

(論 文)

## 고차 전단 변형 이론에 의한 적층 복합판의 충격 해석

김문생\* · 김남식\*\* · 이현철\*\*\*

(1990년 9월 15일 접수)

### Impact Analysis of Laminated Composite Plates Using Higher-Order Shear Deformation Theory

Moon-Saeng Kim, Nam-Shik Kim and Hyeon-Chul Lee

**Key Words :** Laminated Composite Plate(적층 복합판), Higher-Order Shear Deformation Theory(고차 전단 변형 이론), Static Contact Law(정적 접촉 법칙), Impact Response(충격 응답), Wave Propagation Theory(파동 전파 이론)

#### Abstract

The purpose of this research is to analyze the impulsive stress and wave propagation of laminated composite plates subjected to the transverse low-velocity impact of a steel ball. For this purpose, a plate finite element model based on the higher-order shear deformation plate theory in conjunction with static contact laws are developed and used to compute the dynamic contact force, displacement and dynamic strain(stress) response histories according to the changes of stacking sequence and dimension etc. in glass/epoxy and graphite/epoxy composite materials. Test materials for numerical and experimental investigations are composed of  $[0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ]_{2s}$  and  $[90^\circ/45^\circ/90^\circ/-45^\circ/90^\circ]_{2s}$  stacking sequences and have plate models. As a result, the results obtained from Dynamic Finite Element Method based on the high-order shear deformation theory are in good agreement with those of experiment and in better agreement with experimental results than those of the first order shear deformation theory.

기 호 설 명	
$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}$ : 강성계수	$U$ : 변형률 에너지
$E_i$ : 종탄성 계수	$u_i$ : 변위 성분
$F$ : 접촉력	$V$ : 위치 에너지
$G_{ij}$ : 횡탄성 계수	$\alpha$ : 압입량
$I_i$ : 관성 계수	$\{\Delta\}$ : 절점 자유도
$[K]$ : 강성 매트릭스	$\epsilon_i$ : 변형률 성분
$k$ : 접촉 계수	$\nu_{ij}$ : 프와송 비
$[M]$ : 질량 매트릭스	$\rho$ : 밀도
$N_i, M_i, Q_i, R_i$ : 응력의 합력	$\sigma_i$ : 응력 성분

\* 정회원, 부산대학교 공과대학 기계설계공학과

\*\* 정회원, 부산공업대학 기계설계과

\*\*\* 정회원, 부산대학교 대학원

#### 1. 서 론

기존의 금속 재료에 비해 높은 무게비 강도

(specific strength) 및 강성도(modulus)와 섬유 방향 및 적층 순서의 변화에 따른 유동적인 이방성(anisotropic) 때문에 흑연/에폭시(graphite/epoxy), 유리/에폭시(glass/epoxy), 탄소/에폭시(carbon/epoxy)와 보론/에폭시(boron/epoxy)등과 같은 복합 재료(composite material)의 수요는 항공 우주 산업 및 자동차 산업과 각종 스포츠 용품에 이르기 까지 급격한 증가 추세에 있다.

그러나, 두께 방향에 대한 상대적인 강화(reinforcement)의 결핍으로, 외부 물체의 충격에 매우 약하며 손상을 입기 쉽다는 점이 최근의 주요한 관심이 되고 있다. 특히 이러한 복합 재료는 외부 물체의 충격을 받기 쉬운 제트 엔진 팬(fan), 압축기 날개(blade), 항공기, 전투기, 미사일과 적재함 구조물 등에 주로 사용되기 때문에 외부 물체가 상대적으로 작은 경우의 손상은 접촉면을 포함하는 작은 영역에 한정되며 손상 정도는 명백히 외부 물체와 구조물 사이의 접촉력에 의존하므로 이 접촉력과 이에 해당하는 변형 및 응력의 정확한 계측 및 해석 방법의 연구는 충격 손상을 예측하기 위하여 필요하다. 그러나 동적 접촉력의 직접적 측정은 넓은 범위의 충격 변수와 실험 기술의 한계로 어려운 실정이다.

그리고 충격 현상은 정하중의 경우와는 달리 접촉 영역에서의 재료의 접촉 거동과 응력과 형태의 구조적 거동을 모두 포함하고 있다. 다시 말하면 충격점에서의 초기 에너지는 응력파의 형태로 나머지 부분에 전달되며 응력파의 반사와 기하학적 모양의 변화로 인한 응력 집중으로 순간 응력이 크게 형성되는 복잡한 구조적 거동을 일으킨다. 또한 복합 재료가 충격을 받게 될때 수반되는 충격 응력 및 응력파는 층간 분리(delamination)에 직접적인 영향을 미치며, 이것은 초기 파괴 거동과 관련이 있기 때문에 외부 물체의 충격을 받게되는 복합재 구조물을 설계할 때에 필히 고려하여야 할 충격 응력 및 응력파 특성에 관한 이론적 연구는 아주 중요한 과제이며, 이를 위해서는 복합재의 접촉 거동과 응력과 형태의 구조적 거동을 분리하여 해석하는 것이 바람직하다.

고전적 Kirchhoff 가설에 기초를 둔 적층판의 이론은 잘 이루어졌으나<sup>(1-3)</sup>, Ambartsumyan<sup>(4)</sup>과 Pagano<sup>(5)</sup>가 고전 이론과 정확한 탄성해와의 비교에서 적층 복합 판에서 횡방향 전단 변형을 고려할 필요성을 지적하였다. 횡방향 전단 변형을 포함하

는 판 이론은 많이 있으며, 여러 연구<sup>(6,7)</sup>에서 YNS 이론이 적층 복합재 판의 횡방향 변형과 고유 주파수 같은 전반적 거동을 예측 하는데 타당하다는 것을 보여 주었다. 그리고 Whitney와 Pagano<sup>(6)</sup>는 YNS 이론과 유사한 1차 전단 변형 판 이론(the first-order shear deformation theory)을 개발하여 사인(sine) 형태의 하중 하에서의 비대칭 cross-ply와 angle-ply 판의 굽힘과 자유 진동에 적용하였다. 그리고 최근에 Reddy<sup>(8)</sup>는 두께에 따른 횡방향 전단 변형의 포물선 변화를 나타내어 결과적으로 전단 응력을 계산하는데 전단 수정 계수를 사용 할 필요가 없는 적층 이방성 복합재 판 해석을 위한 하나의 고차 이론을 제시하였고, 이의 수치 해석을 위한 혼합 유한 요소법(mixed finite element method)을 제안하였으나 해석상 매우 복잡한 문제점을 지니고 있다.

따라서 본 연구에서는 적층 복합판의 충격 해석을 위하여 Reddy의 고차 전단 변형 이론에 기초를 두고, 정적 압입 실험에 의한 접촉 법칙을 고려한 동적 유한 요소 해석(dynamic finite element analysis)을 행하여 충격 실험에 의한 결과와 1차 전단 변형 이론에 의한 해와 비교 검토함으로써, 그 유용성과 우수성을 입증하고, 적층 복합재의 충격 응력 및 응력과 전파 특성에 대하여 연구하고자 한다.

## 2. 복합 재료 이론

일정한 두께를 지니고 있는 적층 복합판(laminated composite plates)은 얇은 한 방향 섬유 강화 단층(lamina)들이 각각 임의의 섬유 방향을 가지고 적층되어 있는 형태로써 각 단층은 서로 완벽하게 접착되어 있는 상태이다.

적층판의 변위 성분은 Fig. 1에서

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t) + z^2\xi_x(x, y, t) \\ &\quad + z^3\xi_x(x, y, t) \\ u_2(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t) + z^2\xi_y(x, y, t) \\ &\quad + z^3\xi_y(x, y, t) \\ u_3(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

로 주어진다.

