大韓機械學會論文集 第15卷 第3號, pp. 757~770, 1991.

〈論 文〉

복합적층판의 저속충격 거동에 대한 비선형 해석

최익현* · 홍창선** · 이 인**

(1990년 12월 3일 접수)

Nonlinear Analysis of Composite Laminates Subjected to Low-Velocity Impact

Ik Hyeon Choi, Chang Sun Hong and In Lee

Key Words: Low-Velocity Impact(저속충격), Composite Laminate(복합적층판), Contact Force(접촉력), Transverse Shear Deformation(횡전단 변형), Large Deflection(대처짐), Nonlinear Theory(비선형 이론)

Abstract

The nonlinear dynamic behavior of graphite/epoxy laminated composite subjected to low-velocity impact is investigated suing a finite element method. The dynamic von-Kármán plate equations considering large deflection of a plate are modified to include the effect of transverse shear deformations as in the Mindlin plate theory and also the rotary inertia effect is considered. In the finite element analysis, the Newmark's constant-acceleration time intergration algorithm is used. For an efficient and accurate iteration, Akay's skim is used. An experimentally established contact law through the statical indentation test is incorporated into the present finite element program. The impact responses such as contact force, central deflection and dynamic strain history from the nonlinear analysis are compared with those from the linear analysis. The effects of impact velocity and mass of the impactor on the responses of laminate are discussed.

기 호 설 명

$[A_{ij}], [B_{ij}], [D_{ij}] (i, j=1, 2, 6)$: 적층판의 인장, 연계, 굽힘강성행렬

$[\bar{A}_{ij}] (i, j=4, 5)$: 적층판의 횡전단강성행렬

F, F_m : 접촉력, 최대접촉력

k : 접촉법칙에서의 접촉계수

$k_i (i=4, 5)$: 판의 횡전단보정계수

$M_i, N_i (i=1, 2, 6)$: 판의 합모멘트, 합응력

P, Q, I : 판의 중립면 단위 폭에 대한 인장, 연계, 회전관성계수

$Q_i (i=1, 2)$: 판의 합횡전단응력

$[\bar{Q}_{ij}] (i, j=1, 2, 6)$: 한 층의 변환강성행렬

$u_i (i=1, 2, 3)$: x, y, z방향으로의 변위

u, v, w : 중립면에서 x, y, z방향으로의 변위

$\alpha, \alpha_o, \alpha_p, \alpha_m$: 압입량, 영구압입량, 임계압입량, 최대압입량

β : 영구압입량 관계식에서의 비례계수

$\varepsilon_i, \varepsilon_i^o, \sigma_i (i=1, 2, \cdots, 6)$: 변형도, 중립면의 변형도, 응력 성분

$k_i (i=1, 2, 6)$: 중립면의 곡률

Ψ_x, Ψ_y : x, y방향의 중립면의 굽힘 경사각

유한요소해석 관련 기호

$\{F\}$: 판 전체의 일반화된 절점하중 벡터

$[K^L], [K^N], [M]$: 판 전체의 선형강성행렬, 비선형강성행렬, 질량행렬

$U_i (i=1, 2, \ldots, 9)$: 한 요소내에서, 일반화된 변위의 절점에서의 값

* 한국과학기술원 항공공학과

** 정회원, 한국과학기술원 항공공학과

$\{\Delta\}$: 적층판 전체의 일반화된 절점변위 벡터
ζ, η : 유한요소의 기준좌표계
$\phi_i(i=1,2..,9)$: 유한요소의 보간함수

1. 서 론

복합재료를 이용한 구조물의 손상허용설계에 대한 연구는 항공우주구조물에의 응용을 생각할 때 매우 중요한 과제이다. 특히 복합적층구조물이 저속충격을 받으면 표면상으로 손상의 식별이 용이하지 않지만 구조의 뒷면에 심각할 정도의 손상을 받을 수 있다. 외부로부터 저속의 충격을 받는 복합적층판은 충격을 받은 지점에서 국부적으로 처짐이 크게 발생한다. 그러므로 충격지점에서의 처짐의 크기가 판 두께에 비해 무시될 수 없을 정도로 큰 경우에는 복합적층판의 저속충격거동을 해석하기 위해 von-Karman의 대처짐을 고려한 판이론을 사용하여 비선형해석을 해야 한다. 만일 대처짐현상을 고려하지 않으면 판의 박막(membrane)효과가 무시되어 충격하중이 과소평가되며, 적층판 내부에서 발생하는 응력이 과소평가되는 경향이 있는 것으로 알려졌다.

구조물의 충격거동해석을 위해서는 먼저 충격하중을 규명해야 하는데 등방성 재료에 대하여 Hertz[1]는 탄성체인 두 개의 구 사이의 고전적인 접촉법칙을 유도하였다. 이 때 한 쪽 구의 반지름을 무한대로 하면 구와 반무한체 사이에서 접촉법칙을 얻게 된다. 이방성 재료인 복합적층판의 충격문제 해석에도 충격하중인 접촉력 해석을 위해 등방성 물체의 정적 접촉문제에 적용할 수 있는 Hertz의 법칙을 이용한 연구[2]가 있다. 그 외 충격하중을 실험결과에 기초하여 해석하거나[3] 스프링 끝에 질량을 매단 탄성적 모델을 사용하여 충격문제를 해석한 연구[4]가 있었다.

최근 Yang와 Sun[5]은 정적인 상태에서 수행된 압입실험을 통하여 섬유강화 복합적층판에 대한 정적 접촉법칙을 개발하였다. 그 후 Tan과 Sun[6]은 Yang[5]의 접촉법칙을 유한요소법에 적용하여 충격문제를 해석한 결과, 실험치와 잘 일치하며 정적 압입실험으로 구한 정적 접촉법칙이 충격문제 해석에 유용하게 적용할 수 있음을 보였다. Sun과 Chen[7]은 초기 면내응력을 갖는 복합적층판에 대하여 충격거동문제를 선형해석하였다.

또한 국내에서는 김문생과 안국찬[8] 등이 보형상의 복합적층재료에 대하여 충격거동을 연구하였으며, 이영신과 박 웅[9]은 고차 전단변형이론을 사용하여 저속충격문제를 유한요소해석하였는데 일차 횡전단변형이론을 사용한 결과와 큰 차이를 나타내지는 않았다. 그리고 고종인과 홍창선, 이 인[10]은 저속충격을 받는 복합적층판에 대하여 충격에 의한 손상을 해석하였다.

이상의 연구결과들에서 저속충격시에 국부적으로 발생하는 대처짐현상을 고려하여 저속충격문제를 비선형해석한 결과는 찾아볼 수 없다. 그러므로 본 연구에서는 대처짐현상을 고려하여 복합적층판의 저속충격거동문제를 비선형해석하고자 한다.

충격거동문제의 해석이 아닌 일반적인 동적거동문제를 비선형해석한 예가 있는데 이를 살펴보면 Reddy[11]는 대처짐을 고려하여 복합적층판의 동적 천이거동을 비선형 해석하였으며, Sun과 Chen[12]은 초기 면내응력을 갖는 복합적층판에 대하여 비선형 천이거동해석을 수행하였다.

본 연구에서는 Reddy[11]가 개발한 유한요소모델에 Tan[6]의 접촉법칙을 적용하고 Akay[13]의 효율적인 반복수행법을 적용하여 저속충격거동문제를 비선형해석하였다.

본 연구의 목적은 저속충격을 받는 복합적층판의 거동에 대해 횡전단변형과 대처짐효과를 동시에 고려하여 비선형해석한 결과와, 횡전단변형만을 고려하여 선형해석한 결과와의 차이를 비교, 검토하여 저속충격문제의 해석에 있어서 비선형해석의 중요성을 보이는데 있다. 그리고 충격체의 질량과 속도가 충격하중과 판의 거동, 그리고 동적 변형도등에 미치는 영향을 파악하여 복합적층판의 외부 물체에 의한 저속충격문제를 이해 하고자 한다.

