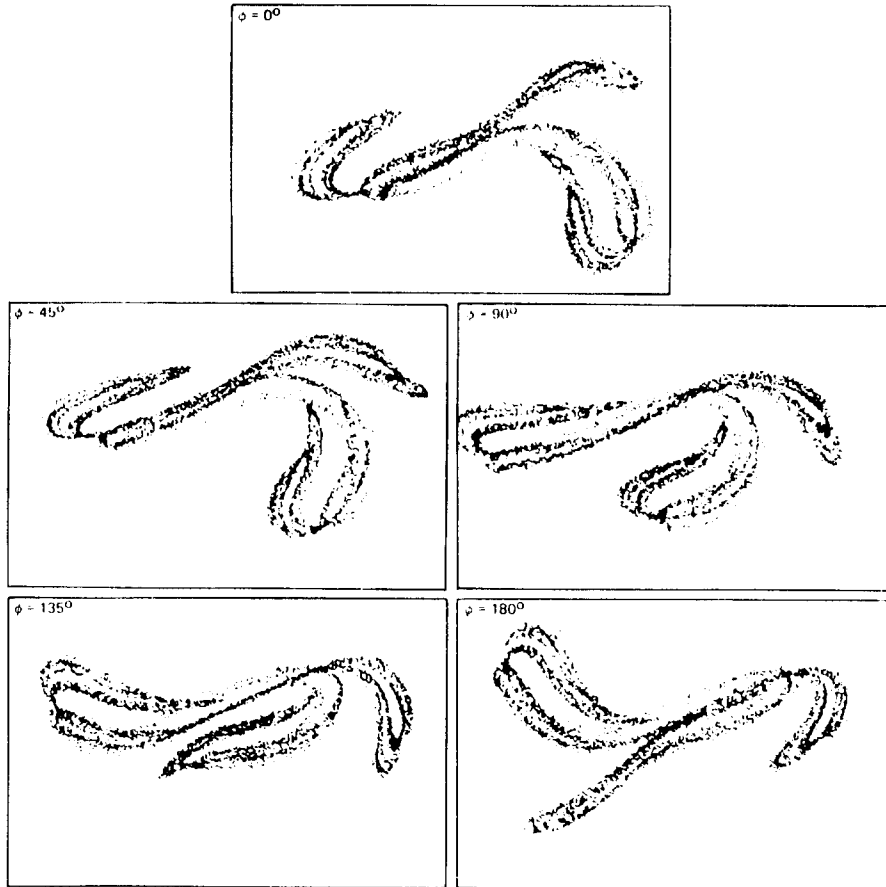


그림 15 Duffing-Holmes 방정식의 poincare map을 실험장치를 써서 plotting한 것. 각도는 외력과의 phase 차이를 나타냄.

Holmes계의 basin boundary를 구한 바, 계가 chaotic하지 않은데도 그 boundary는 fractal함을 보였다. 그들이 fractal 구조를 구한 과정은 다음과 같다. 우선 chaotic diagram ( $f_0-w$  평면상에 chaotic한 부분과 그렇지 않은 부분을 구분시켜 놓은 것)에 의해 chaotic하지 않은 조건 ( $f_0, w$ )을 결정한다. 초기조건 ( $x_0, \dot{x}_0$ )을 주고 충분한 시간이 지난 뒤에 해가  $x=-1$  주위를 돌면  $x-\dot{x}$  평면상에 그 초기 조건의 점을 찍고  $x=+1$  주위를 돌면 점을 찍지 않는다. 이와 같은 작업을 어떤 직사각형 내의 모든 점에 대하여 실시한다. 그림 16은

그 결과로서,  $f_0$ 가 커질수록 map은 더 질게 fractal한 성격을 가짐을 알 수 있다. 이것은  $x(t)$ 의 거동이 chaotic하지 않았다는 점을 고려한다면 흥미있는 결과이다.

#### 4. Logistic map 에서의 Chaos

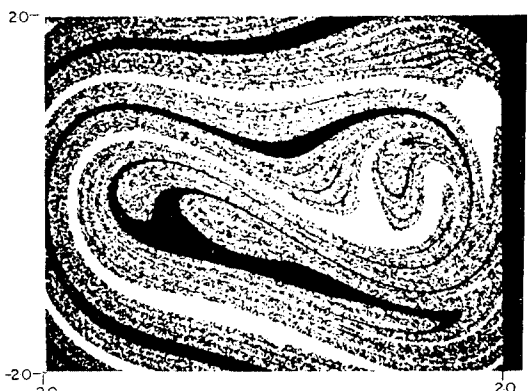
우리는 앞의 두 chaos 운동에서 poincare map을 사용한 결과, 주어진 문제가 1차원(식 4), 또는 2차원(식 7) map의 뚜렷한 성격을 내포하고 있음을 보았다. 따라서, 비선형계의 chaos 운동을 충분히 이해하기 위해서는, 단



(a)



(b)



(c)

그림 16 Basin boundary map (a)  $f_0=0.12$  (b)  $f_0=0.15$  (c)  $f_0=0.17$

순화된 map의 개념을 파악하고 그 성격들을 분석해 봄이 선결 과제라 하지 않을 수 없다. 여기서는, 가장 간단한 비선형 1차 map인 logistic map을 소개하기로 한다.