여기서  $u, v$ 와  $w$ 는 보의 중립면에서의 변위 성분이다. 즉  $u_1$ 과  $u_2$ 는 두께 방향에 따라 3차 곡선적으로 변하고  $u_3$ 는 일정하다. 여기서  $\varphi_x$ 와  $\varphi_y$ 는

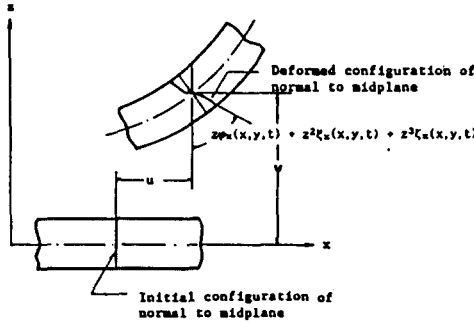
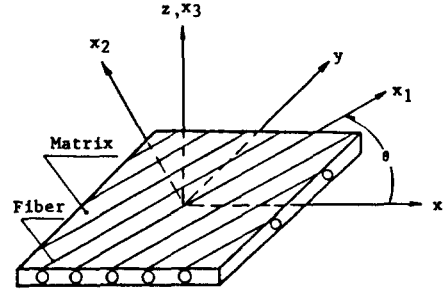


Fig. 1 Geometry of deformation in the  $x$ - $z$  plane



( $x_1, x_2, x_3$ ) : Material(Lamina) reference axes

( $x, y, z$ ) : Plate(Laminate) reference axes

Fig. 2 Reference coordinates for lamina and laminate

각각  $y$ 와  $x$ 축에 대한 중립면에 대해 수직인 단면의 회전틀이고,  $\xi_x, \xi_y, \zeta_x, \zeta_y$ 는 횡방향 전단 응력 성분(transverse shear stresses)  $\sigma_{xz}$ 와  $\sigma_{yz}$ 가 판의 아래와 윗 면에서 영이 된다는 조건으로부터 구할 수 있다. 즉,

$$\sigma_{xz}(x, y, \pm h/2, t) = 0, \quad \sigma_{yz}(x, y, \pm h/2, t) = 0$$

이므로

$$\xi_x = 0, \quad \xi_y = 0$$

$$\zeta_x = -\frac{4}{3h^2} \left[ \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \right] \quad (3)$$

$$\zeta_y = -\frac{4}{3h^2} \left[ \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \right]$$

를 얻을 수 있다. 따라서 식 (1)로부터 변위 성분을

$$\begin{aligned} u_1 &= u + z \left[ \varphi_x - \frac{4}{3} \left[ \frac{z}{h} \right]^2 \left[ \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \right] \\ u_2 &= v + z \left[ \varphi_y - \frac{4}{3} \left[ \frac{z}{h} \right] \left[ \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right] \end{aligned} \quad (4)$$

이다. 그리고 변형률 식 (1)로부터

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^\circ + z(\kappa_1^\circ + z^2 \kappa_1^2)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2^\circ + z(\kappa_2^\circ + z^2 \kappa_2^2)$$

$$\varepsilon_3 = 0$$

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_4^\circ + z^2 \kappa_4^2$$

$$\varepsilon_5 = \varepsilon_5^\circ + z^2 \kappa_5^2$$

$$\varepsilon_6 = \varepsilon_6^\circ + z(\kappa_6^\circ + z^2 \kappa_6^2)$$

이 된다. 여기서

$$\varepsilon_1^\circ = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \kappa_1^\circ = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x},$$

$$\kappa_1^2 = -\frac{4}{3h^2} \left[ \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

$$\varepsilon_2^\circ = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\kappa_2^\circ = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \quad \kappa_2^2 = -\frac{4}{3h^2} \left[ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_4^\circ &= \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \kappa_4^2 = -\frac{4}{h^2} \left[ \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\ \varepsilon_5^\circ &= \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \kappa_5^2 = -\frac{4}{h^2} \left[ \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\ \varepsilon_6^\circ &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \kappa_6^\circ = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \\ \kappa_6^2 &= -\frac{4}{3h^2} \left[ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

이다.

그리고, 평면 응력 상태라 가정하면, Fig. 2에서의 판 기준 좌표계(plate reference axes)에 대한 응력-변형률 관계식은

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ & & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ & & & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ & & & & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix}^k \quad (7)$$

여기서  $\bar{Q}_{ij}$ 는 변환된 감소 강성 행렬(transformed reduced stiffness matrix)이다.

식 (4)의 변위 성분과 식 (7)의 구성방정식에 적합한 평형 방정식을 유도하기 위해서 Hamilton의 원리를 사용하면,

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_0^t \left[ \int_{-h/2}^{h/2} \int_R (\sigma_1 \delta \varepsilon_1 + \sigma_2 \delta \varepsilon_2 + \sigma_6 \delta \gamma_6 \right. \\ &\quad \left. + \sigma_4 \delta \gamma_4 + \sigma_5 \delta \gamma_5) dA dz \right. \\ &\quad \left. - \int_R q \delta w dA \right] dt + \frac{\delta}{2} \int_0^t \int_{-h/2}^{h/2} \int_R \rho \left[ (\dot{u}_1)^2 \right. \\ &\quad \left. + (\dot{u}_2)^2 + (\dot{u}_3)^2 \right] dA dz dt \\ &= - \int_0^t \int_R \left\{ N_1 \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + M_1 \delta \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ P_1 \left[ -\frac{4}{3h^2} \left[ \delta \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) + \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \right. \\
 &+ N_2 \delta \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + M_2 \delta \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\
 &+ P_2 \left[ -\frac{4}{3h^2} \left[ \delta \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) + \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \right. \\
 &+ N_6 \left[ \delta \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \delta \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + M_6 \left[ \delta \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) \right. \\
 &+ \delta \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \left. \right] + P_6 \left[ -\frac{4}{3h^2} \left[ \delta \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) \right. \right. \\
 &+ \delta \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) + 2\delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left. \right] \\
 &+ Q_2 \left[ \delta \varphi_y + \delta \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + R_2 \left[ -\frac{4}{h^2} \left[ \delta \varphi_y \right. \right. \\
 &+ \delta \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left. \right] \left. \right] + Q_1 \left[ \delta \varphi_x + \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\
 &+ R_1 \left[ -\frac{4}{h^2} \left[ \delta \varphi_x + \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \right] \\
 &- q \delta w \} dx dy dt - \int_0^t \int_r \left\{ \delta u \left[ I_1 \ddot{u} \right. \right. \\
 &+ \left[ I_2 - \frac{4}{3h^2} I_4 \right] \ddot{\varphi}_x + \left[ -\frac{4}{3h^2} I_4 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \right] \\
 &+ \delta v \left[ I_1 \ddot{v} + \left[ I_2 - \frac{4}{3h^2} I_4 \right] \ddot{\varphi}_y \right. \\
 &+ \left. \left. \left[ -\frac{4}{3h^2} I_4 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} \right] + \delta w \left[ I_1 \ddot{w} + \left[ \frac{4}{3h^2} \right]^2 I_7 \right. \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \left. \left[ \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial y^2} \right] \right] \frac{4}{3h^2} I_4 \left[ \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right] \right. \right. \\
 &+ \frac{4}{3h^2} \left[ I_5 - \frac{4}{3h^2} I_7 \right] \left[ \frac{\partial \ddot{\varphi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{\varphi}_y}{\partial y} \right] \left. \right. \\
 &\delta \varphi_x \left[ \left[ I_2 - \frac{4}{3h^2} I_4 \right] \ddot{u} + \left[ I_3 - \frac{8}{3h^2} I_5 \right. \right. \\
 &+ \frac{16}{9h^4} I_7 \left. \right] \ddot{\varphi}_x - \frac{4}{3h^2} \left[ I_5 - \frac{4}{3h^2} I_7 \right] \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \left. \right. \\
 &+ \delta \varphi_y \left[ \left[ I_2 - \frac{4}{3h^2} I_4 \right] \ddot{v} + \left[ I_3 - \frac{8}{3h^2} I_5 \right. \right. \\
 &+ \frac{16}{9h^4} I_7 \left. \right] \ddot{\varphi}_y - \frac{4}{3h^2} \left[ I_5 - \frac{4}{3h^2} I_7 \right] \\
 &\left. \left. \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} \right] \right\} dx dy dt
 \end{aligned} \tag{8}$$

여기서 응력의 합력  $N_i$ ,  $\bar{M}_i$ ,  $Q_i$  및  $R_i$ 는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}
 (N_i, M_i, P_i) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i(1, z, z^2) dz \quad (i=1, 2, 6) \\
 (Q_2, R_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_4(1, z^2) dz \\
 (Q_1, R_1) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_5(1, z^2) dz
 \end{aligned} \tag{9}$$

그리고 관성항  $I_i (i=1, 2, 3, 4, 5, 7)$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_7) = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz \tag{10}$$

식(8)을 부분 적분하여  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$ ,  $\delta \varphi_x$ ,  $\delta \varphi_y$  항으로 묶으면, 다음의 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 \delta u : \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_6}{\partial y} &= I_1 \ddot{u} + \bar{I}_2 \ddot{\varphi}_x - \frac{4}{3h^2} I_4 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \\
 \delta v : \frac{\partial N_6}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} &= I_1 \ddot{v} + \bar{I}_2 \ddot{\varphi}_y - \frac{4}{3h^2} I_4 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \\
 \delta w : \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + q - \frac{4}{h^2} \left[ \frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{\partial R_2}{\partial y} \right] \\
 &+ \frac{4}{3h^2} \left[ \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 P_6}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} \right] \\
 &= I_1 \ddot{w} - \left[ \frac{4}{3h^2} \right]^2 I_7 \left[ \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial y^2} \right] \\
 &+ \frac{4}{3h^2} I_4 \left[ \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right] + \frac{4}{3h^2} \bar{I}_5 \left[ \frac{\partial \ddot{\varphi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{\varphi}_y}{\partial y} \right]
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 \delta \varphi_x : \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_6}{\partial y} - Q_1 + \frac{4}{h^2} R_1 \\
 - \frac{4}{3h^2} \left[ \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_6}{\partial y} \right] \\
 = \bar{I}_2 \ddot{u} + \bar{I}_3 \ddot{\varphi}_x - \frac{4}{3h^2} \bar{I}_5 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \\
 \delta \varphi_y : \frac{\partial M_6}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} - Q_2 + \frac{4}{h^2} R_2 \\
 - \frac{4}{3h^2} \left[ \frac{\partial P_6}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y} \right] \\
 = \bar{I}_2 \ddot{v} + \bar{I}_3 \ddot{\varphi}_y - \frac{4}{3h^2} \bar{I}_5 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y}
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 \bar{I}_2 &= I_2 - \frac{4}{3h^2} I_4, \quad \bar{I}_5 = I_5 - \frac{4}{3h^2} I_7, \\
 \bar{I}_3 &= I_3 - \frac{8}{3h^2} I_5 + \frac{16}{9h^4} I_7
 \end{aligned} \tag{12}$$

이다.