2. 이론 전개 및 수식화 과정

2.1 복합적층판의 대처짐이론과 구성방정식

적층판의 중립면을 x-y면이라 하고 두께 방향을 z방향이라고 하면, Mindlin[14]의 판이론에서와 같이 적층판의 변위성분을 다음과 같이 쓸 수 있다[15].

$$\begin{aligned} u_1(x,y,z,t) &= u(x,y,t)+z\Psi_x(x,y,t) \\ u_2(x,y,z,t) &= v(x,y,t)+z\Psi_y(x,y,t) \\ u_3(x,y,z,t) &= w(x,y,t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 t는 시간이고 u_1, u_2, u_3는 각각 x, y, z방향의 변위이며, u, v, w는 각 방향의 중립면의 변위이다. 또한 Ψ_x, Ψ_y는 각각 x, y축에 수직한 단면

의 회전을 의미한다.

von-Karman의 대처짐이론을 사용하여 변형도-변위 관계식을 쓰면 다음과 같다[16]

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+z\frac{\partial \Psi_x}{\partial x}\equiv\varepsilon_1^0+z\chi_1\\
\varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+z\frac{\partial \Psi_y}{\partial y}\equiv\varepsilon_2^0+z\chi_2\\
\varepsilon_6 &= \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}+z\left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial y}+\frac{\partial \Psi_y}{\partial x}\right)\\
&\equiv\varepsilon_6^0+z\chi_6 \qquad (2)\\
\varepsilon_4 &= \Psi_y+\frac{\partial w}{\partial y}\equiv\varepsilon_4^0\\
\varepsilon_5 &= \Psi_x+\frac{\partial w}{\partial x}\equiv\varepsilon_5^0
\end{aligned}$$

섬유방향의 회전각이 θ인 적층판의 k번째 층의 구성방정식은 다음과 같다[17].

$$\{\sigma_i\}_k=[\bar{Q}_{ij}]_k\{\varepsilon_j\}_k \quad (i,j=1,2,6 \text{ and } i,j=4,5) \tag{3}$$

여기서 $\bar{Q}_{ij}$는 각 층의 회전각 θ에 따라 결정되는 변환강성행렬이다[17].

식 (3)을 z방향으로 적분하거나 z를 곱하여 적분하면 적층판 전체의 구성 방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ M_i \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_j^0 \\ \chi_j \end{Bmatrix} \quad (i,j=1,2,6) \tag{4}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_1 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{A}_{44} & \bar{A}_{45} \\ \bar{A}_{45} & \bar{A}_{55} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_4^0 \\ \varepsilon_5^0 \end{Bmatrix}$$

여기서 N_i, M_i 그리고 Q_i는 각각의 방향과 연관된 합응력(resultant force), 합모멘트(resultant moment) 그리고 합횡전단응력(resultant transverse shear force)이며 아래 식과 같이 정의된다.

$$(N_i, M_i)=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(1, z)\,\sigma_i^k dz \quad (i=1,2,6) \tag{5}$$

$$(Q_2, Q_1)=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_4^k, \sigma_5^k)\,dz$$

또한 식 (4)에서 $[A_{ij}], [B_{ij}], [D_{ij}]$ 그리고 $[\bar{A}_{ij}]$는 적층판의 인장, 연계, 굽힘강성행렬 그리고 횡전단 강성행렬로서 다음과 같다.

$$([A_{ij}], [B_{ij}], [D_{ij}])=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(1, z, z^2)[\bar{Q}_{ij}]_k dz \quad (i,j=1,2,6) \tag{6}$$

$$[\bar{A}_{ij}]=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}k_i k_j[\bar{Q}_{ij}]_k dz \quad (i,j=4,5)$$

Table 1 Shear correction coefficients of laminate*

$k_4=0.864$	$k_5=0.879$

* Fiber orientation of laminate is $[0/45/0/-45/0]_{2s}$.

여기서 k_i, k_j는 횡전단보정계수로서 Whitney가 제안한 방법[18]을 사용하여 계산하였으며, 본 연구에서 적용된 적층판에 대해서 구한 결과가 Table 1에 있다.

2.2 가성일의 원리와 접촉력-압입 관계식

체적력을 무시하며 변형도가 작고 열로 손실되는 에너지가 없이 보존된다고 가정한다. Total Lagrangian식으로 변형되기 전의 상태에 기준좌표를 두어 운동방정식을 표현하면 다음 식과 된다[16].

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_6}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_5}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial \sigma_6}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_2}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_4}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (7)\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_1\frac{\partial w}{\partial x}+\sigma_6\frac{\partial w}{\partial y}+\sigma_5\right)\\
&+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_6\frac{\partial w}{\partial x}+\sigma_2\frac{\partial w}{\partial y}+\sigma_4\right)\\
&+\frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma_5\frac{\partial w}{\partial x}+\sigma_4\frac{\partial w}{\partial y}+\sigma_3\right)=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

위의 식들을 두께 방향으로 적분하여 정리하고 처음 두 식에 z를 곱하여 적분하여 정리하면 다음과 같이 u, v, w, Ψ_x, Ψ_y의 방향과 관련된 5개의 평형 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial N_6}{\partial y}=P\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+R\frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial N_6}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}=P\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+R\frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial Q_1}{\partial x}+\frac{\partial Q_2}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(N_1\frac{\partial w}{\partial x}+N_6\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\
&+\frac{\partial}{\partial y}\left(N_6\frac{\partial w}{\partial x}+N_2\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\
&+q(x,y,t)=P\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (8)\\
&\frac{\partial M_1}{\partial x}+\frac{\partial M_6}{\partial y}-Q_1=I\frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2}+R\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial M_6}{\partial x}+\frac{\partial M_2}{\partial y}-Q_2=I\frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial t^2}+R\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

여기서 $q(x,y,t)$는 평판에 수직한 방향으로 외부에서 작용되는 하중이며, P, R, I는 판의 중립면의

단위 폭에 대한 인장, 연계, 회전관성계수로서 다음과 같다.

$$(P, R, I)=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho(1, z, z^2)\,dz \tag{9}$$

유한요소방정식을 구하기 위해 식 (5)를 식 (8)에 대입하고 변분형을 취하면 다음 식과 같으며 이 식의 자세한 구성은 부록 A에 있다.

$$\int_{S_0}\{\delta\hat{u}\}^T[\hat{\rho}]\{\ddot{\hat{u}}\}dS+\int_{S_0}\{\delta\hat{\varepsilon}\}^T\{\hat{\sigma}\}dS - F\delta w_p=0 \tag{10}$$

여기서 S_0는 변형 전의 판의 면적이고, $\{\hat{u}\}$는 일반화된 변위, 즉 $\{u, v, w, \Psi_x, \Psi_y\}$이며, $[\hat{\rho}]$는 적층판의 질량행렬이다. w_p는 충격받은 지점에서의 판의 처짐량이고, F는 충격하중, 즉 적층판과 충격체 사이에서 발생하는 접촉력이며, 이것은 다음의 압입량과 접촉력에 관한 실험 관계식에서 구할 수 있다[6].

하중경로일 때

$$F=k\alpha^{1.5}$$

해중경로일 때

$$F=F_m\left(\frac{\alpha-\alpha_o}{\alpha_m-\alpha_o}\right)^q \tag{11}$$

재하중경로일 때

$$F=F_m\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{\alpha_m-\alpha_o}\right)^{1.5}$$

위와 같은 세 경로의 구성의 한 예(최대 접촉력이 1447N이고 영구압입이 0.0008cm일 때)를 Fig. 1에서 보여주고 있다. 앞의 식에서 F_m, α_m은 하중시의 최대하중과 최대압입량이며, α_o는 영구압입량인데 임계압입량 α_p와 다음의 관계를 갖는다.

$$\alpha_o=\begin{cases}\beta(\alpha_m-\alpha_p) & \text{if } \alpha_m>\alpha_p\\ 0 & \text{if } \alpha_m\le\alpha_p\end{cases} \tag{12}$$

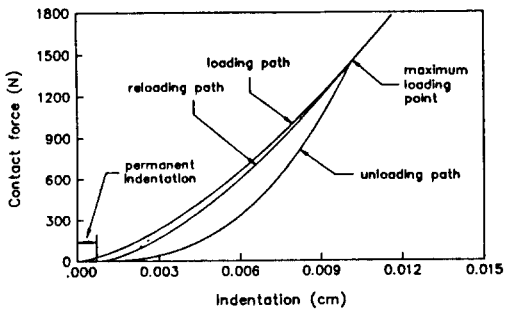


Fig. 1 A typical curve of loading, unloading and reloading path

Table 2 Indentation coefficents[6]

k (N/cm$^{1.5}$)	q	α_p (cm)	β
1.413×10^6	2.5	1.667×10^{-3}	0.094

Note : 1. Diameter of indenter is 1.27cm.
2. Fiber orientation of specimen is $[0/45/0/-45/0]_{2s}$

식 (11)과 (12)에서 k, q, β, α_p는 적층판의 적층각들(fiber orientations)이나 실험에 사용된 압입체의 기하학적 형상에 의해 결정되어지는 실험상수이며 본 연구에서 사용된 값은 Table 2에 나타내었다.

앞의 식들로부터 접촉력을 구하기 위해서는 압입량을 알아야 하는데 Fig. 2를 참고하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\alpha(t+\Delta t)=w_r(t+\Delta t)-w_p(t+\Delta t) \tag{13}$$

여기서 w_r과 w_p는 각각 충격체의 변위와 접촉지점에서의 판의 변위이고, Δt는 시간증분을 의미한다.