일반적으로 1차원 map의 식은

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{8}$$

으로 나타낼 수 있다. 여기서 함수  $f$ 는 여러 가지 형태를 취할 수 있다. 그중 가장 많이 취급되고 있는 것이  $f(x) = rx(1-x)$ 의 quadratic 형태인데, 이것을 대입하여 얻어진

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n) \tag{9}$$

의 관계식을 logistic map이라 부른다.

이 식의 동적 특성을 깊이 연구한 최초의 연구자들은 princeton 大學의 생태학자 May<sup>(14)</sup>, Los Alamos 연구소의 Feigenbaum<sup>(15-17)</sup>이

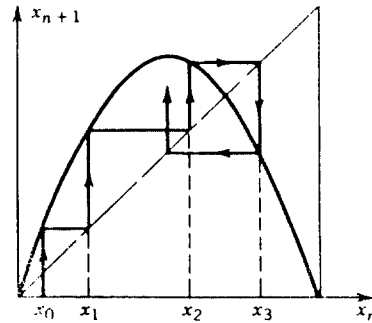


그림 17 초기치  $x_0$ 로 부터 식 (9)에 의해 set  $\{x_n\}$ 을 얻는 과정

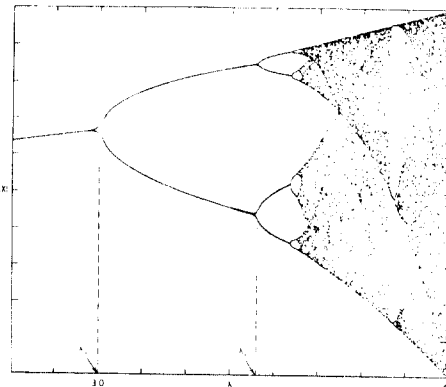


그림 18 Logistic map (9)의 bifurcation diagram

다. 식 (9)에 의해 임의의 초기치  $x_0$ 로 부터 set  $\{x_n\}$ 을 얻는 과정을 도식화하면 그림 17과 같다.  $r$ 의 값이 3이하일 때는, 포물선과 직선의 교점( $x \neq 0$ )에서의 포물선의 기울기가 절대치로 1보다 작기 때문에 그점에 귀착된다. 즉 초기치에 관계없이  $x_n$ 은  $n \rightarrow \infty$ 時 항상 한개의 값을 취한다. 그러나  $3.4494 > r > 3$ 에서는 이 점에 귀착되지 않고 이 점 가까이에 있는 두 점을 번갈아 가며 취한다. 이와 같은 과정을 되풀이 하여,  $r$ 의 증가와 더불어  $x_n$ 은  $2^m$  ( $m$ 은 양의 정수)개의 값을 교대로 취하는 이른바 period-doubling 과정을 거치게 된다. 이것을 일목요연하게 보여 준 것이 그림 18과 같은 bifurcation diagram이다.  $m \rightarrow \infty$ 되는 점은  $r = 3.56994$ 이다.

$m+1$ 주기가 되기 시작하는 시점의  $r$  값을  $r_m$ 이라 하면

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{r_m - r_{m-1}}{r_{m+1} - r_m} \right) = \delta = 0.46692 \quad (10)$$

이 값을 Feigenbaum<sup>(15)</sup>은 밝혔는데, 더욱 놀라운 사실은, 다른 많은 1차원 map에서도 이와 꼭 같은 값의  $\delta$ 를 가짐이 발견되었다. 즉 chaos의 보편타당성(universality)의 일면을 보여 준 셈이다. 이 값을 소위 Feigenbaum의 비(ratio)라 부르는데, renormalization group 이론등을 이용하여 이것을 계산한다<sup>(18,19)</sup>. Grebogi, Ott & Yorke<sup>(20)</sup>는 본 map에 있어서 chaotic region의 급팽창과 급축소의 원인과 그 양상에 대하여 연구한 바 있다.

한편 bifurcation diagram에서  $3.56994 < r < 4$ 의 구역을 보면 수많은 window가 있음을 알 수 있다. 가장 폭이 큰 window에서는 3-period부터 시작된다. 그리고 이 구조는 fractal 성격을 가진다. 즉 작은 규모의 모양이 더 큰 규모의 모양을 따르고 있다.

## 5. 기타 시스템에서의 Chaos

### 5.1 Henon Map

천문학자 Henon은 1차원적 성격인 logistic

map을 연장시켜 다음과 같은 2차원 map을 고안하여, 그 특성을 연구하였다<sup>(21)</sup>.

$$x_{n+1} = 1 + y_n - ax_n^2 \quad (11a)$$

$$y_{n+1} = bx_n \quad (11b)$$

$b=0$ 시 이 식은 logistic map이 된다. Henon은  $b=0.3$ ,  $a=1.4$ 에서의 attractor를 구한 뒤 일정한 지역을 계속 확대시켜 본 결과, 확대배율에 관계없이 attractor는 일정한 모양을 견지함을 발견하였다(그림 19). 이는, 앞의 두 예에서도 나타난 바와 같이, 큰 구조 속의 작은 구조, 그 속의 더 작은 구조, ……와 같이 무수히 많은 유사한 또는 동일한 구조들이 집결하여 있는, 이른바 fractal set이며 chaos의 큰 특징 중의 하나이다. 계산 결과, 이 attractor의 Lyapunov 지수는 0.2이며 fractal 차원은 1.264이다(Lyapunov 지수와 fractal 차원은 6장과 7장에서 각각 다룬다).