따라서 식 (6), 식 (7), 식 (9)로부터

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_6 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ & A_{22} & A_{26} \\ \text{symm.} & & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ & B_{22} & B_{26} \\ \text{symm.} & & B_{66} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ & D_{22} & D_{26} \\ \text{symm.} & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_6 \end{bmatrix} + \text{symm.}$$

$$\begin{Bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ & E_{22} & E_{26} \\ \text{symm.} & & E_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^\circ \\ \varepsilon_2^\circ \\ \varepsilon_6^\circ \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ & F_{22} & F_{26} \\ \text{symm.} & & F_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_1^\circ \\ \kappa_2^\circ \\ \kappa_6^\circ \end{Bmatrix} \quad (13a)$$

$$\begin{Bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{16} \\ & H_{22} & H_{26} \\ \text{symm.} & & H_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_1^2 \\ \kappa_2^2 \\ \kappa_6^2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_1 \\ R_2 \\ R_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{44} & A_{45} & A_{44} & D_{45} \\ & A_{55} & D_{45} & D_{55} \\ & & F_{45} & F_{45} \\ \text{symm.} & & & F_{55} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_4^\circ \\ \varepsilon_0^\circ \\ \kappa_4^2 \\ \kappa_5^2 \end{Bmatrix} \quad (13b)$$

이 된다. 여기서 강성 계수  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$ ,  $E_{ij}$ ,  $F_{ij}$ ,  $H_{ij}$ 는

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \begin{matrix} dz \\ z \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \\ z^6 \end{matrix} \quad (i, j=1, 2, 6) \quad (14)$$

$$(A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z^2, z^4) dz \quad (i, j=4, 5)$$

이 된다.

### 3. 수치해석

횡방향 전단 효과를 고려하는 임의의 적층판의 문제 해석을 위해서는 변위 구성식에 신장(extension), 굽힘(bending)외에도 전단 변형(shear deformation)효과를 포함시키는 것이 중요하다. 이를 위해 Fig. 3(a)와 같은 각 절점당 5 자유도 ( $u, v, w, \varphi_x, \varphi_y$ )를 가지는 4절점 요소(4-node quadrilateral isoparametric element)의 유한 요소 모델을 사용한다.

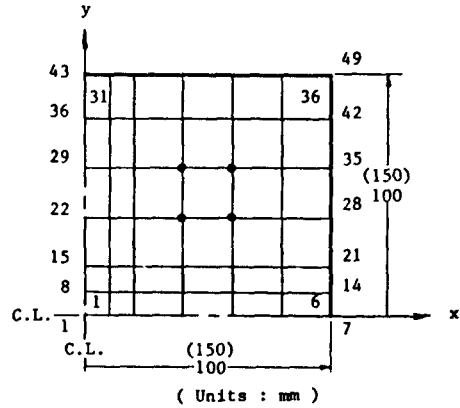
또한 Fig. 3(b)는 적층복합판의 충격해석을 위해 개발한 유한요소 프로그램의 흐름도를 나타내었다.

4절점 요소의 변위 성분들을 동일한 형상 함수(shape function)  $\Psi_i$ 를 사용하여 나타내면

$$u = \sum_{i=1}^4 u_i \Psi_i, \quad v = \sum_{i=1}^4 v_i \Psi_i, \quad w = \sum_{i=1}^4 w_i \Psi_i \quad (15)$$

$$\varphi_x = \sum_{i=1}^4 \varphi_{xi} \Psi_i, \quad \varphi_y = \sum_{i=1}^4 \varphi_{yi} \Psi_i$$

이 되고,  $u_i, v_i, w_i, \varphi_{xi}$  및  $\varphi_{yi}$ 는 각각 절점값이다.



(Units : mm)

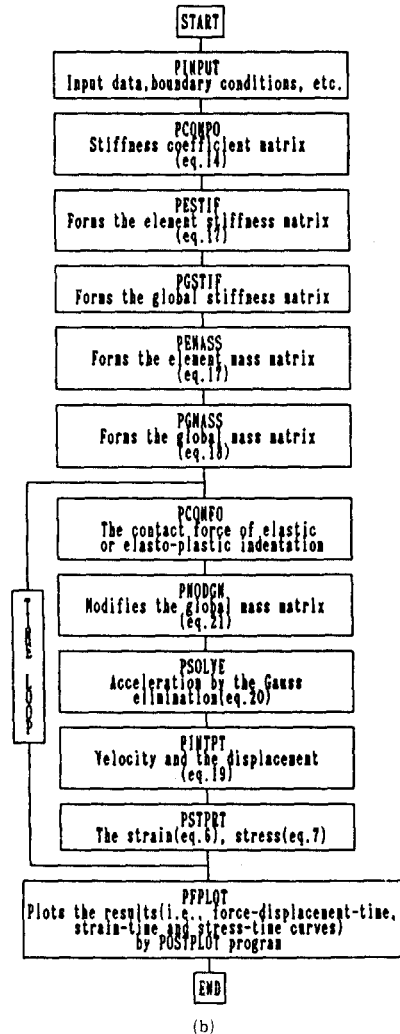


Fig. 3 (a) Finite element discretization(nodes=49, element=36), (b) Flow diagram for impact analysis of laminated composite plates

충 위치에너지와 Hamilton의 원리에서의 총 Lagrangian은

$$\Pi = U + V, \quad L = \Pi - K \quad (16)$$

로 주어지며, 여기서  $V$ 는 작용 하중에 의한 위치 에너지이고,  $K$ 와  $U$ 는 운동 에너지와 변형률 에너지이다.

Hamilton의 원리( $\int_0^t \delta L dt = 0$ )로부터 판의 요소에 대한 유한 요소 방정식은

$$[M^e]\{\dot{\Delta}^e\} + [K^e]\{\Delta^e\} = \{F^e\} \quad (17)$$

와 같이 된다. 여기서  $[M^e]$ 은 요소 질량 매트릭스,  $[K^e]$ 는 요소 강성 매트릭스, 그리고  $\{F^e\}$ 는 요소 하중 벡터이다.

전체 요소에 대한 유한 요소 방정식은 각 요소에 대하여 중첩하면 다음과 같다.

$$[M]\{\dot{\Delta}\} + [K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (18)$$

식(18)의 운동 방정식과 같이 시간과 관련된 문제의 해석을 위하여 본 해석에서는 가속도( $\Delta$ )의 변화가 시간 간격  $\Delta t$ 에 대하여 선형적이라고 가정하는 Wilson과 Clough<sup>(9)</sup>의 유한 차분법을 이용하여 시간 적분을 행하여 해를 구한다. 즉,

$$\{\Delta\}_{t+\Delta t} = \{\Delta\}_t + (\Delta t/2)\{\dot{\Delta}\}_t + (\Delta t/2)\{\dot{\Delta}\}_{t+\Delta t} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \{\Delta\}_{t+\Delta t} = & \{\Delta\}_t + \Delta t\{\dot{\Delta}\}_t + (\Delta t^2/3)\{\ddot{\Delta}\}_t \\ & + (\Delta t^2/6)\{\ddot{\Delta}\}_{t+\Delta t} \end{aligned}$$

식 (19)를 식 (18)에 대입하면

$$[H]\{\dot{\Delta}\}_{t+\Delta t} = \{F\}_{t+\Delta t} - [K]\{b\}_t \quad (20)$$

이 되며, 여기서

$$\begin{aligned} [H] = & [M] + (\Delta t/2)[K] \\ \{b\}_t = & \{\Delta\}_t + \Delta t\{\dot{\Delta}\}_t + (\Delta t^2/3)\{\ddot{\Delta}\}_t \end{aligned} \quad (21)$$

이다.

식 (20)은 Gauss 소거법에 의하여 시간  $t + \Delta t$ 에서의 가속도  $\{\dot{\Delta}\}_{t+\Delta t}$ 가 구해지고, 식 (19)에 의해 속도  $\{\dot{\Delta}\}_{t+\Delta t}$ 와 변위  $\{\Delta\}_{t+\Delta t}$ 를 구할 수 있다. 따라서 초기값이 주어지면 시간의 변화에 따라 단계적으로 해를 구할 수 있다.