2.3 유한요소 방정식의 구성과 충격문제 해석 과정

본 연구에서는 9-절점 등계수(isoparametric) 사변형요소를 사용하였으며, 요소 내의 한 점의 변위는 절점에서의 변위량으로 다음과 같이 표현된다.

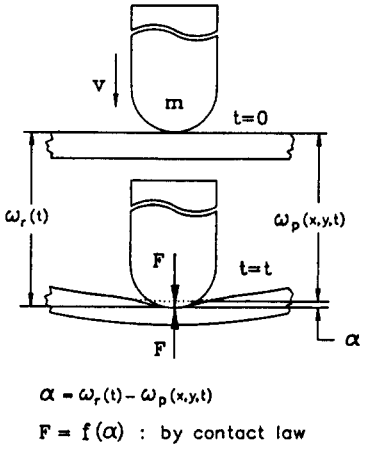


Fig. 2 Central transverse impact of a rigid body with curved contact surface on a plate

$$\{u\}=[\phi]\{\Delta\} \tag{14}$$

여기서 $[\phi]$는 보간함수(interpolation function)이며 $\{\Delta\}$는 절점변위벡터이다.

식 (10)에 식 (2)와 (14)를 대입하면 다음의 유한요소방정식을 얻을 수 있다.

$$[M]\{\ddot{\Delta}\}+[[K^L]+[K^N(\Delta)]]\{\Delta\}=\{F\} \tag{15}$$

여기서 $[M]$, $[K^L]$와 $[K^N(\Delta)]$는 각각 적층판의 질량행렬, 선형강성행렬 그리고 비선형강성행렬이고, $\{F\}$는 경계 또는 충격지점에서의 하중벡터이다. 이에 대한 자세한 구성식을 부록 B에 나타내었다. 또한 이 과정에서 수치적분을 효율적으로 하고 shear locking을 피하기 위해 reduced integration method를 사용하였다[19]. 즉 굽힘에너지와 관성에너지 항들은 3×3 Gaussian 적분법칙을, 횡전단에너지 항들은 2×2 Gaussian 적분법칙을 사용하였다.

강체로 가정된 충격체의 운동방정식은 다음과 같다.

$$m_r\ddot{w}_r+F=0 \tag{16}$$

여기서 m_r은 충격체의 질량이고, $\ddot{w}_r$은 충격체의 가속도이며, F는 접촉력이다.

충격거동문제를 해석하기 위해서는 접촉법칙인 앞의 식 (11), (12), (13)과 적층판의 충격체에 대한 지배방정식인 식 (15), (16)을 동시에 풀어야 하는데, 이 과정에 대한 흐름도(flow chart)를 Fig. 3에 나타내었다.

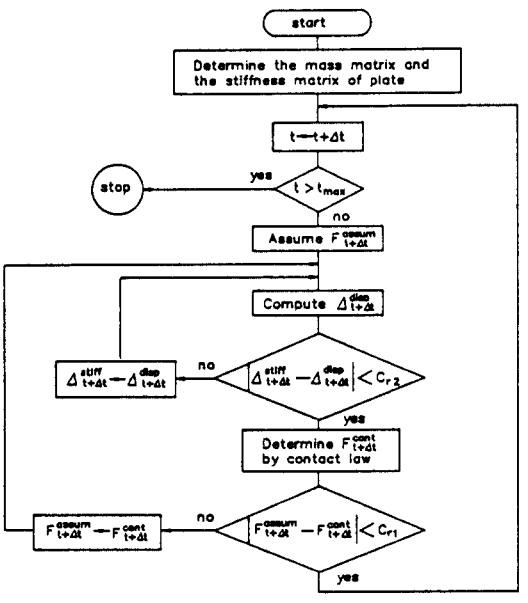


Fig. 3 Flow chart of nonlinear impact FEM program

먼저 충격하중, 즉 접촉력을 규명해야 하므로 일단 충격하중을 가정하는데, 처음에는 충격체에 대한 적층판의 반력이 없이 압입이 된다고 생각하고 그 압입량을 기준으로 접촉법칙으로부터 충격하중을 계산한다. 그리고 다시 그 하중을 가지고 적층판과 충격체의 변위를 계산하여 새로운 압입량을 계산하고, 접촉법칙으로부터 그 압입량에 대한 충격하중을 다시 계산하고, 이로부터 다시 적층판과 충격체의 변위를 계산하여 압입량을 계산하는 식의 반복수행 과정을 실시한다. 이 때 본 연구에서는 사용된 반복수행을 종료하기 위한 기준식은 다음과 같다.

$$\text{절대값}\left(\frac{F_{\text{assum}}-F_{\text{cont}}}{F_{\text{assum}}}\right)<C_{r1} \tag{17}$$

여기서 F_{assum}, F_{cont}는 각각 가정된 접촉력과 그로부터 계산된 압입량에 의해 압입법칙으로부터 새로 계산된 접촉력을 의미하며, C_{r1}는 이 과정에 대한 종료기준치인데 본 연구에서 적용된 크기에 대하여 3.1절에서 자세히 설명된다.

또한 동적거동문제를 해석하기 위해 Newmark의 일정가속도(constant acceleration) 시간적분법[19]을 사용하였으며, 비선형문제의 반복수행을 효율적으로 하기 위해 Akay[13]에 의해 제안된 Constant coefficient scheme을 사용하였다. 이 방법은 비선형 강성행렬 항들이 하중항의 효과(equivalent force vector)를 갖게 되며 매 반복수행시마다 강성행렬을 Gauss 소거(Gaussian elimination)하는 것을 생략할 수 있게 하여 수행시간을 상당히 단축시킬 수 있다는 장점이 있다.

본 연구에서는 $n+1$번째 비선형 반복수행에 대한 종결조건식으로

$$\frac{\sum_{i=1}^{N}(\Delta_i|^n_{\text{assum}}-\Delta_i|^{n+1}_{\text{attum}})^2}{\sum_{i=1}^{N}(\Delta_i|_{\text{comp}}-\Delta_i|^1_{\text{assum}})^2}<C_{r2} \tag{18}$$

을 사용했다. 여기서 N은 적층판 전체 요소의 일반화된 변위의 갯수이고, $\Delta_i|_{\text{comp}}$는 전단계에서 수렴된 해이며, $\Delta_i|^n_{\text{assum}}$은 새롭게 가정된 접촉력에 의해 n번째 반복수행 계산된 해이다. 그리고 C_{r2}는 이 반복수행 과정에 대한 종료기준치인데 본 연구에서 적용된 크기의 결정에 대하여 3.1절에서 자세히 설명된다.

앞에서 언급한 해석방법들을 적층판의 유한요소방정식에 적용하여 정리하면

$$([K^L]+(4/\Delta t^2)[M])\{\Delta\}^{n+1}_{t+\Delta t}=\{F\}_{t+\Delta t}$$

$$+[M]\{b\}-[K^N(\Delta)]^n_{t+\Delta t}\{\Delta\}^n_{t+\Delta t} \quad (19)$$

이며 여기서 $\{b\}$는 다음과 같다.

$$\{b\}=(4/\Delta t^2)\{\Delta\}_t+(4/\Delta t)\{\dot{\Delta}\}_t+\{\ddot{\Delta}\}_t \quad (20)$$

또한 강체로 가정된 충격의 지배방정식을 풀기 위해, Newmark의 일정가속도 시간적분법과 같은 개념을 적용하여 단위 시간증분내에서는 일정한 평균치의 가속도를 갖는다고 가정하여 다음과 같이 해석하였다.

$$\ddot{w}_r|_{t,t+\Delta t}=(F_t+F_{t+\Delta t})/2m \quad (21)$$

$$w_r|_{t+\Delta t}=w_r|_t+\dot{w}|_t\cdot\Delta t+\ddot{w}_r|_{t,t+\Delta t}\cdot(\Delta t)^2/2$$

여기서 $\ddot{w}_r|_{t,t+\Delta t}$는 시간 t와 $t+\Delta t$사이에서 충격체의 평균가속도를 의미한다.

2.4 본 연구의 충격문제 설정

본 연구에서 고려된 복합적층판은 크기가 15 cm×10cm×0.27cm인 Graphite/Epoxy 적층판이다. 적층순서는 $[0/45/0-45/0]_{2s}$이고 한 층의 물성치는 Table 3에 있다. 충격체는 끝단형상이 지름이 1.27cm인 반구형상의 물체이며 평판에 수직한 방향으로 평판의 중심점에 충격을 가한다. 이때 판의 경계조건은 4면 모두 자유경계인 경우, 단순지지인 경우 그리고 고정지지인 경우에 대해 해석한다.