한편 McLaughlin<sup>(22)</sup>는  $a$ 와  $b$ 를 다양하게 변화시켜 Henon map에서의 감소효과를 다른 바 있으며, Hitzl & Zele<sup>(23)</sup>는  $-2 \leq a \leq 6$ ,  $- \leq b \leq 1$ 의 넓은 범위에 걸쳐 그 구조를 조사하였으며 또한 3차원으로 연장시켜 연구하였다.

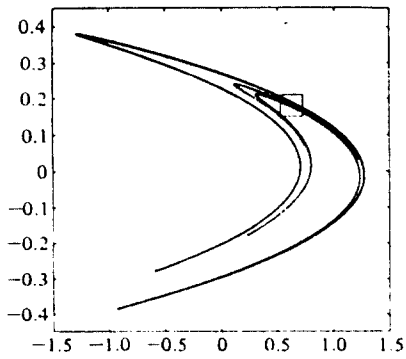
### 5.2 Bouncing Ball Map (Standard Map)

그림 20의 상부에 나타난 바와 같이, 중력장에 놓인 수평 판이 수직으로 조화운동할 때 판 위에 위치한 볼이 되튀는 상황을 표현하는 식은

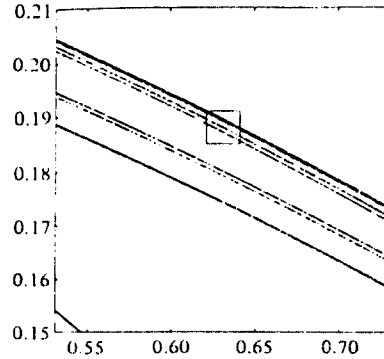
$$\phi_{j+1} = \phi_j + v_j \quad (12a)$$

$$v_{j+1} = \alpha v_j - r \cos(\phi_j + v_j) \quad (12b)$$

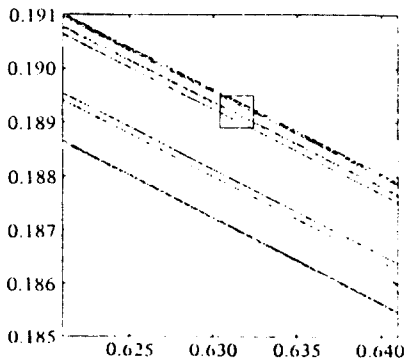
으로서 Holmes<sup>(24)</sup>가 연구한 바 있다. 여기서  $\phi$ 는 무차원 충돌시각(impact time),  $v$ 는 충돌 후의 볼의 속도를 나타내며,  $(1-\alpha)$ 는 에너지 감소와 관계되는 계수,  $\gamma$ 는 판의 운동진폭을 나타낸다. 적절한  $\alpha$ 와  $\gamma$ 에 대하여 이 시스템은 그림 20의 하단과 같이 chaotic motion을 보이며, 그 구조 또한 fractal함을 알 수 있다. 실험적 연구는 Tuffillaro & Albano<sup>(25)</sup>와 Zbigniew, Franaszek & Pieranski 등<sup>(26)</sup>이 한 바 있다.



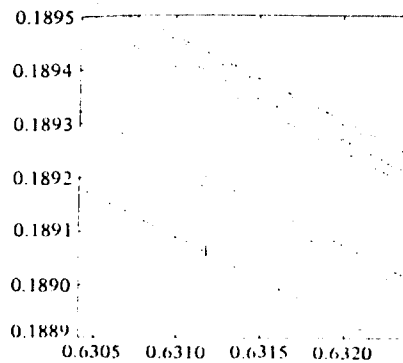
(a)  $10^4$  iterations



(b)  $10^5$  iterations



(c)  $10^6$  iterations



(d)  $5 \times 10^6$  iterations

그림 19 Henon map (11)에 의한 attractor (a)→(d)로 갈수록 더 크게 확대시킨 모습

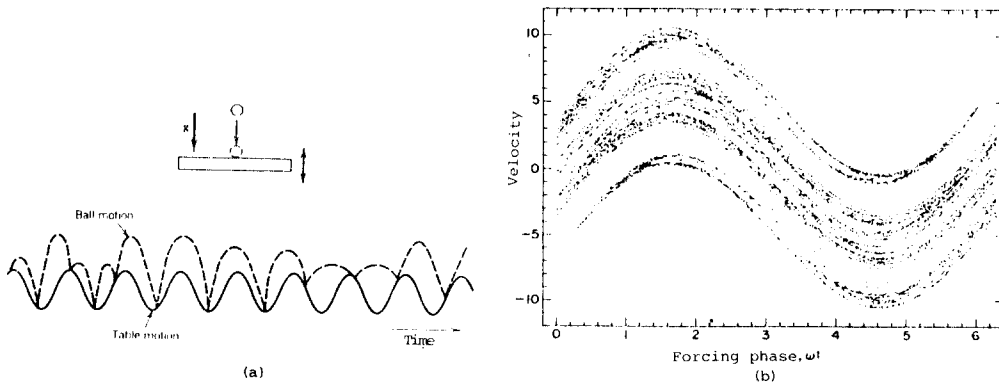


그림 20 상하로 조화 운동하는 수평판 위의 ball의 운동문제 (a)는 ball의 위치를 시간에 대해 그린 것. (b)는 poincare map

### 5.3 진자에서의 Chaos

진자의 비선형 운동에서 chaos가 발생하는 두 가지 대표적인 경우는, 외력이 조화적으로 변하는 것과 탄성계수가 조화적으로 변하는 것인데, 그 지배식은 각각 다음과 같다.