그리고 적층 복합재의 경우, 탄성구의 충격에 의한 접촉력은 Tan과 Sun<sup>(10)</sup>의 수정된 접촉 법칙으로부터

$$F = \begin{cases} k\alpha^{3/2} & : \text{부하 과정} \\ F_m \left[ \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_m - \alpha_0} \right]^{5/2} & : \text{제하 과정} \end{cases} \quad (22)$$

이다. 여기서  $\alpha$ 는 압입량(indentation)이고,  $k$ 는 접촉 계수로써 정적 압입 실험에서 구한 값을 본

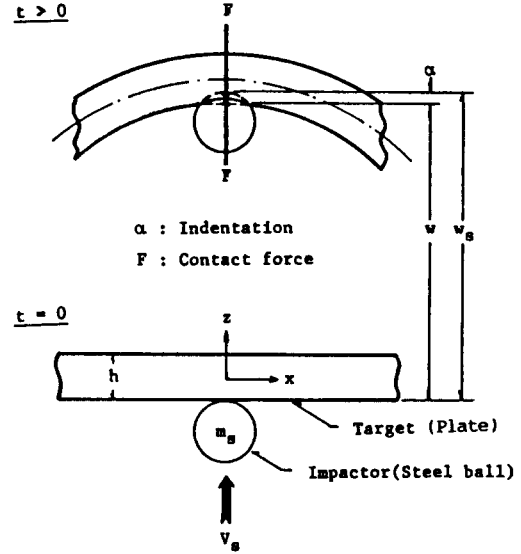


Fig. 4 Central transverse impact of a rigid body

수치 해석에 사용하였다. 그리고  $F_m$ 과  $\alpha_m$ 은 제하 과정이 시작될 때의 최대 하중과 그 때의 압입량이고,  $\alpha_0$ 는 영구압입량(permanent indentation)이다.

탄성구를 고려하는 경우, 충격점에서의 압입량  $\alpha$ 는 Fig. 4에서와 같이 구와 판의 변위로 나타낼 수 있다.

$$\alpha = (w_s)_{t+\Delta t} - w_{t+\Delta t}(x_0, y_0) \quad (23)$$

여기서,  $w_s$ 는 초기 접촉 위치로부터 구의 변위이고,  $w(x_0, y_0)$ 는 접촉점에서의 판의 횡방향 변위이다.

그리고 본 수치 해석에 사용된 각 재료 상수는 다음과 같다.

유리/에폭시

$$\begin{aligned} E_1 = & 55.85\text{GPa}, \quad E_2 = 14.75\text{GPa} \\ G_{12} = & G_{23} = G_{13} = 6.43\text{GPa} \\ \nu_{12} = & 0.31, \quad \rho = 2050\text{kg/m}^3 \end{aligned}$$

흑연/에폭시

$$\begin{aligned} E_1 = & 120\text{GPa}, \quad E_2 = 7.9\text{GPa} \\ G_{12} = & G_{23} = G_{13} = 5.5\text{GPa} \\ \nu_{12} = & 0.30, \quad \rho = 1582\text{kg/m}^3 \end{aligned}$$

강 구

$$E_s = 207\text{GPa}, \quad \nu_s = 0.30, \quad \rho = 7860\text{kg/m}^3$$

Table 1 Specification of the specimen

Material	Stacking sequence	Specimen dimension(mm)
Glass/Epoxy	$[0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ]_{2S}$	$4.5t \times 200\omega \times 200l$
	$[90^\circ/45^\circ/90^\circ/-45^\circ/90^\circ]_{2S}$	$4.5t \times 300\omega \times 300l$

4. 충격 실험

충격 실험에 사용된 유리/에폭시 복합재 시험편은 한국화이바(주)에서 제작하였으며, 체적비(volume fraction)는 0.7이다. 시험편의 자세한 사양은 Table 1에 나타나 있으며, 복합 적층판의 시험편을 고정시키는 양단은 몰림 부분을 두고 단순 지지를 위한 다른 양단은 길이 방향으로 1mm 정도의 V자 홈을 가공하였다.

충격 실험 장치는 Fig. 5에 나타나 있으며, 충격을 가하는 강구는 지름이 12.7mm이고 시험편의 중앙에 속도 4m/sec.(0.82m 높이에서 자유 낙하)로 충격을 가하였다. 충격 후의 변형률 응답을 측정하기 위하여 충격 부분의 반대편에 x방향, x방향과 45°와 90°의 세 방향 스트레인 게이지(KYOWA Electronic Instruments Co. LTD., KFC-2-D17-11)를 부착하였으며, 측정 지점은 이론 해석 결과들과의 비교를 고려하여 Table 2에 나타나 있는 지점(판 이론 해석에서의 Gauss 적분점 등)들을 선택하였다.

Table 2에서 충격점의 반대편 점 a지점에 스트레인 게이지를 부착한 것은 다른 지점에서의 충격

후의 변형률 응답에 대한 시간 갭(gap)을 정확히 예측하기 위한 트리거(trigger) 역할을 위해서이며, 강구가 충돌 후 스트레인 게이지로부터의 신호

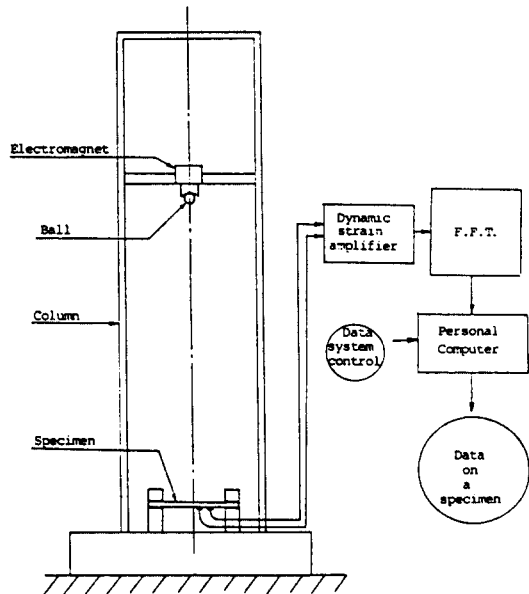


Fig. 5 Equipment for impact test

Table 2 Measuring points to the change of model type(unit : mm)

Model	Measuring points		
	$4.5t \times 200\omega \times 200l$	$4.5t \times 300\omega \times 300l$	
	a	$(x, y, z) = (0, 0, 2.25)$	$(x, y, z) = (0, 0, 2.25)$
	b	$(x, y, z) = (2.11, 2.11, 2.25)$	$(x, y, z) = (3.17, 3.17, 2.25)$
	c	$(x, y, z) = (44.23, 2.11, 2.25)$	$(x, y, z) = (66.34, 3.17, 2.25)$
Note : Strain gage at measuring points a is located for trigger of impact responses, Boundary condition : ————— : clamped ..... : simply supported			

는 휘스톤 브리지(Wheatstone bridge)를 거쳐서 증폭기(dynamic strain amplifier)에 의해 증폭되어 F.F.T.(fast fourier transformer)에 나타나고, 이 변형률을 시간에 따라 도면화 하였다.

## 5. 결과 및 고찰

본 연구에서는 적층 복합판에 대해서 저자가 이 미 개발한 선형 1차 전단 변형이론(the first-order shear deformation theory : FSDT)에 기초를 둔 동적 유한요소법(dynamic finite element method) (15,16,17)을 근거로 하여 Reddy<sup>(8)</sup>의 고차 전단 변형이론(the higher-order shear deformation theory : HSDT)을 이용하여 적층 복합재의 탄성 정적 접촉 법칙을 고려한 동적 판 유한 요소법을 개발하였다.

### 5.1 접촉력 및 충격 응답

강구가 판에 충돌한 후, 시간의 변화에 따른 접촉력과 강구 및 판의 변위를 Fig. 6과 Fig. 7에 나타내었으며, FSDT의 의한 결과가 Fig. 8과 Fig. 9에 나타나 있다. 최대 접촉력의 크기는 각 적층판에 대하여 FSDT에 의한 결과<sup>(11)</sup>와 같이 Table 3에 나타내었다. Fig. 6~Fig. 9에서 보는 바와 같이 강구와 판의 접촉 시간은 FSDT의 경우 대부분 120 $\mu$ sec. 정도 소요되는 반면, HSDT의 경우 대부분 120~160 $\mu$ sec. 정도 소요되었다. 강구가 충돌한 후 최대 접촉력은 FSDT의 경우 48~56 $\mu$ sec.에서 발생한 반면, HSDT의 경우 40 $\mu$ sec. 정도에서 발생하였다.