Table 3 Material properties of lamina

$E_1=120.0$ GPa	$\nu_{12}=0.30$
$E_2=7.9$ GPa	
$G_{12}=G_{13}=5.5$ GPa	
$G_{23}=2.63$ GPa	$\rho=1.58$g/cm^3

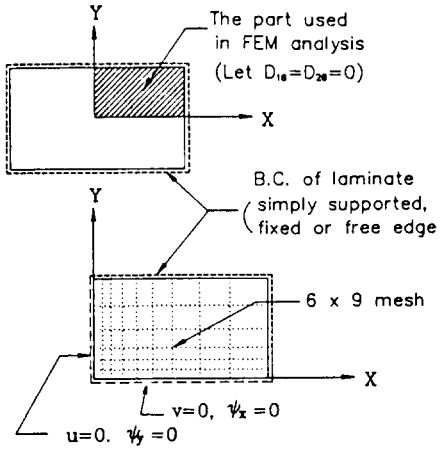


Fig. 4 Boundary condition of laminate and mesh used in present FEM analysis

본 연구에서는 충격하중의 계산을 위해 적층판의 중심에서의 처짐값을 정확하게 계산해야 되는데, 적용된 적층판의 경계조건은 x, y 두 방향에 대하여 대칭이다. 그러므로 그림 4에서와 같이 적층판의 굽힘강성행렬의 D_{16}와 D_{26}값을 0으로 놓고 전체 판의 1/4만 해석할 수 있는데 이에 대한 자세한 설명이 3.1절에 있다. 본 연구에서는 적층판의 1/4에 대하여 유한요소 mesh를 2×3, 4×6, 6×9, 8×12 요소로 나누어 해석하고 시간증분의 크기도 10, 5, 2.5, 1μsec로 나누어 해석하여 수렴성을 검토해 보았다.

3. 계산 결과 및 고찰

3.1 개발된 유한요소해석 프로그램의 타당성 검사

저속충격문제를 비선형해석하는 프로그램은 동적문제에 대한 해석으로 하나의 시간증분 동안에 충격하중을 구하기 위한 반복수행과, 그 하나의 반복수행마다 비선형 문제를 해석하기 위한 반복수행이 행해지는 매우 복잡하고 긴 수행시간을 요하는 프로그램이다.

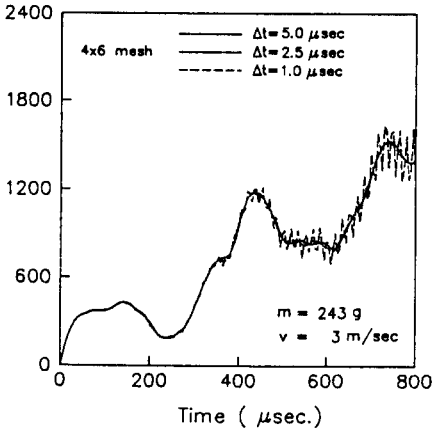
이러한 프로그램을 효율적으로 수행하기 위해서는 본 연구에서는 전체 적층판의 1/4만을 가지고 충격문제를 해석할 수 있는 방법을 다음과 같이 고안하였다. 본 연구에서 적용된 적층판의 경계조건은 x, y 두 방향에 대해 대칭이므로 전체 적층판의 중심에서의 처짐값을 해석하는 것은 $[0.45/0/-45.0]_{2s}$의 1/4적층판 두개와 $[0/-45/0/45/0]_{2s}$의 1/4적층판 두개를 해석하여 두 값의 평균 값을 구하는 것과 같게 된다. 그런데 앞의 두 적층판의 강성행렬의 구성항을 살펴보면 굽힘강성행렬에서의 D_{16}와 D_{26}항을 제외하고는 모두 그 크기가 같다는 것을 알 수 있다. 또한 D_{16}와 D_{26}항도 각각 절대값의 크기는 같고 부호만 다르다는 것을 알 수 있다. 그러므로 해석하는 적층판의 D_{16}와 D_{26}항의 값을 두 적층판에서의 각 항의 평균값인 0으로 놓고 해석하면 전체 판의 1/4만을 해석하여 전체 판 중심에서의 처짐값을 정확하게 계산할 수 있으며 이에 따라 충격하중의 해석을 훨씬 효율적으로 수행할 수 있다. 이상의 추론을 확인하기 위해서 243g의 질량과 3m/sec의 속도를 갖는 충격체에 의해 충격을

받는 경우에 대해 전체 적층판을 선형해석한 경우와 1/4만 선형해석한 경우($D_{16}=D_{26}=0$)를 비교하였다. Fig. 5를 보면 위의 방법을 사용하여 전체 판의 1/4만 해석한 결과와 전체 판을 해석한 결과가 정확하게 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

본 연구에서 구성된 프로그램을 효율적으로 수행하기 위해서는 또한 앞에서 정의한 반복수행 종료기준식에서의 종료기준치 C_{r1}과 C_{r2}를 어떻게 적절히 결정하느냐가 중요한 문제가 된다. 본 연구에서는 앞에서와 같은 충격체의 조건에 대해 해석해 본 결과, C_{r1}은 0.02%~2%의 변화에서 그 값이 클 경우에는 시간이 흐르면서 점차 진폭이 커져 발산하는 경향이 있는 것으로 밝혀졌고 C_{r2}는 10^{-9}~10^{-5}까지의 변화에서 거의 같은 결과를 가져왔다. 따라서 본 연구에서는 C_{r1}은 0.2% 그리고 C_{r2}는 10^{-7}의 적절한 값을 취하여 수행시간을 줄이면서 발산현상을 억제하도록 하였다.

본 연구에서 구성된 유한요소해석 프로그램에 대하여 여러가지 시간증분과 요소수에 따르는 수렴여부를 검사해 보았다. Fig. 6(a)는 요소수를 4×6 mesh로 하였을 때의 시간증분의 변화에 따르는 수렴결과이다. 이 그림에서 보듯이 일정한 요소수를 갖는 mesh에 대해서는 시간증분이 어떤 임계값보다 작을 경우에는 시간이 지남에 따라 점차 발산한다는 것을 알 수 있었다. 그러므로 각 요소수에 따라서 적절한 시간증분(요소수가 증가함에 따라 임계시간증분값은 감소함.)을 고려하여 Fig. 6(b)와 (c)에서 요소수에 따라는 수렴여부를 살펴보았다. 이 그림들로부터 요소수가 많을수록 접촉력과 판 중심의 처짐이 점차 수렴하고 있음을 알 수 있었다. 여기서 접촉력의 반응이 요소수가 증가할수록 늦어지고 판의 처짐량이 증가하는것은 요소수가 증가할수록 판 전체의 강성이 유연하게(flexible) 해석되기 때문이라고 생각된다.

본 연구에서는 요소수의 변화에 따르는 수렴성



(a) Effect of time increment with 4x6 mesh on convergence for contact force history

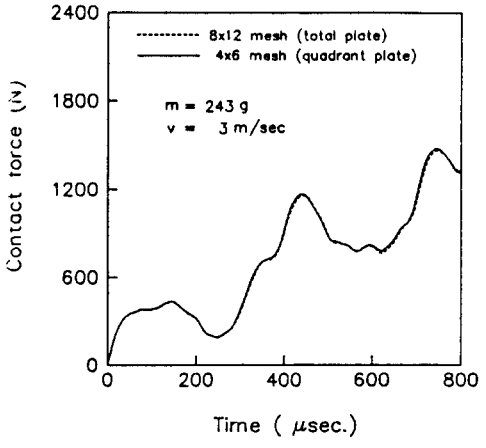
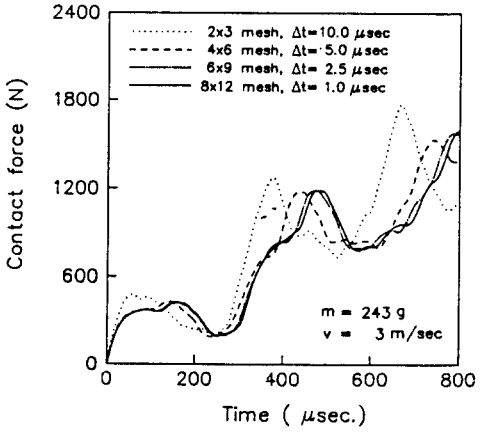
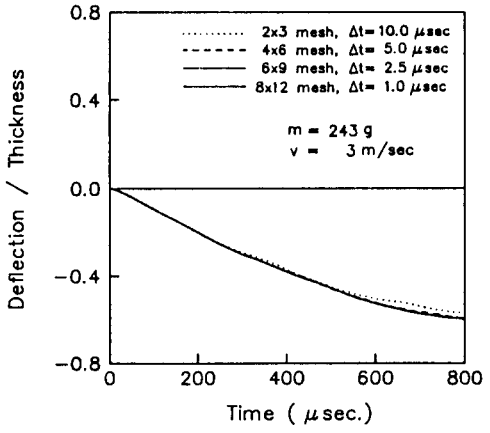