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \alpha \sin x = f_0 \cos \omega t \quad (13a)$$

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + (1 - A \cos \omega t) \sin x = 0 \quad (13b)$$

첫째 경우에 대해서는 Gwinn & Westervelt 등<sup>(27)</sup>이, 두번째 경우에 대해서는 Levin & Koch<sup>(28)</sup>, McLaughlin 등<sup>(29)</sup>이 연구한 바 있다.

한편, 3차원 공간에서, 진자를 매달고 있는 실의 끝을 수직방향으로 조화운동 시킬 때의 진자의 chaotic한 3차원 운동에 대해서 Miles<sup>(30)</sup>가 연구한 바 있다.

### 5.4 Taylor-Couette 유동

Brandstater & Swinney<sup>(31)</sup>는 Taylor-

Couette 유동에 대한 실험자료로 부터 Poincare section을 구해 본 결과 천이점 이후의 유동의 비주기적(non-periodic) 거동은 strange attractor로 설정되는 결정적 내부를 가지고 있음을 규명하였다. 그림 21은 반경방향 유속(내측 원통과 외측 원통 사이의 중간지점의 유속)의 time series, 그림 22는 power spectrum, 그림 23은 phase portrait, 그림 25는 poincare map을 나타낸다. 여기서 각 그림의 상단에 적힌 숫자는  $Re/Rec$  즉 레이놀즈수 대 임계 레이놀즈수의 비를 나타내고 있다. 그림 22의 power spectrum에 의하면, power는 frequency에 대하여 지수적으로 감소하는 경향을 가지고 있는데, 이것은 Greenside 등<sup>(32)</sup>의 분석에 따르면 주어진 거동이 stochastic(전적으로 혼돈된 상태를 말하며 chaos에서 보는 것과 같은 내적 질서를 찾을 수 없는 경

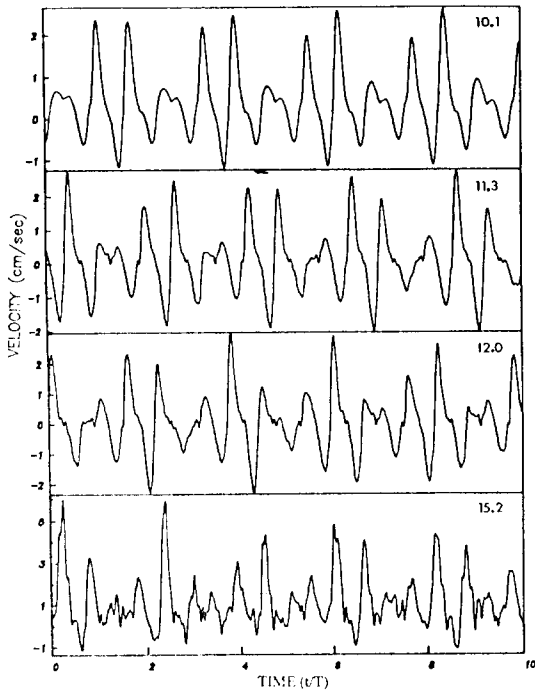


그림 21 Taylor-Couette 유동에 있어서의 반경방향 유속(내측 원통과 외측 원통의 중간지점의 유속)의  $Re/Rec$ 별 time series