그리고 Table 3에서 보는 바와 같이 최대 접촉력은 적층 형태에 관계없이 거의 비슷하게 나타났으며, 판의 크기가 작은 경우가 큰 경우보다 최대 접촉력은 약 5% 정도 크게 나타났으나, 이는 아주 작은 양이며, 최대 접촉력은 단지 재료 상수와 압입량에 좌우되며, 판의 크기에는 큰 영향을 받지 않는다는 것을 보여 준다. 이러한 현상은 FSDT에 의한 결과<sup>(11,17)</sup>들과 잘 일치하고, FSDT에 의한 최대 접촉력보다 약 15% 정도 작게 나타났다.

강구의 충격 후, 충격점에서  $x$ 축 방향으로 2.11mm(3.17mm),  $y$ 축 방향으로 2.11mm(3.17mm) 떨어진 지점(충격점 부근)의  $x$ 축 방향의 변형률( $\epsilon_x$ )과 응력( $\sigma_x$ )을 Fig. 10~Fig. 11에 나타내었으며,  $y$ 축 방향의 변형률( $\epsilon_y$ )과 응력( $\sigma_y$ )을 Fig.

14~Fig. 15에 나타내었다. 또한 충격점에서  $x$ 축 방향으로 44.23mm(66.34mm),  $y$ 축 방향으로 2.11mm(3.17mm) 떨어진 지점(절점 번호 4부근)

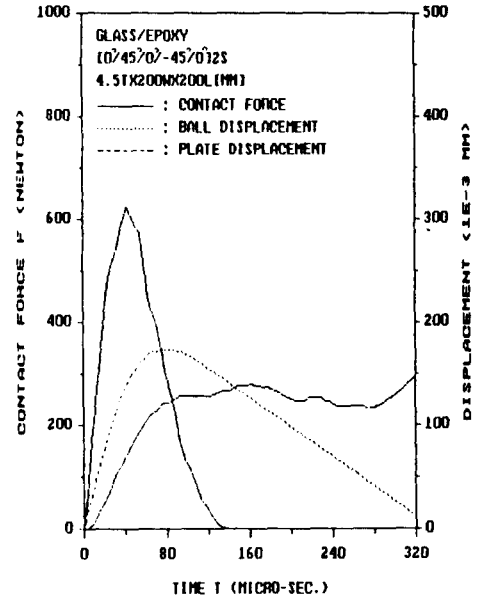


Fig. 6 Contact force and displacements for a  $[0^\circ/45^\circ/0^\circ-45^\circ/0^\circ]_{2s}$  glass/epoxy plate with 200mm length subjected to impact

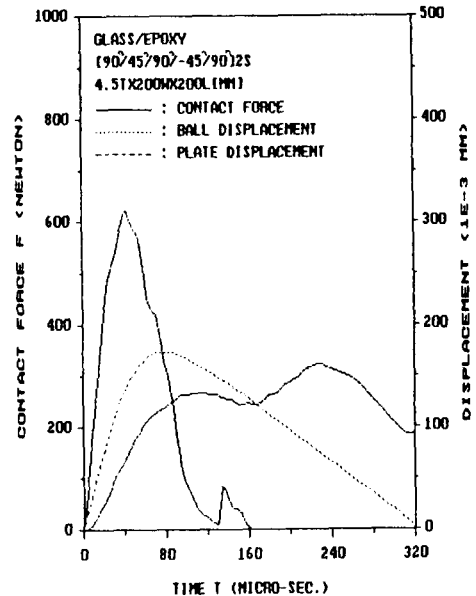


Fig. 7 Contact force and displacements for a  $[90^\circ/45^\circ/90^\circ-45^\circ/90^\circ]_{2s}$  glass/epoxy plate with 200mm length subjected to impact



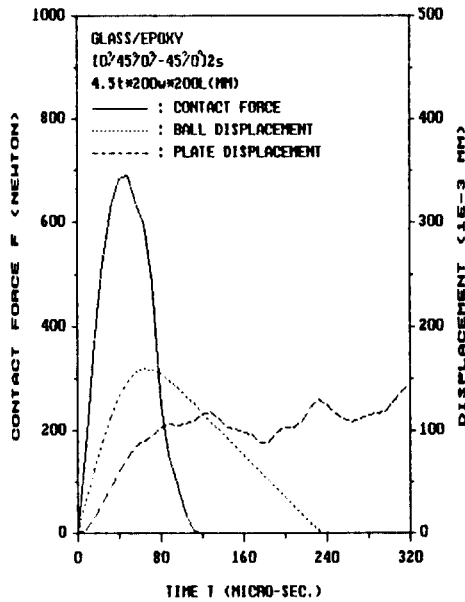


Fig. 8 Contact force and displacements for a  $[0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ]_{2s}$  glass/epoxy plate with 200mm length subjected to impact (FSDT)

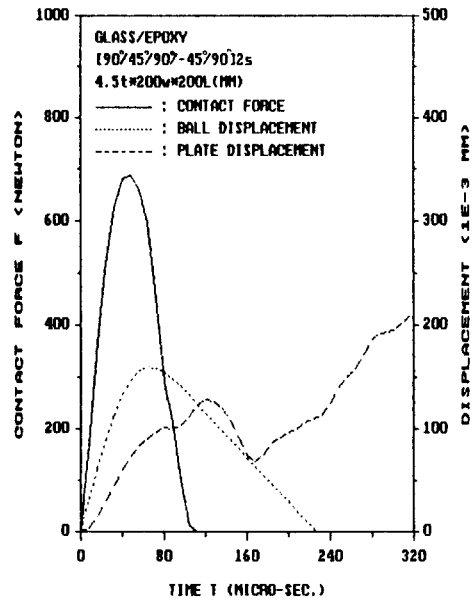


Fig. 9 Contact force and displacements for a  $[90^\circ/45^\circ/90^\circ/-45^\circ/90^\circ]_{2s}$  glass/epoxy plate with 200mm length subjected to impact (FSDT)

Table 3 Comparison of maximum contact forces

Material	Stacking sequence	Specimen dimension (mm)	Maximum contact force (Newton)	
			FSDT	HSDT
Glass/epoxy	$[0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ]_{2s}$	$4.5t \times 200\omega \times 200l$	689	623
		$4.5t \times 300\omega \times 300l$	685	622
	$[90^\circ/45^\circ/90^\circ/-45^\circ/90^\circ]_{2s}$	$4.5t \times 200\omega \times 200l$	659	617
		$4.5t \times 300\omega \times 300l$	656	612
Graphite/epoxy	$[0^\circ/45^\circ/90^\circ/-45^\circ/00^\circ]_{2s}$	$4.5t \times 200\omega \times 200l$	713	627
		$4.5t \times 300\omega \times 300l$	711	625
	$[90^\circ/45^\circ/90^\circ/-45^\circ/90^\circ]_{2s}$	$4.5t \times 200\omega \times 200l$	689	586
		$4.5t \times 300\omega \times 300l$	690	598

의  $x$ 축 방향의 변형률( $\epsilon_x$ )과 응력( $\sigma_x$ )을 Fig. 18~Fig. 19에 나타내었다. 그리고 이에 대한 FSDT와 충격실험에 의해서 구한 결과와 비교한 그림이 Fig. 12와 Fig. 13, Fig. 16과 Fig. 17, 그리고 Fig. 20과 Fig. 21에 각각 나타나 있다.

충격 실험에 의한 변형률 응답을 같이 나타낸 그

림을 살펴보면, 강구가 충돌 후 발생한 응력파가 적층 판의 경계에 도달한 뒤 반사되어 절점 번호 1과 4 부근에 도달하는 시간(120~150 $\mu$ sec.) 전에는 정성적 및 정량적으로 비교적 잘 일치함을 알 수 있으나, 이 시간 이후에는 정량적으로 많은 차이가 있음을 엿볼 수 있다. 이러한 차이의 가장 큰 이유

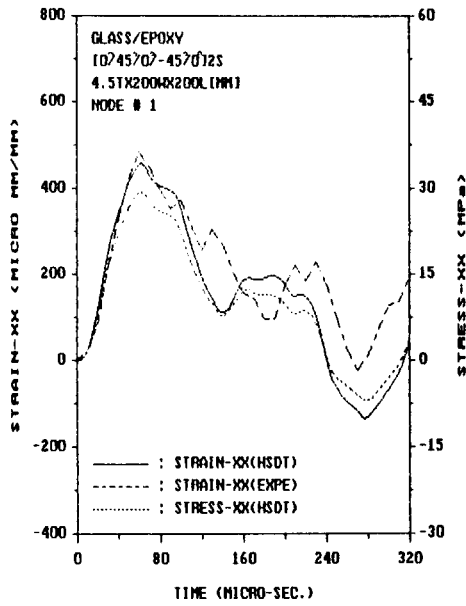


Fig. 10 Strain and stress response histories for a  $[0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ]_{2s}$  glass/epoxy plate at 2.11mm from the impact point