Fig. 5 Reasonable result obtained by using finite element mesh for one quadrant of laminate



(b) Effect of element mesh with proper time increment on convergence for contact force history



(c) Effect of element mesh with proper time increment on convergence for central deflection history

Fig. 6 Convergence test of present nonlinear program

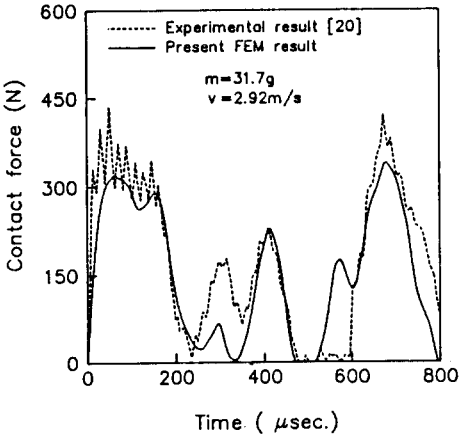


Fig. 7 Comparison of present contact force history with the experimental result

시험결과에서 어느 정도 정해에 수렴된다고 보여지며, 또한 프로그램이 수행시간을 절감할 수 있는 6×9 mesh, 2.5μsec의 조건으로 이하의 연구를 수행하였다. 먼저 Fig. 7에서는 본 연구에서 구성된 프로그램을 수행하여 얻은 해석결과와 참고문헌 (20)에서 구한 실험결과와 비교해 보았다. 이 때의 적층판의 경계조건은 4면 모두 자유경계를 갖는 경우이다. 대체로 실험결과와 일치하는 해석결과를

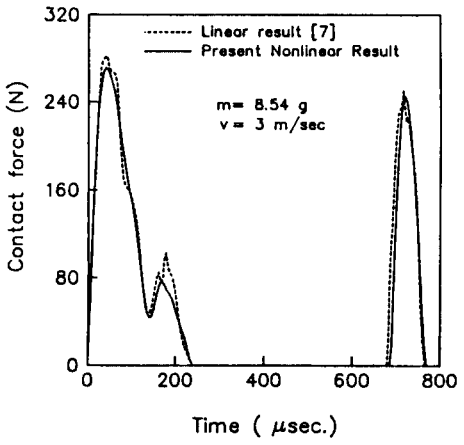
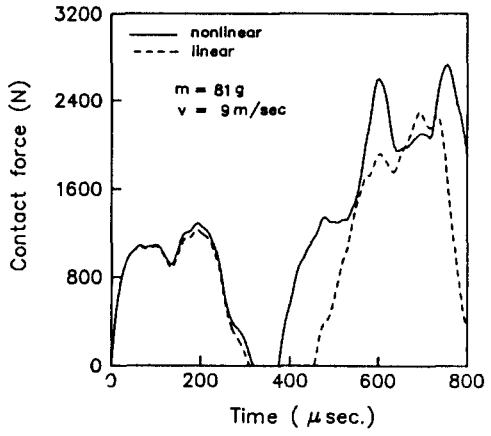


Fig. 8 Comparison of present nonlinear contact force history with the linear result

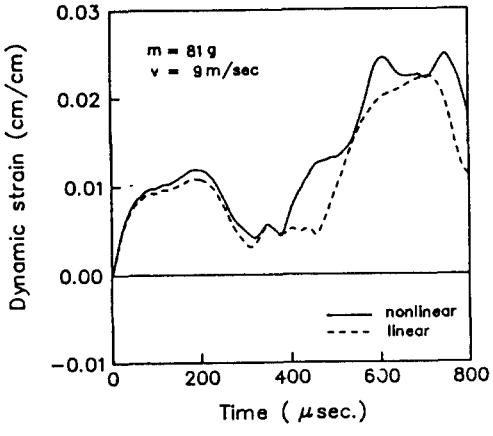
보여주고 있으며, 실험결과에서 초기에 접촉력이 변화기 심한 것은 충격체를 따라 흐르는 응력파의 영향이라고 알려졌는데[20] 본 연구에서는 충격체를 강체로 가정하여 해석하였으므로 응력파의 영향이 고려되지 않았다. 또한 Fig. 8에서는 참고문헌 (7)에서 구할 수 있는 선형해석 결과와 비교하였다. 이 경우는 적층판의 처짐이 판의 두께에 비해 매우 작아 대처짐의 효과가 크게 나타나지 않는 경우로서 본 연구에서 구성된 비선형해석 프로그램에 의한 결과와 큰 차이가 없음을 알 수 있다.

3.2 비선형해석과 선형해석의 차이

Fig. 9는 단순지지 경계를 갖는 경우에 대해 비선형해석과 선형해석의 차이를 보여주는 그림이다. Fig. 9(a)에서 첫 접촉 동안의 충격하중에는 두 해석간에 있어서 큰 차이가 없으나 비선형해석에 의한 결과가 약간 더 크게 나타나고 있음을 알 수 있다. 그것은 첫 접촉 동안에는 판의 처짐이 상대적으로 크지 않기 때문에 대처짐효과가 약하게 나타나는 것이라 생각된다. 그러나 판의 처짐이 두께의 크기 정도가 되는 두번째 접촉에서는 선형해석과 비선형해석의 결과 사이에 큰 차이를 보이고 있다. 즉 비선형해석에 의한 결과가 충격하중과 적층판의 동적변형도에 있어서 선형해석에 의한 결과보다 훨씬 더 크게 평가되고 있음을 알 수 있다. Fig. 9(b)에서 동적변형도는 6×9 mesh의 요소중 충격지점에서 가장 가까운 요소의 충격지점에서 가장



(a) Comparison of nonlinear contact force history with the linear result



(b) Comparison of nonlinear dynamic strain history with the linear result

Fig. 9 Dynamic responses of impacted plate under simply supported B.C.

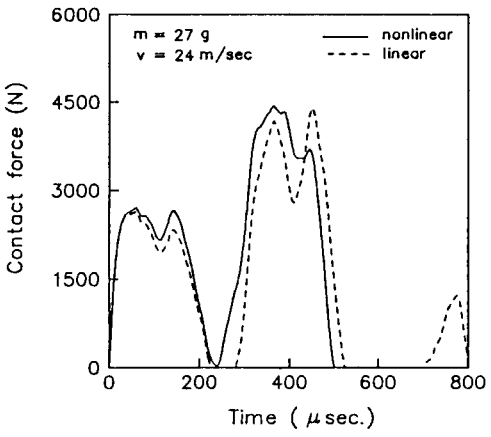
가까운 Gauss 적분점에서 구한 값인데, 충격을 받는 반대쪽 면에서의 y방향에 대한 면내 변형도 성분이다.

위의 결과에서 알 수 있는 것은 저속충격문제의 해석에 있어서 대처짐효과를 고려하지 않고 선형해석만을 수행할 경우 상대적으로 충격하중과 동적변형도 과소평가하고 이에 따라 적층판 내부에서 발생하는 응력을 과소평가하게 된다는 것이다. 그러나 본질적으로 충격문제에 있어서의 모든 반응들은 충격체와 피사체의 상호관계에 의하여 결정되어지기 때문에 앞에서 언급한 바와 같이 단순하게 모든 현상을 일률적으로 결론지을 수는 없다.

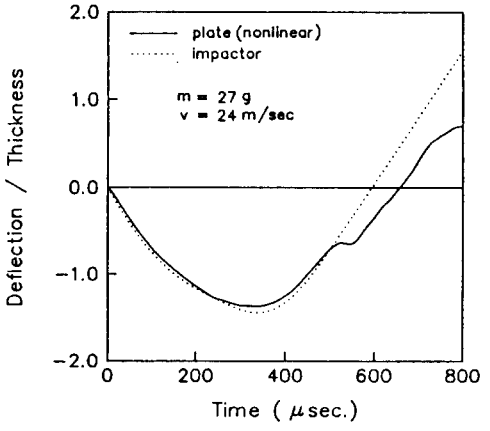
Fig. 10은 고정지지 경계조건에서의 해석 결과들이다. 먼저 Fig. 10(a)는 접촉력에 대하여 선형해석과 비선형해석간의 차이를 보여준다. 첫 접촉에서는 앞의 Fig. 9(a)에서와 비슷한 현상을 보이나 두번째 접촉 동안에는 Fig. 9(a)의 경우와는 약간 다른 결과를 보여준다. 즉 두번째 접촉의 초기에는 비선형해석 결과가 더 큰 접촉력을 보여주나 후기에는 선형해석 결과가 더 큰 접촉력을 보여주고 있다. 또한 비선형해석 결과에서는 나타나지 않는 세번째 접촉이 선형해석 결과에서는 존재한다. 이 그림에서 비선형해석을 할 경우 두번째 접촉이 발생하는 시간이 빨라지는 것은 비선형해석에서는 판의 박막효과가 고려되어 판 전체의 강성이 상대적으로 강한(stiff) 것으로 해석되고 이로 인해 판의 처짐이 전체적으로 줄어들기 때문이다. 위와 같이 충격하중이란 판의 처짐과 충격체의 변위사이에서 수시로 조정되어 결정되어지는 접촉력이므로 일률적으로 비선형해석에 의한 결과가 선형해석에 의한 결과보다 더 크다고 말할 수는 없다.