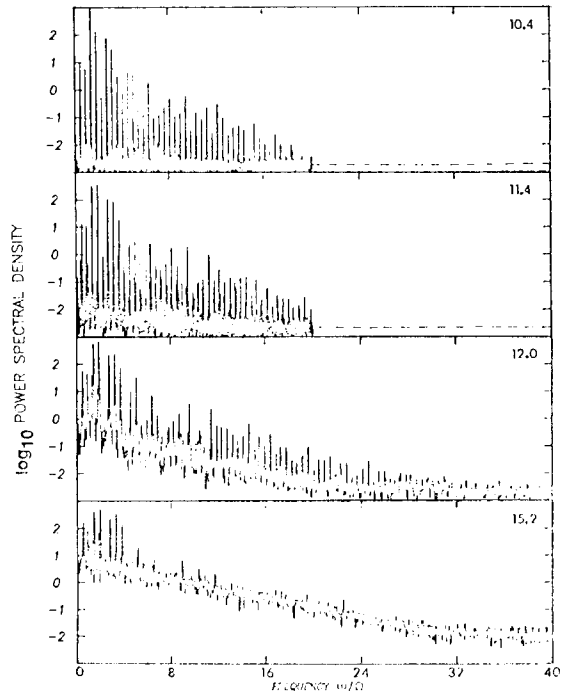


그림 22 Taylor-Couette 유동에 있어서의  $Re/Rec$ 별 power spectrum

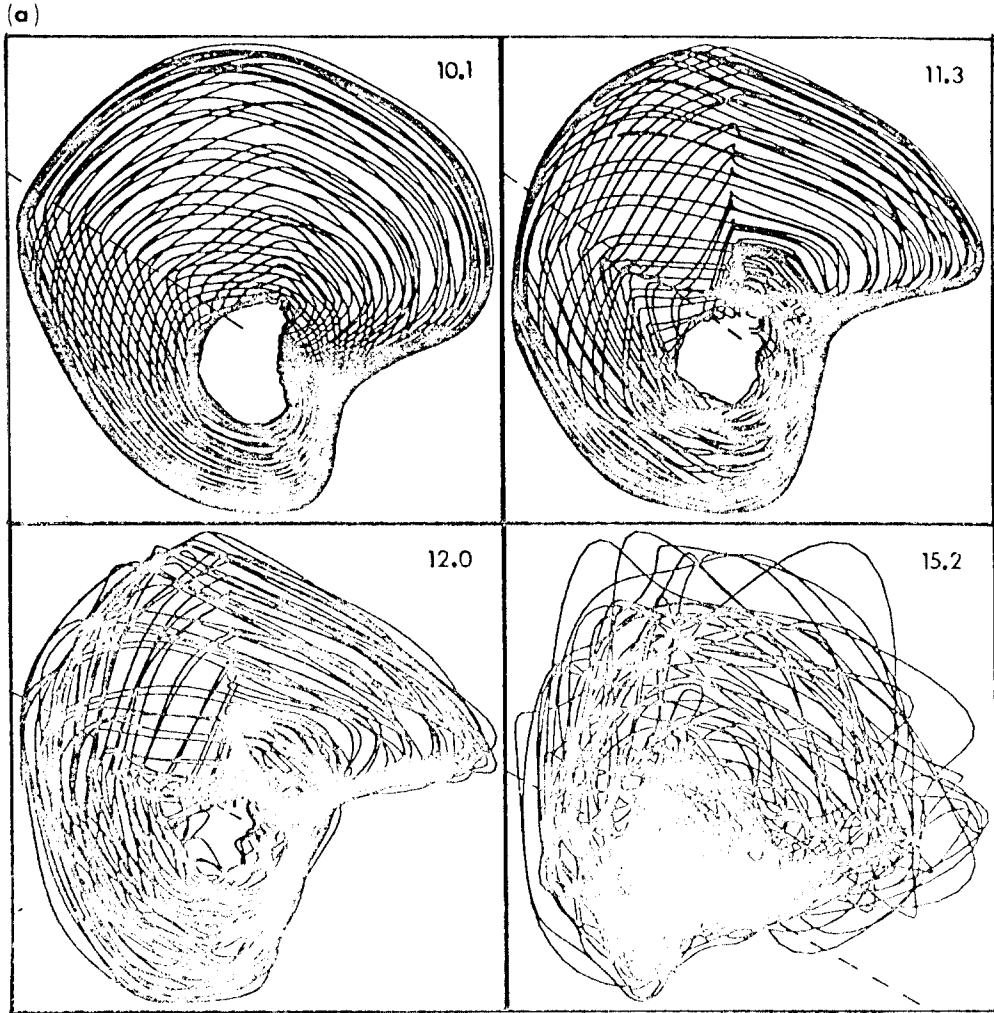


그림 23 Taylor-Couette 유동에 있어서의  $Re/Rec$ 별 phase portrait

우를 말함) 하지 않고 deterministic (chaotic motion을 염두에 둔 표현임) 함을 보여주는 결과라는 것이다. 그림 24에서는 본 poincare map이 circle map의 특성을 가졌고,  $Re/Rec=12$ 까지는 torus의 표면형이나  $Re/Rec=15.2$ 에서는 fractal 차수가 갑자기 증가하는 것을 볼 수 있다. 즉 strong turbulence 이전의 weak turbulence 구간이 넓은 Taylor-Couette 유동에서 난류의 시작을 더 근본적으

로 분석할 수 있는 계기가 될 것으로 생각된다.

### 5.5 Fluid Drop Chaos

이것은 수도꼭지에서 방울로 떨어지는 물의 낙하에 관한 실험 결과로서, University of California-Santa Cruz의 Shaw<sup>(33)</sup>가 그 무질서적 특성을 분석한 것이다.  $n$ 번째 방울과  $n+1$ 번째 방울사이의 시간을  $T_n$ 라 하고  $T_n$ 을