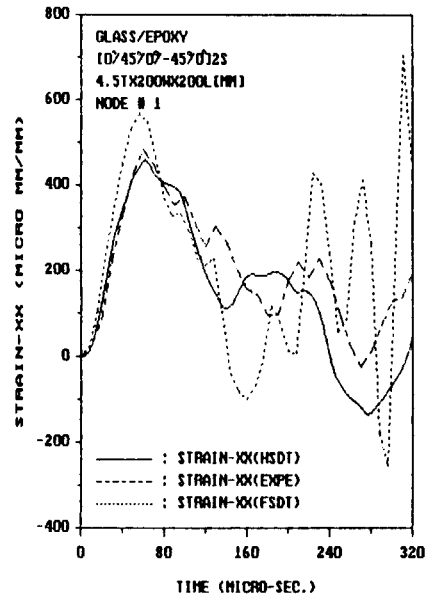


Fig. 12 Comparison of strain response histories for a  $[0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ]_{2s}$  glass/epoxy plate at 2.11mm from the impact point between HSDT and FSDT

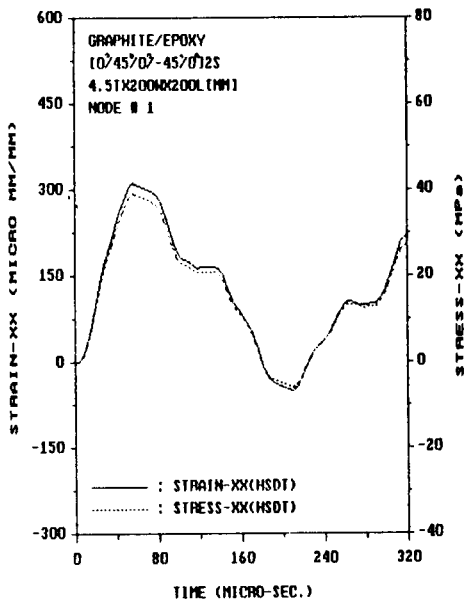


Fig. 11 Strain and stress response histories for a  $[0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ]_{2s}$  graphite/epoxy plate at 2.11mm from the impact point

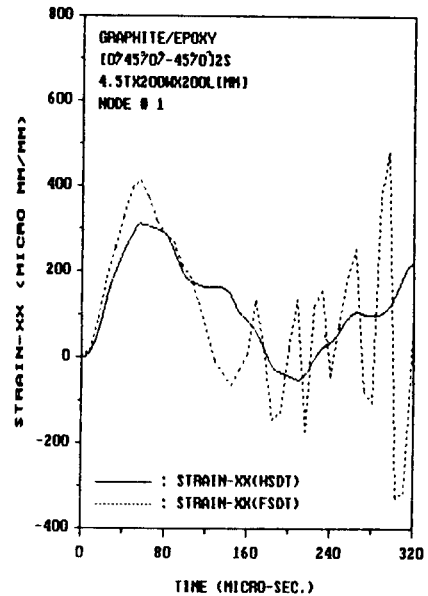


Fig. 13 Comparison of strain response histories for a  $[0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ]_{2s}$  graphite/epoxy plate at 2.11mm from the impact point between HSDT and FSDT

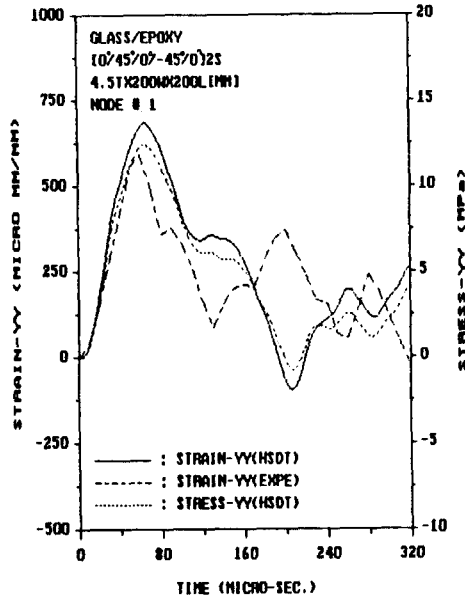


Fig. 14 Strain and stress response histories for a  $[0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ]_{2s}$  glass/epoxy plate at 2.11mm from the impact point

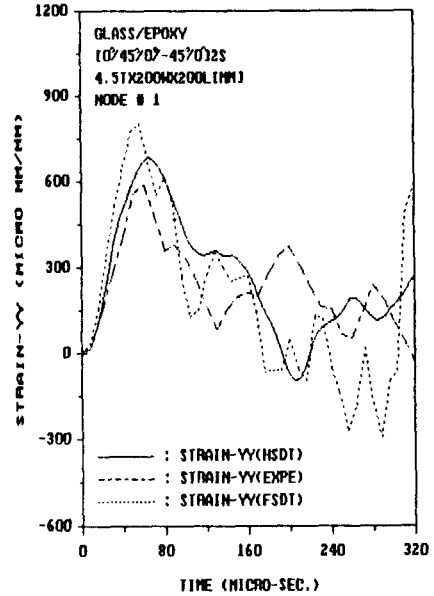


Fig. 16 Comparison of strain response histories for a  $[0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ]_{2s}$  glass/epoxy plate at 2.11mm from the impact point between HSDT and FSDT

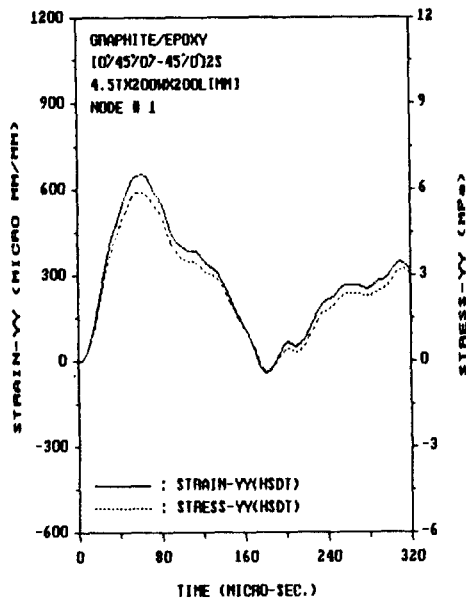


Fig. 15 Strain and stress response histories for a  $[0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ]_{2s}$  graphite/epoxy plate at 2.11mm from the impact point

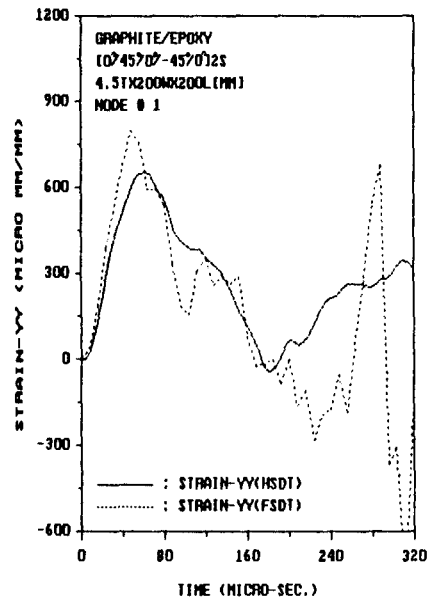


Fig. 17 Comparison of strain response histories for a  $[0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ]_{2s}$  graphite/epoxy plate at 2.11mm from the impact point between HSDT and FSDT

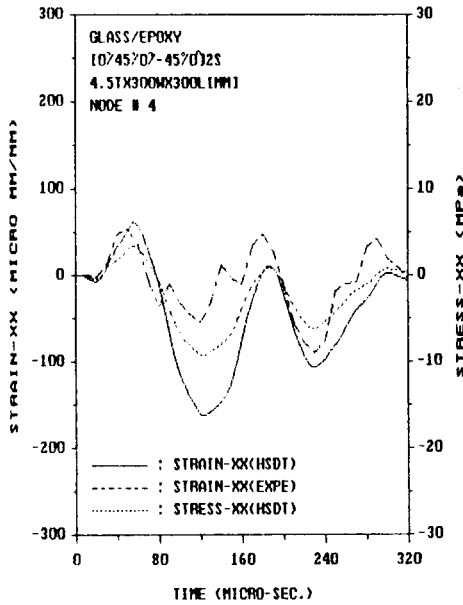


Fig. 18 Strain and stress response histories for a  $[0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ]_{2s}$  glass/epoxy plate at 2.11mm from the impact point

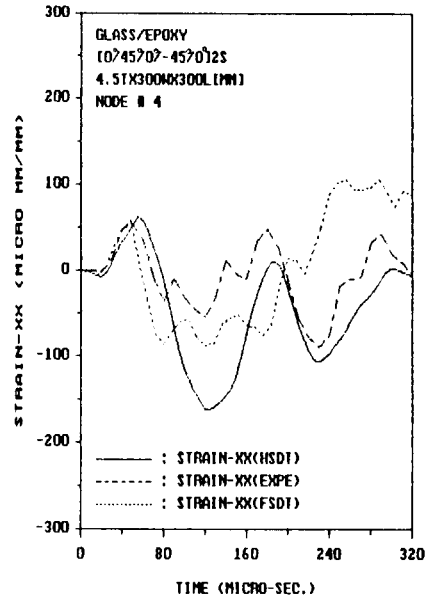


Fig. 20 Comparison of strain response histories for a  $[0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ]_{2s}$  glass/epoxy plate at 2.11mm from the impact point between HSDT and FSDT