Fig. 10의 (c)와 (d)를 보면 이 그림들은 각각 비선형해석과 선형해석에 의한 결과들인데 접촉력의 결정과정에 대해 시각적으로 이해할 수 있다. 이 그림들을 보면 충격체의 변위에서 적층판 충격지점의 변위를 뺀 크기가 압입량을 의미하며 이 압입량으로부터 접촉법칙에 의해 접촉력을 계산하게 됨을 알 수 있다.

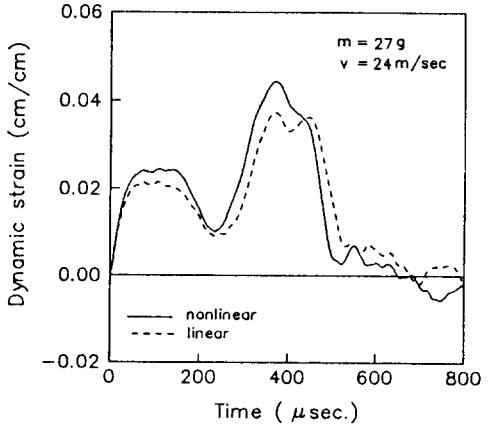
이상의 Fig. 9, 10의 결과들과 그 외의 연구결과들[21]을 살펴보면 다음과 같은 사실들을 알 수 있다. 먼저 적층판의 대처짐효과를 고려하여 저속충격문제를 비선형해석할 경우, 판의 처짐은 상대적으로 작게 해석된다. 그것은 판이 외부로부터 어떤 변형에너지를 받을 경우, 비선형해석에서는 판의 박막효과를 고려하기 때문에 박막효과로 인한 변형에너지를 뺀, 상대적으로 작은 나머지의 에너지만이 굽힘등의 기타 다른 변형으로 흡수된다고 해석하기 때문이다. 또한 비선형해석에서는 판의 강성을 선형해석에 비해 크게 평가하기 때문에 충격체와 적층판 사이에서 발생하는 충격하중과 동적변형도도 상대적으로 크게 해석된다. 물론 충격문제에서는 충격반응이 충격체와 피사체의 상호작용에 의해 결정되기 때문에 접촉주기의 후반부중에는 비선



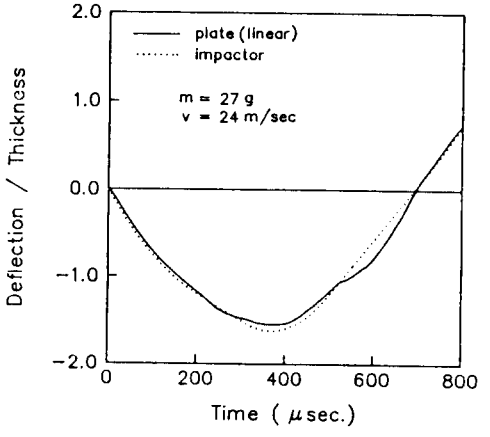
(a) Comparison of nonlinear contact force history with the linear result



(c) Central deflection of plate and movement of impactor using the nonlinear plate theory



(b) Comparison of nonlinear dynamic strain history with the linear result



(d) Central deflection of plate and movement of impactor using the linear plate theory

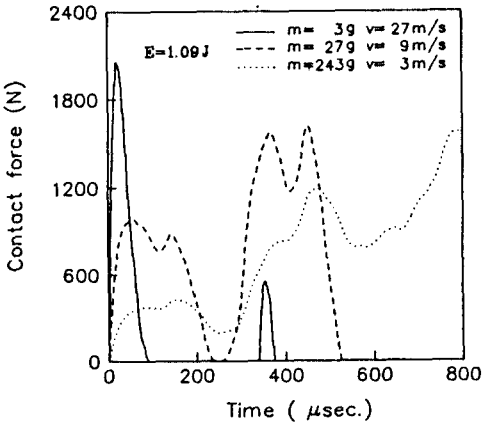
Fig. 10 Dynamic responses of impacted plate under fixed B.C.

형해석에 의한 결과가 더 작게 나타나기도 하지만 충격의 전 과정을 통해 살펴보면 앞에서와 같이 말할 수 있다.

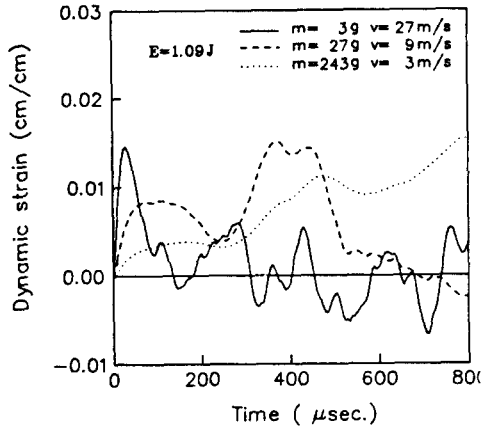
3.3 충격체의 조건이 적층판의 거동에 미치는 영향

Fig. 11~13에서는 충격체의 에너지나 질량, 속도 등의 조건이 피사체인 적층판의 거동에 미치는 영향을 살펴보았다. 이 그림들은 모두 4면 고정지지 경계조건에서 해석한 결과들로써 각각 충격체의 에너지, 질량, 속도를 일정하게 한 조건에서 다른 조건을 변화시켰을 때 나타나는 결과들을 비교해 본 그림이다.

먼저 Fig. 11(a), (b)에서는 충격체의 에너지가 같을 때 질량이 작고 속도가 빠를수록 짧은 접촉시간과 급격히 변하는 동적변형도를 볼 수 있다. 또

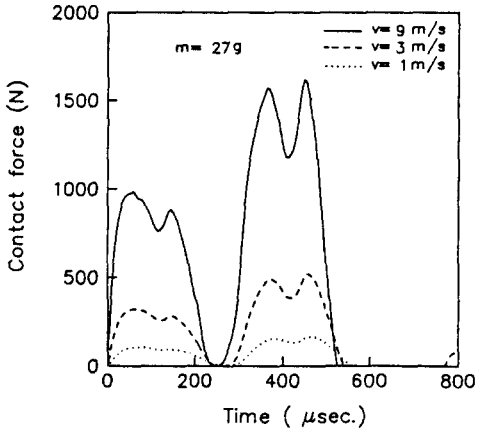


(a) Contact force history

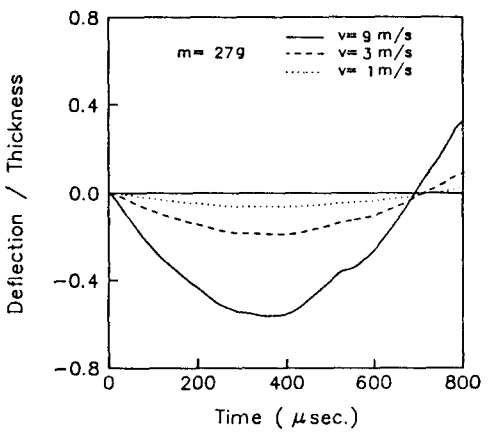


(b) Dynamic strain history

Fig. 11 Nonlinear impact responses by impactor having the same kinetic energy



(a) Contact force history



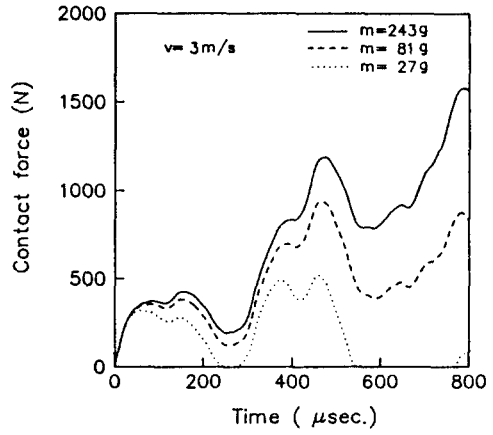
(b) Normalized central deflection history

Fig. 12 Nolinear impact responses by impactor having the same mass

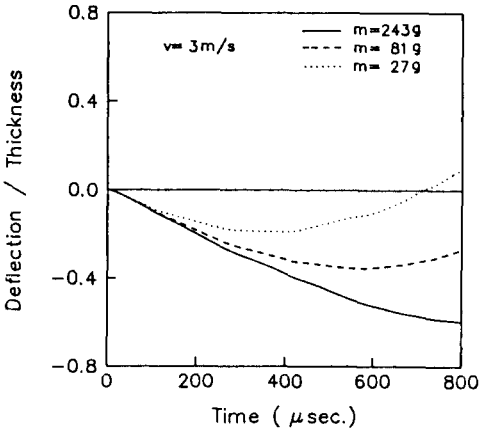
한 질량이 크고 속도가 느릴수록 최대충격하중의 발생시간이 늦어짐을 알 수 있다. 그리고 최대충격하중과 최대동적변형도의 크기는 충격체의 에너지가 같을 경우 거의 유사함을 알 수 있어, 적층판에서 발생하는 최대응력의 크기는 충격체의 에너지의 크기에 주로 영향을 받는다는 것을 알 수 있다.