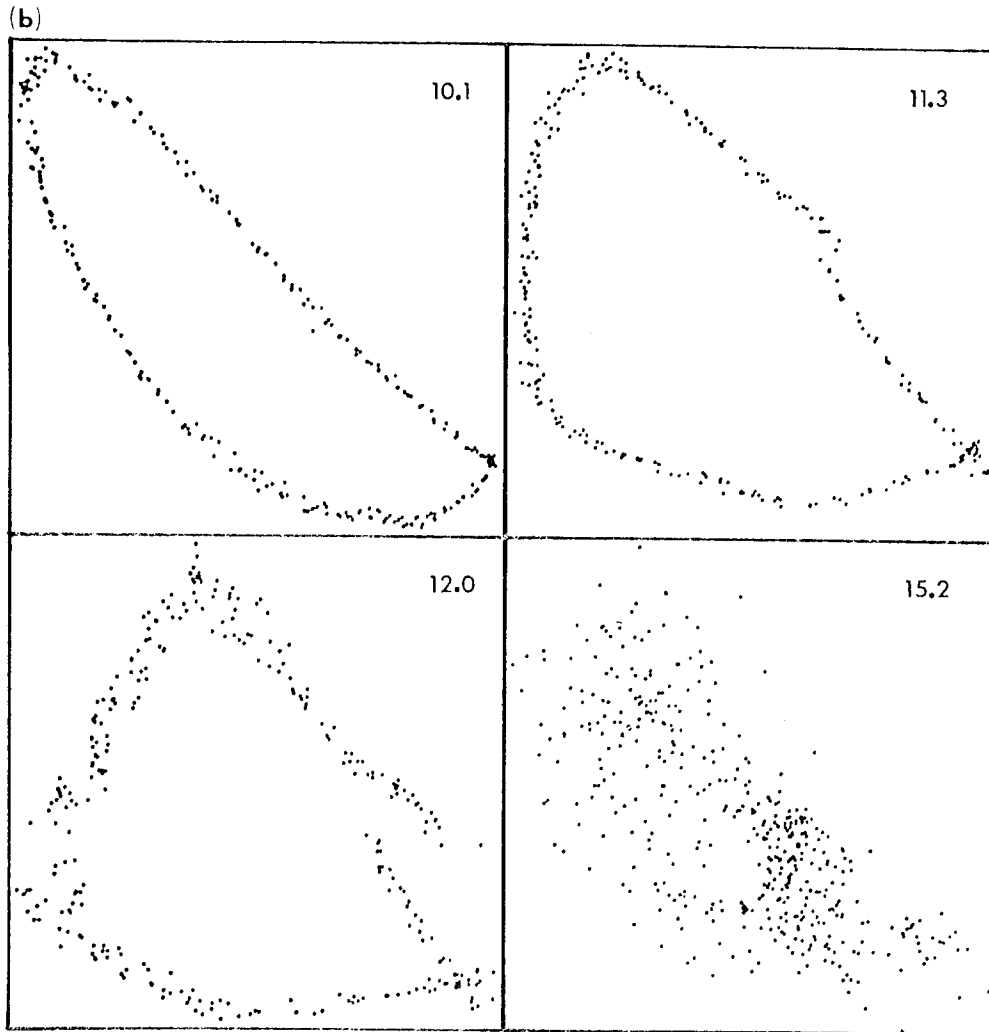


그림 24 Taylor-Couette 유동에 있어서의  $Re/Rec$ 별 poincare map

횡축,  $T_{n+1}$ 을 종축으로 하여 plot한 것이 그림 25인데, 재미있는 것은 그 모양이 logistic map의 것과 비슷하다는 사실이다.

### 5.6 Surface Wave Chaos

UCLA의 Keolian등<sup>(34)</sup>과 Ciliberto & Gollub<sup>(35)</sup>은 그릇에 물을 담고 수직방향으로 조화운동시켰을 때의 파의 chaos 운동을 실험적으로 관찰하였으며, Holmes<sup>(36)</sup>는 이에 대한 이론적

연구를 하였다. 최근 일본의 Kyushu대학의 Funakoshi & Inoue<sup>(37)</sup>는 수평방향의 조화운동에 대한 파의 거동을 실험적으로 관찰하였으며, Miles가 제안한 자유표면의 운동에 대한 식을 사용하여 4개의 1차 비선형 상미분 방정식을 얻고 이것을 수치 계산하여 여러 가지 재미있는 결과를 제시하였다. 그림 26은 각 운동량  $M$ 에 대한 bifurcation diagram으로서, logistic map의 것보다는 더욱 복잡한 양상임

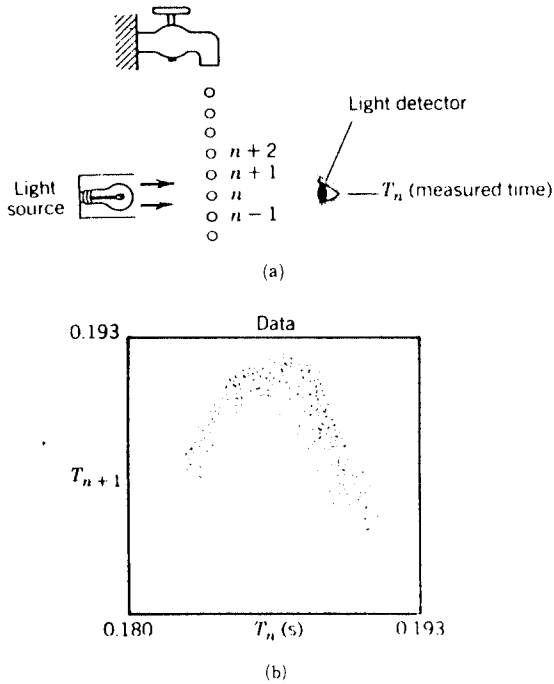


그림 25 (a) Fluid drop 문제의 스케치  
(b) Fluid drop 문제의 poincare map

을 느낄 수 있다.

### 6. Lyapunov 지수 (Exponent)

지금까지 우리는 chaos의 거동을 갖는 많은 계를 접하였다. 그러면 주어진 계의 해가 chaotic한지 아닌지를 판정하고, chaotic하면 그 정도는 어떠한지를 수치로 나타내고 싶은 것은 당연한 요망사항이다. Lyapunov 지수는 이러한 판정과 정량화에 사용되는 양 중에서 가장 흔하게 쓰이는 것이다.