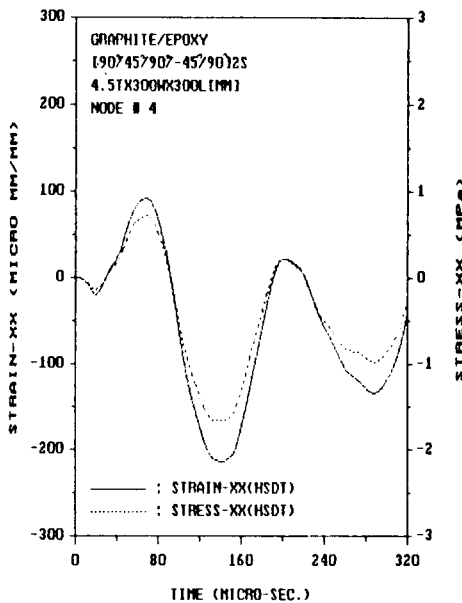


Fig. 19 Strain and stress response histories for a  $[0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ]_{2s}$  graphite/epoxy plate at 2.11mm from the impact point

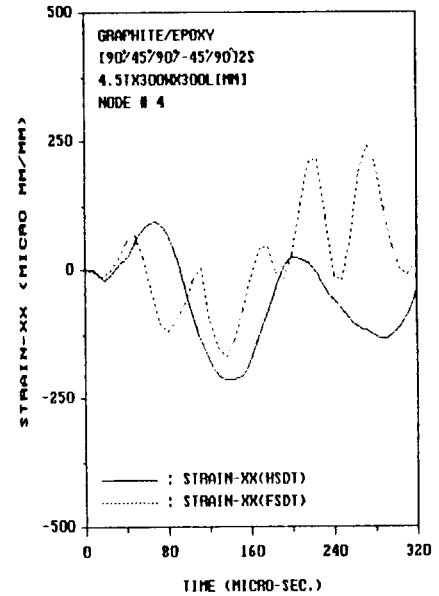


Fig. 21 Comparison of strain response histories for a  $[0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ]_{2s}$  graphite/epoxy plate at 2.11mm from the impact point between HSDT and FSDT

Table 4 Comparison of maximum strains and maximum stresses ( $\epsilon$  in  $10^{-6}$ mm/mm and  $\sigma$  in MPa)

Material	Specimen dimension (mm)	Stacking sequence	At 2.11mm (3.17mm) from impact point				At 44.23mm (66.34mm) from impact point	
			$\epsilon_x$	$\sigma_x$	$\epsilon_y$	$\sigma_y$	$\epsilon_x$	$\sigma_x$
Glass/epoxy	4.5t × 200ω × 200l	0°	459	29.5	684	12.5	-174	-9.62
		90°	683	12.5	462	29.7	-259	-3.81
	4.5t × 300ω × 300l	0°	337	21.6	485	8.9	-163	-9.2
		90°	469	8.7	334	21.3	-232	-3.5
Graphite/epoxy	4.5t × 200ω × 200l	0°	311	39.1	648	5.9	-113	-13.4
		90°	647	5.9	308	38.7	-214	-1.7
	4.5t × 300ω × 300l	0°	230	28.8	452	4.1	-100	-12.0
		90°	459	4.2	234	29.3	-214	-1.7

0° : [0°/45°/0°/-45°/0°]<sub>2s</sub> laminate

90° : [90°/45°/90°/-45°/90°]<sub>2s</sub> laminate

는 충격 실험시 적층판의 경계에서 충격 응력파가 완전히 반사되지 않고 분산되거나 스며드는 현상이 있기 때문으로 생각 된다<sup>(11,12)</sup>.

강구의 충돌 후 접촉 시간 내에서의 최대 충격 변형률과 최대 충격 응력을 FSDT에 의한 결과<sup>(11)</sup>와 같이 Table 4에 정리하였다. Table 4에서 충격 점 부근에서의 변형률 및 응력의 크기는 재료 및 적층 형태에 관계없이 다른 부분에 비하여 매우 큰 변형률 및 응력이 순간적으로 발생함을 알 수 있다.

그리고 [0°/45°/0°-45°/0°]<sub>2s</sub>의 적층 형태의 적층판에서 충격점으로 부터 x축 방향의 변형률( $\epsilon_x$ )은 y축 방향의 변형률( $\epsilon_y$ )보다는 작으나, 오히려 큰 충격 응력이 발생하는 것을 알 수 있고, [90°/45°/90°/-45°/90°]<sub>2s</sub>의 적층 형태에서는 x축 방향의 변형률( $\epsilon_x^{90}$ )이 y축 방향의 변형률( $\epsilon_y^{90}$ )보다 크나, 충격 응력이 작게 발생하는 현상을 볼 수 있다. 이것은 적층판이 충격을 받을 때 강성이 강한 섬유 방향으로서는 변형률이 작으나, 응력은 크게 나타남을 보여주는 것이다. 그러므로, 이러한 섬유 방향에 횡방향의 큰 변형률 변동은 충격 후의 현저한 횡방향 강성 및 강도 저하를 유발할 수 있으며, 섬유 방향의 충격 응력의 큰 변동은 섬유의 파손을 일으킬 수 있다.

그리고 Fig. 10~Fig. 21에서 보는 바와 같이 HSDT에 의한 결과가 FSDT에 의한 결과보다 전

체적인 파의 진행이 늦으며, 강구 충돌 후 200 $\mu$  sec. 이후에는 FSDT에 의한 수치 결과는 시간이 진행함에 따라 점차 큰 폭으로 진동하나, HSDT에 의한 결과는 비교적 실험값에 근접하여 수렴하는 것을 관찰할 수 있다. 따라서 판의 전단성분을 고차로 할 경우 더욱 더 정확한 충격해석에 대한 해를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 또한, 최대 변형률과 최대 응력의 크기는 FSDT에 의한 결과에 비해서 약 20% 정도작은 값을 나타내고 있으며, 복합재의 재질과 적층 형태 및 판의 크기에 따른 경향은 FSDT<sup>(11)</sup>에 의한 경향과 일치함을 알 수 있다.

## 5.2 응력파 전파 특성

판의 내단이 모두 고정된 경계 조건을 갖는 유리/에폭시 적층판에 대하여, 충격점 x축 방향으로 64.23mm(96.34mm) 떨어져 있는 절점 번호 4인 점의 변형률과 응답곡선을 나타낸 Fig. 22와 Fig. 23을 보면 하중이 가해지는 시간 0 $\mu$ sec.에서 11 $\mu$  sec.(18 $\mu$ sec.)까지는 변형률 변동이 거의 없는 시간이다. 이 시간은 속도는 빠르나, 진폭이 작은 종파(longitudinal wave 또는 in-plane wave)가 도달하는 시간으로 생각되며, 이것은 거리 64.23mm(96.34mm)를 이 시간으로 나누면 5839m/sec.(5352m/sec.)가 되어 파동 전파 이론<sup>(13,14)</sup>에 의한 종파의 전파 속도  $C_L = \sqrt{Q_{11}/\rho}$ 에서 계산한 값

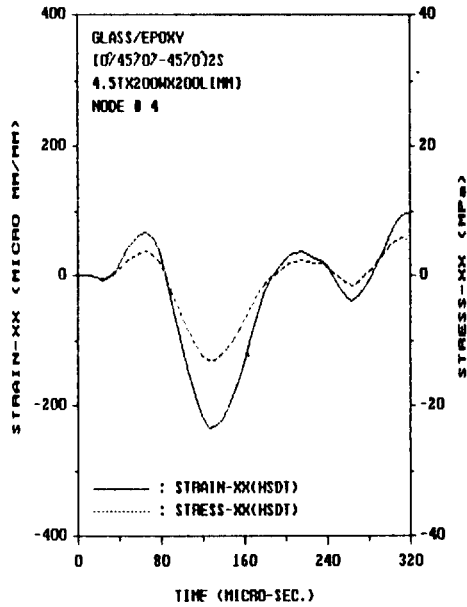


Fig. 22 Strain and stress response histories for a clamped-clamped  $[0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ]_{2s}$  glass/epoxy plate at 66.34mm from the impact point

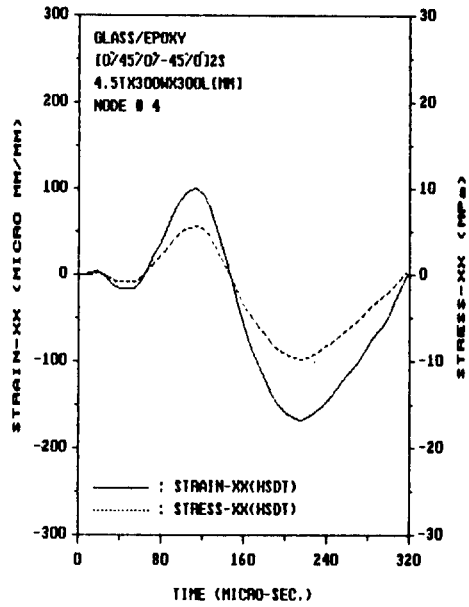


Fig. 23 Strain and stress response histories for a clamped-clamped  $[0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ]_{2s}$  glass/epoxy plate at 96.34mm from the impact point

5285.5m/sec.와 거의 비슷함을 알 수 있다. 그 후 처음으로 최대의 인장(압축) 변형률이 발생하는 시간은  $24\mu\text{sec.}$ ( $51\mu\text{sec.}$ )로써 이 시간은 속도는 낮으나, 진폭이 큰 횡파(transverse wave 또는 flexur-

al wave)가 도달하는 시간으로 여겨지며, 이의 속도는  $2676\text{m/sec.}$ ( $1889\text{m/sec.}$ )로써 파동 전파 이론에 의한 횡파의 전파 속도  $C_F = \sqrt{G_{12}/\rho}$ 에서 계산한 값  $1771\text{m/sec.}$ 와 거의 일치하고 있음을 알 수

Table 5 Comparison of wave velocities(unit : m/sec.)