Fig. 12(a), (b)에서는 충격체의 질량이 같을 경우인데, 이 경우 접촉력의 발생주기와 판의 처짐주기 충격체의 속도에 관계없이 일정함을 보여주고 있다. 이 그림을 통해 적층판의 충격 반응주기는 충격체의 질량에 따라 결정된다는 것을 알 수 있다.

Fig. 13(a), (b)에서는 충격체의 속도가 일정한 경우에 대하여 질량이 변할 때의 해석 결과들이다. 질량이 증가함에 따라 판의 처짐주기가 증가하고 접촉력이 존재하는 접촉시간과 접촉력의 크기가 증가함을 알 수 있다. 또한 접촉력이 증가하는 양상



(a) Contact force history



(b) Normalized central deflection history

Fig. 13 Nonlinear impact responses by impactor having the same velocity

에 있어서 시간에 따라 변하는 모습이 형상을 유지하면서 확대되어 가는 것은 매우 흥미로운 현상이다.

4. 결 론

앞 장에서 살펴본 바를 토대로 본 연구를 통해 다음과 같은 사실을 알 수 있었다.

(1) 대처짐을 고려하지 않고 횡전단변형만을 고려하여 적층판의 저속충격문제를 선형해석할 경우, 대처짐을 고려한 비선형해석에 비해 대체적으로 충격하중을 낮게 평가하며 동적변형도 낮게 평가하여 적층판의 내부에서 발생하는 응력을 과소평가하게 한다.

(2) 저속충격을 받는 적층판의 최대충격하중과 적층판에서 발생하는 최대동적 변형도는 대체적으로 충격체의 에너지에 의해 결정되고, 적층판의 충격에 대한 반응주기는 충격체의 질량에 의해 결정된다.

참 고 문 헌

(1) Hertz, H., 1881, "Uber die Beruhrung fester Elastischer Korper", Journal Reine Angle Math, Crelle, Vol. 92, p. 155.

(2) Greszczuk, L. B., 1982, "Damage in Composite Materials Due to Low Velocity Impact", Impact Dynamics, edited by Zukas, J. A. et al, John Wiley & Sons, New York, pp.55~94.

(3) Dobyns, A. L., 1981, "Analysis of Simply-Supported Orthotropic Plate Subjected to Static and Dynamic Loads", AIAA J., Vol. 19, pp. 642~650.

(4) Rakumar, R. L. and Chen, P. C., 1983, "Low-Velocity Impact Response of Laminated Plate", AIAA J., Vol. 21, pp. 1448~1452.

(5) Yang, S. H. and Sun, C. T., 1982, "Indentation Law for Composite Laminates", Composite Materials: Testing and Design, ASTM STP 787, American Society for Testing and Materials, pp. 425~449.

(6) Tan, T. M. and Sun, C.T., 1982, "Use of Statical Indentation Laws in the Impact Analysis of Laminated Composite Plate", J. of Applied Mechanics, Vol. 52, pp. 6~12.

(7) Sun, C. T. and Chen, J. K., 1985, "On the Impact of Initially Stressed Composite Laminates", J. of Composite Materials, Vol. 19, pp. 490~504.

(8) 김문생, 안국찬, 김규남, 1989, "보와 판이론에 의한 보형상 복합재의 충격 거동에 관한 연구", 대한기계학회논문집, 제13권, 제4호, pp. 643~652.

(9) 이영신, 박웅, 1990, "고차 전단 변형이론에 의한 복합재료 적층판의 저속 충격응답", 대한기계학회논문집, 제14권, 제6호, pp. 1365~1381.

(10) 고종인, 홍창선, 이인, 1990, "저속충격에 의한 복합적층판의 손상해석", 한국항공우주학회, 춘계학술발표회 논문초록집, pp. 35~40.

(11) Reddy, J. N., 1983, "Geometrically Nonlinear Transient Analysis of Laminated Composite Plate",

AIAA J., Vol. 21, pp. 621~624.
(12) Chen, J. K. and Sun, C., T., 1985, "Nonlinear Transient Responses of Initially Stressed Composite Plates", Computers & Structures, Vol. 21, pp. 513~520.
(13) Akay, H.U., 1980, "Dynamic Large Deflection Analysis of Plates Using Mixed Finite Elements", Computers & Structures, Vol. 11, pp. 1~11.
(14) Mindlin, R.D., 1951, "Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates", J. of Applied Mechanics, Vol. 18, pp. 31~38.
(15) Yang, P.C., Norris, C.H. and Stavsky, Y., 1966, "Elastic Wave Propagation in Heterogeneous Plates", Int. J. of Solids and Structures, Vol. 2, pp. 665~683.
(16) Fung, Y. C., 1965, Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
(17) Jones, R. M., 1975, Mechanics of Composite Materials, McGraw-Hill, New York.
(18) Whitney, J. M., 1973, "Shear Correction Factors for Orthotropic Laminates Under Static Load", J. of Applied Mechanics, Vol. 40, pp. 302~304.
(19) Huges, Thomas J. R., 1987, The Finite Element Method, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
(20) Tan, T. M. and Sun, C. T., 1982, "Wave Progagation in Graphite/Epoxy Laminates Due to Impact", NASA CR 168057.
(21) 최익현, 1989, "복합적층판의 저속충격 거동에 대한 비선형 해석", 한국과학기술원 석사학위 논문.

부 록

A. 변분형의 수식

변분형의 자세한 수식은 다음과 같다.

$$\hat{u}=\{u\ v\ w\ \Psi_x\ \Psi_y\}^T$$

$$\delta\hat{u}=\{\delta u\ \delta v\ \delta w\ \delta\Psi_x\ \delta\Psi_y\}^T$$

$$\begin{aligned}\delta\Pi=0=\int\Big(&N_1\frac{\partial\delta u}{\partial x}+N_6\frac{\partial\delta u}{\partial y}\\&+\delta u\Big(P\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+R\frac{\partial^2\Psi_x}{\partial t^2}\\&+N_6\frac{\partial\delta v}{\partial x}+N_2\frac{\partial\delta v}{\partial y}\\&+\delta v\Big(P\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+R\frac{\partial^2\Psi_y}{\partial t^2}\Big)\\&+\delta w\Big(P\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\Big)+Q_1\frac{\partial\delta w}{\partial x}+Q_2\frac{\partial\delta w}{\partial y}\\&+\frac{\partial\delta w}{\partial x}\Big(N_1\frac{\partial w}{\partial x}+N_6\frac{\partial w}{\partial y}\Big)\\&+\frac{\partial\delta w}{\partial y}\Big(N_6\frac{\partial w}{\partial x}+N_2\frac{\partial w}{\partial y}\Big)+M_1\frac{\partial\delta\Psi_x}{\partial x}\\&+M_6\frac{\varphi\delta\Psi_x}{\partial y}+\delta\Psi_x\Big(Q_1+I\frac{\partial^2\Psi_x}{\partial t^2}\\&+R\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big)\\&+M_6\frac{\partial\delta\Psi_y}{\partial x}+M_2\frac{\partial\delta\Psi_y}{\partial y}\\&+\delta\Psi_y\Big(Q_2+I\frac{\partial^2\Psi_y}{\partial t^2}\\&+R\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\Big)\Big)dxdy\\&-\int_\Omega\delta wq(x,y,t)\,dxdy\\&+\int_\tau(\delta u_n N_n+\delta u_s N_s)\,ds\\&+\int_\tau(\delta wV)\,ds+\int_\tau(\delta\Psi_n M_n+\delta\Psi_s M_s)\,ds\end{aligned}$$

여기서 V, M_n, N_s, M_n, M_s는 경계에 작용하는 힘과 모멘트로서 다음과 같다.

$$N_n=n_x n_x N_1+2n_x n_y N_6+n_y n_y N_2$$

$$N_s=n_x n_y(N_2-N_1)+(n_x n_x-n_y n_y)N_6$$

$$\begin{aligned}V=&n_x Q_1+n_y Q_2+n_x\Big(\frac{\partial w}{\partial x}N_1+\frac{\partial w}{\partial y}N_6\Big)\\&+n_y\Big(\frac{\partial w}{\partial x}N_6+\frac{\partial x}{\partial x}N_6+\frac{\partial w}{\partial y}N_2\Big)\end{aligned}$$

$$M_n=n_x n_x M_1+2n_x n_y M_6+n_y n_y M_2$$

$$M_s=n_x n_y(M_2-M_1)+(n_x n_x-n_y n_y)M_6$$

역서 $\hat{n}=(n_x, n_y)$는 경계에 수직한 단위 방향벡터이다.