Chaos의 원초적이고 기본적인 특성은 주어진 계의 해가 초기조건에 아주 민감하게 변화한다는 사실임을 우리는 앞에서 이해한 바 있다. 이것을 phase plane 상에서 설명하면, 그림 27과 같이 주어진 chaos계의 해의 궤적상의 두 시간을  $t_0, t_1$ 이라 하고 만약  $t_0$ 에서 미소 거리  $d_0$ 만큼 떨어진 점을 초기조건으로 하였다면, 그 궤적은 원래의 궤적에서 부터 시간의 증가에 따라 지수적으로 멀어지게 된다. 임의

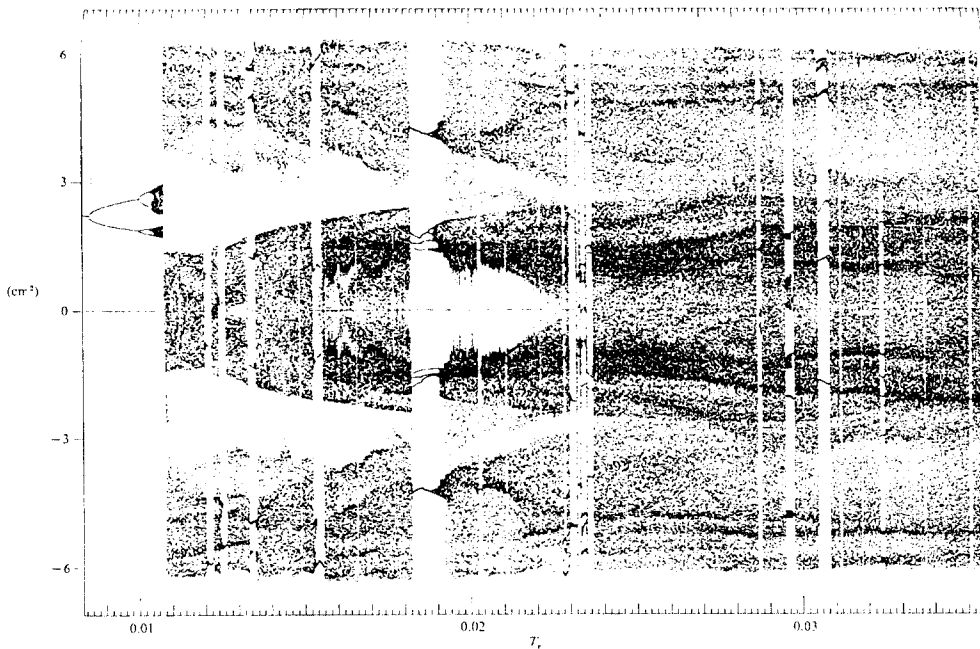


그림 26 수평방향의 조화 운동에 대한 그릇 내의 파의 각 운동량 M에 대한 bifurcation diagram

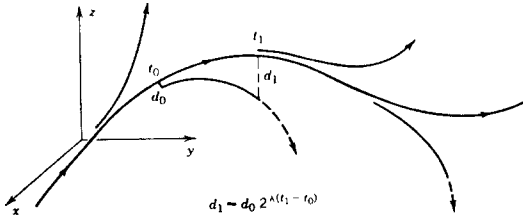


그림 27 Lyapunov 지수를 설명하기 위한 phase plane상의 제적

의 시간  $t$ 에서의 떨어진 거리를  $d$ 라 할 때  $d$  는

$$d(t) = d_0(t_0) 2^{\lambda(t-t_0)} \quad (14)$$

와 같이 표현되고 (base를 2로 선택한 것은 편의상의 이유에서 이다),  $t_1$ 에서 떨어진 거리  $d(t_1)$  은

$$d(t_1) = d_0(t_0) 2^{\lambda(t_1-t_0)} \quad (15a)$$

와 같이 된다. 여기서  $\lambda > 0$ 이면 제적은 발산하므로 chaos의 특성을,  $\lambda \leq 0$ 이면 수렴하므로 주기운동의 특성을 가짐을 알 수 있다. 한편, 또다시  $t_1$ 에서 미소거리  $d_0(t_1)$ 을 잡고 같은 방법으로  $t_2$ 에서의 떨어진 거리  $d(t_2)$ 를 식으로 나타내면

$$d(t_2) = d_0(t_1) 2^{\lambda(t_2-t_1)} \quad (15b)$$

으로 되고, 일반적으로  $t_{n-1}$ 에서의 미소거리  $d_0(t_{n-1})$ 은  $t_n$ 에서

$$d(t_n) = d_0(t_{n-1}) 2^{\lambda(t_n-t_{n-1})} \quad (15c)$$

$(n=1, 2, \dots, M)$

만큼 변할 것이다. 그런데, 일반적으로  $\lambda$ 의 값은 지역에 따라 다르므로 하나의 수치로 나타내기 위하여 평균치를 취하고 있다. 그 평균치를  $\lambda$ 라 하고 (15c)에 의한  $M$ 개의 식을 모두 곱하면 그 결과는

$$\frac{d(t_1)}{d_0(t_0)} \cdot \frac{d(t_2)}{d_0(t_1)} \cdots \frac{d(t_M)}{d_0(t_{M-1})} = 2^{\lambda(t_M-t_0)} \quad (16)$$

가 되고, 양변에  $\log_2$ 와 limit를 취하면

$$\lambda = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{n=1}^M \log_2 \frac{d(t_n)}{d_0(t_{n-1})} \quad (17)$$

가 된다<sup>(2)</sup>. 이렇게 구한  $\lambda$ 를 Lyapunov 지수라 부르고, 다음과 같이 판정한다.