Material	Wave type	Wave propagation theory	Numerical simulation			
			At 64.23mm from impact point		At 96.34mm from impact point	
			FSDT	HSDT	FSDT	HSDT
Glass/epoxy	$C_L^0$	5285.5	5200	5839	5352	4736
	$C_L^{90}$	2716.3	3844	4941	4588	3400
	$C_F^0$	1771.0	1524	2676	1889	1411
	$C_F^{90}$		1263	1690	1529	1228
Graphite/epoxy	$C_L^0$	8735.6	8751	7137	6881	9000
	$C_L^{90}$	2241.4	2222.2	5353	5352	2250
	$C_F^0$	1864.6	2222.2	3381	3108	2190
	$C_F^{90}$		1818.2	2569	1690	1956.5

Superscripts  $\begin{cases} 0 : [0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ]_{2s} \text{ laminate} \\ 90 : [90^\circ/45^\circ/90^\circ/-45^\circ/90^\circ]_{2s} \text{ laminate} \end{cases}$

Subscripts  $\begin{cases} L : \text{Longitudinal(in-plane) wave} \\ F : \text{Flexural(transverse) wave} \end{cases}$

있다.

따라서 강구가 판에 충돌한 후, 처음에 매우 작은 진폭의 종파가 도달하고 뒤이어 중간 크기의 횡파가 도달한 뒤, 연이어 가장 큰 진폭의 횡파가 도달하고 있다는 사실을 알 수 있다. 이런 관점에서 볼 때 충격 해석에서 횡파는 중요한 요소가 되며, 이 파에 의한 급격한 변형을 및 응력 변화는 층간 분리(delamination) 현상과 관계된다는 사실을 Takeda<sup>(4)</sup>의 실험적 연구에서 엿볼 수 있다.

그리고 파동 전파 이론에 의한 전파 속도와 수치 계산에서 구한 전파 속도를 Table 5에 같이 나타내었다. 여기서  $[0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ]_{2s}$  적층 형태에서의 종파 속도( $C_L$ )와 두 적층 형태에서의 횡파 속도( $C_F$ ,  $C_F^{90}$ )는 파동 전파 이론에 의한 전파 속도와 거의 일치하고 있으나,  $[90^\circ/45^\circ/90^\circ/45^\circ/90^\circ]_{2s}$  적층 형태의 종파 속도( $C_L^{90}$ )는 약 40% 정도의 차이를 나타낸다.

## 6. 결 론

본 연구에서는 적층 복합재가 강구에 의한 횡 방향 저속 충격을 받는 적층 복합판의 충격 해석을 위해 Reddy의 고차 전단 변형 이론에 기초를 두고 정적 압입 실험에 의한 접촉 법칙을 고려한 동적 유한 요소법을 개발하여 1차 전단 변형 이론(FSDT)에 의한 결과와 비교함으로써 우수성을 입증하고, 충격 실험 결과 및 파동 전파 이론과 비교 검토 하므로써 해석 결과의 타당성을 입증한 후, 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 고차 전단 변형 이론에 기초를 두고 정적 압입 실험에 의한 접촉 법칙을 고려하여 개발한 본 동적 유한 요소법은 적층 복합재의 충격 해석 및 응력과 전파 해석에 유용하며, FSDT에 의한 충격 해석보다 우수함을 확인하였다.

(2) 강구의 충돌 후 발생하는 최대 접촉력은  $[0^\circ/45^\circ/0^\circ/-45^\circ/0^\circ]_{2s}$ 와  $[90^\circ/45^\circ/90^\circ/-45^\circ/90^\circ]_{2s}$ 의 두 적층 형태의 판에서는 적층 형태 및 판의 크기에 관계없이 거의 비슷하게 나타났으며, 이는 정적 접촉 법칙에서 접촉력은 단지 재료 상수와 압입량에만 좌우되는 것과 일치한다.

(3) 충격 현상을 지배하는 파는 섬유 방향에 따라 다른 속도를 가지고 전파하는 횡파이며, 적층 복합재의 설계시 이 횡파에 의한 급격한 변형을 변화로 인한 층간 분리(delamination)현상을 고려하여야

한다.

(4) 향후 고차전단변형이론에 의한 적층복합재의 충격응력, 응력파전파, 및 충격 손상에너지 등에 관한 더욱 더 정확한 해석을 위한 이론해석 및 프로그램 개발에 관한 연구가 진행되어야 할 것으로 사료된다.

## 후 기

본 연구는 학술진흥재단의 연구비 지원을 받아 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 깊은 감사의 뜻을 표합니다.

## 참 고 문 헌

- (1) Reissner, E. and Stavsky, Y., 1961, "Bending and Stretching of Certain Types of Heterogeneous Anisotropic Elastic Plates", Journal of Applied Mechanics, Vol.28, p.402.
- (2) Whitney, J.M., 1969, "Bending-Extensional Coupling in Anisotropic Laminated Plates", Journal of Composite Materials, Vol. 3, p. 20.
- (3) Whitney, J.M. and Leissa, A.W., 1969, "Analysis of Heterogeneous Anisotropic Plates", Journal of Applied Mechanics, Vol. 36, pp. 262~266.
- (4) Ambartsumyan, S.A., 1969, "Theory of Anisotropic Plates", Technomic Publishing Co.
- (5) Pagano, N.J., 1969, "Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending", Journal of Composite Materials, Vol. 3, No. 3, pp. 398~411.
- (6) Whitney, J.M. and Pagano, N.J., 1973, "Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates", Journal of Applied Mechanics, Vol. 40, p. 299.
- (7) Fortier, R.C. and Rosstos, J.N., 1973, "On the Vibration of Shear Deformable Curved Anisotropic Composite Plates", Journal of Applied Mechanics, Vol. 40, p. 299.
- (8) Reddy, j.N., 1984, "A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates", Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, pp. 745~752.
- (9) Wilson, E.L. and Clough, R.W., 1962, "Dynamic Response by Step by Step Matrix Analysis", Symp. on Use of Computers in Civil Engineering, Lisbon.
- (10) Tan, T.M., and Sun, C.T., 1985, "Use of Static Indentation Laws in the Impact Analysis of Laminated Composite Plates", Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 52, pp. 6~12.

- (11) Ahn, K.C., 1990, "Impact Analysis of Laminated Composited Beam and Plate by Finite Element Method", Ph.D Thesis, Pusan National Univ.
- (12) Ahn, K.C. Kim, M.S. and Kim, G.N., 1989, "A Theoretical and Experimental Study on the Stress and Wave propagation in Transversely Impacted Composite Laminates", III Conference of Asian-Pacific Congress on Strength Evaluation, Yokohama, Japan.
- (13) Daniel, I.M., Liber, T. and LaBedz, R.H., 1979, "Wave Propagation in Transversely Impacted Composite Laminates", Experimental Mechanics, pp. 9 ~16.
- (14) Takeda, N., Sierakowski, R.L. and Malvern, L.E., 1981, "Wave propagation Experiments on Ballistically Impacted Composite Laminates", Journal of Composite Materials, Vol. 15, pp. 157~174.
- (15) 안국찬, 김문생, 김규남, 1988, "유한요소법에 의한 적층복합보의 충격해석", 대한기계학회논문집, 제 12권, 제4호, pp.652~661.
- (16) 안국찬, 김문생, 김규남, 1989, "저속충격을 받는 적층복합재의 응력과 전파에 관한 연구", 대한기계학회논문집, 제13권, 제1호, pp.9~19.
- (17) 김문생, 안국찬, 김규남, 1989, "보와 판 이론에 의한 보형상 복합재의 충격거동에 관한 연구", 대한기계학회논문집, 13권, 제6호, pp.643~652.