B. 유한요소방정식의 행렬 구성식

유한요소방정식의 질량행렬과 선형강성행렬, 그리고 비선형강성행렬의 자세한 구성식은 다음과 같다.

$$[M]\{\ddot{U}\}+[[K^L]+[K^N(\Delta)]]\{U\}=\{F\}$$

$$[M]=\begin{bmatrix} P[S] & [0] & [0] & R[S] & [0]\\ [0] & P[S] & [0] & [0] & R[S]\\ [0] & [0] & P[S] & [0] & [0]\\ R[S] & [0] & [0] & I[S] & [0]\\ [0] & R[S] & [0] & [0] & I[S]\end{bmatrix}$$

$$\{U\}=\begin{Bmatrix}\{U\}\\ \{V\}\\ \{W\}\\ \{\Psi_x\}\\ \{\Psi_y\}\end{Bmatrix}\qquad \{F\}=\begin{Bmatrix}0\\0\\:\\F\\:\\0\end{Bmatrix}$$

$$[K^L]=\begin{bmatrix} [K_L^{11}] & [K_L^{12}] & 0 & [K_L^{14}] & [K_L^{15}] \\ [K_L^{21}] & [K_L^{22}] & 0 & [K_L^{24}] & [K_L^{25}] \\ 0 & 0 & [K_L^{33}] & [K_L^{34}] & [K_L^{35}] \\ [K_L^{41}] & [K_L^{42}] & [K_L^{43}] & [K_L^{44}] & [K_L^{45}] \\ [K_L^{51}] & [K_L^{52}] & [K_L^{53}] & [K_L^{54}] & [K_L^{55}] \end{bmatrix}$$

$$[K^N(\Delta)]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & [K_N^{13}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [K_N^{23}] & 0 & 0 \\ [K_N^{31}] & [K_N^{31}] & [K_N^{33}] & [K_N^{34}] & [K_N^{35}] \\ 0 & 0 & [K_N^{43}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [K_N^{53}] & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

먼저 선형강성행렬의 각각의 항들의 구성은 다음과 같다.

$$[K_L^{11}]=A_{11}[S^{xx}]+A_{16}([S^{xy}]+[S^{xy}]^T)+A_{66}[S^{yy}]$$

$$[K_L^{12}]=A_{12}[S^{xy}]+A_{16}[S^{xx}]+A_{66}[S^{xy}]^T+A_{26}[S^{yy}]=[K_L^{21}]^T$$

$$[K_L^{14}]=B_{11}[S^{xx}]+B_{16}([S^{xy}]+[S^{xy}]^T)+B_{66}[S^{yy}]=[K_L{}^{41}]^T$$

$$[K_L^{15}]=B_{12}[S^{xy}]+B_{16}([S^{xx}]+B_{66}[S^{xy}]^T)+B_{26}[S^{yy}]=[K_L{}^{51}]^T$$

$$[K_L^{22}]=A_{22}[S^{yy}]+A_{26}([S^{xy}]+[S^{xy}]^T)+A_{66}[S^{xx}]$$

$$[K_L^{24}]=B_{12}[S^{xy}]^T+B_{16}[S^{xx}]+B_{66}[S^{xy}]+B_{26}[S^{yy}]=[K_L{}^{42}]^T$$

$$[K_L^{25}]=B_{22}[S^{yy}]+B_{26}([S^{xy}]+[S^{xy}]^T)+B_{66}[S^{xx}]=[K_L{}^{52}]^T$$

$$[K_L^{33}]=A_{55}[S^{xx}]+A_{45}([S^{xy}]+[S^{xy}]^T)+A_{44}[S^{yy}]$$

$$[K_L^{34}]=A_{55}[S^{x0}]+A_{45}[S^{y0}]=[K_L{}^{43}]^T$$

$$[K_L^{35}]=A_{45}[S^{x0}]+A_{44}[S^{y0}]=[K_L{}^{53}]^T$$

$$[K_L^{44}]=D_{11}[S^{xx}]+D_{16}([S^{xy}]+[S^{xy}]^T)+D_{66}[S^{yy}]+A_{55}[S]$$

$$[K_L^{45}]=D_{12}[S^{xy}]+D_{16}[S^{xx}]+D_{66}[S^{xy}]+D_{26}[S^{yy}]+A_{45}[S]=[K_L{}^{54}]^T$$

$$[K_L^{55}]=D_{22}[S^{yy}]+D_{26}([S^{xy}]+[S^{xy}]^T)+D_{66}[S^{xx}]+A_{44}[S]^T$$

여기서 $S_U^{\xi\eta}(\xi,\eta=0,x,y)$의 구성은 아래식과 같다.

$$S_U^{\xi\eta}=\int_{\Omega^e}\frac{\partial\phi_i\partial\phi_j}{\partial\xi\partial\eta}dxdy,\qquad(\xi,\eta=0,x,y)$$

$$S_U^{00}=\int_{\Omega^e}\phi_i\phi_j dxdy$$

이제 비선형강성행렬의 각각의 항들의 구성은 다음과 같다.

$$[K_N^{13}]=A_{11}[R_x^{xx}]+A_{12}[R_y^{xy}]+A_{16}([R_x^{xy}]+[R_x^{xyT}+[R_y^{xx}])+A_{26}[R_y^{yy}]+A_{66}([R_y^{xy}]^T+[R_x^{xy}])=[K_N^{31}]^T/2$$

$$[K_N^{23}]=A_{12}[R_{xy}^{x}]^T+A_{22}[R_y^{yy}]+A_{26}([R_y^{xy}]^T+[R_y^{xy}+[R_x^{yy}])+A_{16}[R_x^{xx}]+A_{66}([R_x^{xy}]^T+[R_y^{xx}])=[K_N^{32}]^T/2$$

$$[K_N^{33}]_{ij}=\frac{1}{2}\int_{\Omega^e}\left[\bar{N}_1\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\frac{\partial\phi_j}{\partial x}+\bar{N}_6\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\frac{\partial\phi_j}{\partial y}+\frac{\partial\phi_i}{\partial y}\frac{\partial\phi_j}{\partial x}\right)+\bar{N}_2\frac{\partial\phi_i}{\partial y}\frac{\partial\phi_j}{\partial y}\right]dxdy$$

$$[K_N^{34}]/2=B_{11}[R_x^{xx}+B_{12}[R_y^{xy}]^T+B_{16}([R_x^{xy}]+[R_x^{xy}]^T+[R_y^{xx}])+B_{26}[R_y^{yy}]+B_{66}([R_y^{xy}]+[R_x^{yy}])=[K_N^{43}]^T$$

$$[K_N^{35}]/2=B_{12}[R_x^{xy}+B_{22}[R_y^{yy}]+B_{26}([R_y^{xy}]^T+[R_y^{xy}]+[R_x^{yy}])+B_{16}[R_x^{xx}]+B_{66}([R_x^{xy}]^T+[R_y^{xx}])=[K_N^{53}]^T$$

여기서 $[R_t^{\xi\eta}](\xi,\eta,\zeta=0,x,y)$와 $\bar{N}_1,\bar{N}_2,\bar{N}_6$의 구성은 아래 식과 같다.

$$[R_t^{\xi\eta}]_{ij}=\int_{\Omega_e}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)\frac{\partial\phi_i}{\partial\xi}\frac{\partial\phi_j}{\partial\eta}dxdy\qquad(\xi,\eta,\zeta=0,x,y)$$

$$\bar{N}_1=A_{11}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+A_{12}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+2A_{16}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\bar{N}_2=A_{12}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+A_{22}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+2A_{26}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\bar{N}_6=A_{16}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+A_{26}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+2A_{66}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}$$