$$\lambda > 0 : \text{chaotic motion} \quad (18a)$$

$$\lambda \leq 0 ; \text{regular motion} \quad (18b)$$

한편, 주어진 계가 map인 경우에는  $t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \dots = 1$ 로 두고  $d_0(t_n) = d_{0n}$ ,  $d(t_n) = d_n$ ,  $\bar{\lambda} = \bar{\Lambda}$ 라 두면

$$d_n = d_{0n-1} = 2^{\Lambda} \quad (19)$$

가 얻어지고, 앞과 같은 방식으로  $\bar{\Lambda}$ 의 평균치  $\Lambda$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Lambda = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \log_2 \frac{d_n}{d_{n-1}} \quad (20)$$

$\lambda$ 와  $\Lambda$ 를 구하기 위해서는 실제 수치 해석에 의존할 수밖에 없으며, 해석적으로 구할 수 있는 경우는 드물다. 이제 예를 들어 map  $x_{n+1} = f(x_n)$ 의  $\Lambda$ 를 구하는 과정을 살펴 보기로 하자. 최초의  $x$ 값을  $x_0$ 라 하고 임의의 미소거리를  $E$ 이라 하면

$$d_{00} = \epsilon$$

$$d_1 = |f(x_0 + E) - f(x_0)| \cong \left| \frac{df(x_0)}{dx} \right| \epsilon$$

이 되고, 따라서

$$\frac{d_1}{d_{00}} = \left| \frac{df(x_0)}{dx} \right|$$

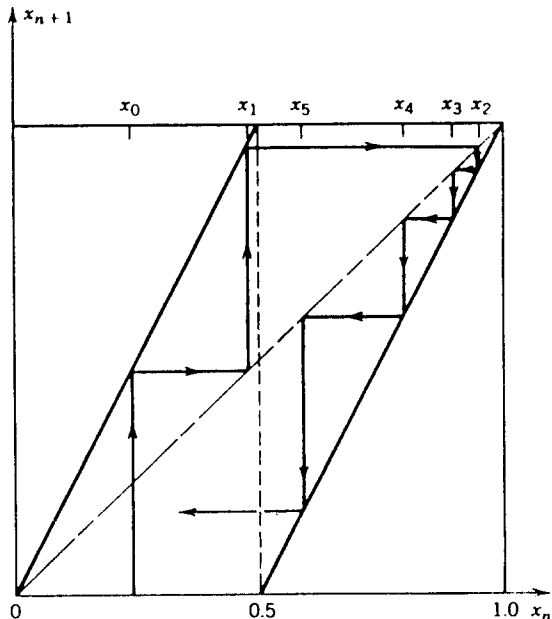


그림 28 Bernoulli map; 식 (2)

이고, 일반적으로

$$\frac{d_n}{d_{0n-1}} = \left| \frac{df(x_{n-1})}{dx} \right|$$

이 되어 식 (20)은

$$\Lambda = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \log_2 \left| \frac{df(x_{n-1})}{dx} \right| \quad (21)$$

와 같이 된다. 참고로 Bernoulli map(그림 28)의 경우는

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x < 0.5) \\ 2x-1 & (0.5 < x \leq 1) \end{cases} \quad (22)$$

이므로  $\left| \frac{df}{dx} \right| = 2$ 가 되어 식 (21)으로 부터  $\Lambda = 1$ 을 얻는다. 다른 예로서, 앞의 logistic map 식 (9)의 경우는

$$\left| \frac{df}{dx} \right| = r |1-2x| \quad (23)$$

와 같이 간단히 표시되거나,  $x$ 의 값이 변하므로 식 (9)의 수치계산 과정에서 구할 수 밖에 없다. 그림 29는 변수  $r$ 에 따른  $\Lambda$ 값의 분포인데, 특기할 것은  $r=3.57$ 이후에서 양의  $\Lambda$ 값이 출현하여 이 지역에서의 운동이 chaotic 함을 보이고 있는데 이는 앞에서 보아 온 사실과 일

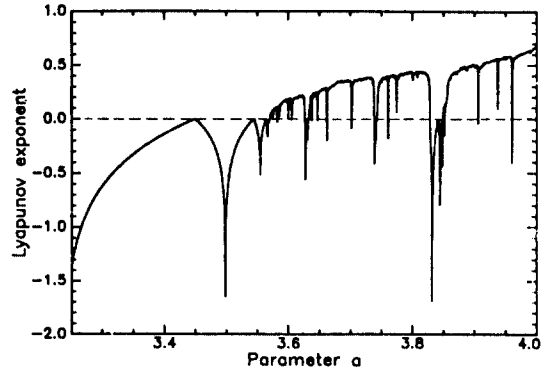


그림 29 변수  $r$ 에 따른 logistic map 식 (9)의 Lyapunov 지수  $\Lambda$

치한다. 그리고  $r > 3.57$ 의 지역에서도 수많은 음의  $\Lambda$ 값이 존재하고 이것은 그만큼 많은 window의 존재를 예측하는 것이 된다(그림 18 참조).

Time series로 부터 Lyapunov 지수를 측정하는 방법에 대해서는 Wolf 등<sup>(38)</sup>, Eckmann & Ruelle<sup>(39)</sup>, Eckmann 등<sup>(40)</sup>의 논문을 참조하기 바란다.