

〈論 文〉

# 모드 평면을 이용한 원통형 구조물의 고유진동수 해석에 관한 연구

김정태\* · 김동혁\* · 이용봉\*\*

(1990년 11월 21일 접수)

## A Study on Natural Frequencies of Cylindrical Structures Using Modal Lattice Domain

Jeung Tae Kim, Dong Hyuk Kim and Yong Bong Lee

**Key Words :** Vibration of Shell Structure(원통형 구조의 진동), Modal Lattice Domain(모드평면), Statistical Energy Analysis(통계적 에너지 해석법)

### Abstract

Shell structures including cylinders are common mechanical elements in various vibration and noise issues. Although lots of detailed analytical tools are available for shell vibration analysis, they are too much complicated in numerical simulation. In this paper, a formula to calculate natural frequencies of a cylindrical structure is proposed. Based on the modal lattice domain, the proposed formula shows that a natural frequency is dependent on the bending rigidity and the membrane stress. An important parameter to tell the bending from membrane effect is the ring frequency whose wavelength is equal to the perimeter of the cylinder. An experimental verification is also conducted in order to examine the proposed formula. When a cylinder has its ring frequency of 14.3 kHz, the accuracy of the analysis falls within 6 percents error compared with measurement. The formula are simple to use, and could be easily extended to various boundary conditions.

### 기 호 설 명

$a$  : 원통의 반경  
 $c$  : 음속  
 $f$  : 주파수  
 $f_r$  : 원통주파수  
 $h$  : 구조물의 두께  
 $L$  : 원통의 높이  
 $p$  : 구조물에 대한 가진력

$V$  : 위치에너지  
 $\omega$  : 반경주파수  
 $\beta$  : 무차원화된 굽힘강성  
 $\nu$  : 무차원화된 주파수  
 $\mu$  : 프와송의 비

$u, v, w$  : 변위  
 $T$  : 운동에너지

### 1. 서 론

원통형 구조물은 공학에서 공통적으로 사용되는 구조물의 특성으로 인해 Rayleigh 이후 많은 연구가 진행되어 오고 있다. 특히 원통형 구조물이 많이 쓰이는 항공기의 동체, 로켓과 미사일, 선박 및

\* 정회원, 한국표준연구소 음향·진동연구실  
\*\* 한국표준연구소 음향·진동연구실

발전설비와 배관 계통 구조물 등에 있어서는 이의 진동해석에 관한 필요성으로 인해 다양한 구조물 조건에 따른 운동방정식의 해가 알려져 있고 정밀 해를 풀기 위한 수치해석기법 등에 관한 연구도 활발히 진행되고 있다<sup>(1-3)</sup>.

원통형 구조물의 운동방정식에 대한 최초의 연구는 Love에 의해 수행되었다<sup>(4)</sup>. 그는 구조물이 박막이라는 가정하에 변형과 변위 관계식을 이용하여 미분방정식(O, D.E)을 유도하였고 식이 가지고 있는 미지수  $N$ 개를 구하기 위하여는 미지수와 동일한 數의 경계조건을 이용하였으며 그결과로부터 특정방정식의 근에 해당되는 고유진동수를 구한바 있다.

Flügge는 구조물의 미소크기에 대한 힘의 균형으로부터 원통형 구조물에 대한 운동방정식을 유도하였다. 그에 의해 유도되어진 식은 원통형 구조물의 변위에 대한 8차 미분방정식으로써 변수간에 상호 연계되어 있기 때문에 일반적인 해를 구한다는 것은 실제 공학문제의 적용에 있어서 용이하지 않으며 수학적인 계산방식이 복잡한 단점이 있다<sup>(5)</sup>.

Arnold와 Warburton은 구조물 전체가 가지고 있는 변형과 운동에너지를 이용하여 원통형 구조에 대한 진동 해석 방식을 제안하였다. 이 방식은 Kirchhoff의 가설을 만족시킨다는 조건을 근거로 한다. 즉 변형전 원통의 중심 표면에 수직으로 있는 선분은 변형전과 변형후에 동일한 조건을 유지하며 원통 중심표면에 평행한 방향으로 가해지는 응력은 다른방향의 응력에 비해 미소하다는 조건하에서 원통형 구조물의 변형문제는 중심표면이 변형하는 경우로 단순화시키는 접근방식이다<sup>(6)</sup>.

Baron과 Bleich도 Arnold와 Warburton과 유사한 방법을 이용하여 무한히 긴원통형 구조물의 고유진동수와 모드 형태를 구한바 있다<sup>(7)</sup>.

위와같은 몇가지의 운동방정식에 근거하여 원통형 구조물의 진동현상을 해석하는 것은 현실적으로 다양한 형태의 구조물에 적용하기엔 어려운 점이 많이 있는 관계로 이론해에 의해서 구할 수 있는 고유치 문제는 극히 제한되어 있다. 따라서 공학에서 쓰이는 원통형 구조물의 해석에는 근사해법이 사용되고 있으며 근사해법으로는 에너지 최소화법(minimization of energy)과 수치계산법(numerical analysis)등 두가지로 크게 분리할 수 있다. 최소화법으로는 변분법(variational method), Galerkin방법 혹은 Rayleigh-Ritz 방법이 그예라

할 수 있고 수치계산법으로는 유한차분법(finite difference method)와 유한요소법(finite element method)등이 여기에 속한다.

본 연구는 원통형 구조물의 진동해석을 위하여 통계에너지 분석방식(statistical energy analysis : SEA)이 사용되었다. SEA는 4개의 물리적 변수인 구조물질량(Mi), 주파수대역에 존재하는 고유진동수(Ni), 내부손실계수(internal loss factor) 및 상호손실계수(coupling loss factor)를 이용하여 구조물의 진동수준과 구조물 상호간의 에너지 교환을 해석하는 방법<sup>(8)</sup>으로서 비록 넓은 주파수 범위에 걸쳐 정확한 진동예측을 하기에는 어느정도 오차가 예상되는 단점이 있으나 진동해석이 용이하고 복잡한 계산을 필요로 하지 않기 때문에 대형구조물의 진동해석에 많이 사용되고 있는 기법이다. 따라서 연구의 대상인 원통형 구조물의 고유진동수를 예측하기 위하여 일차적으로 반경에 의한 곡률영향을 배제시킨 평판에 대한 분석이 시도되었다. 이와함께 주어진 주파수 대역에 걸쳐 평판및 원통형 구조물의 고유진동수의 차이를 비교하였다. 그결과로부터 원통형 구조물에 대한 고유진동수 계산식을 평판구조물의 굽힘 강성과 곡률반경으로 야기되는 표면응력에 의한 함수로 표현하였다.

본 연구에서 제시한 원통형 구조물의 고유진동수 예측방법에 대한 타당성 여부를 확인하기 위하여 계산결과를 실험치 및 FEM 수치해석 결과와 비교하였고, 이론적인 해석방법이 가질 수 있는 오차를 분석 평가하였다.

## 2. 원통형 구조물의 지배방정식

두께가 균일한 원통형 구조물이 Fig. 1과 같은 좌표계를 가지고 있을때에 구조물내에서 전파되는 종파는 축방향의 운동과 원주방향의 운동으로 나누

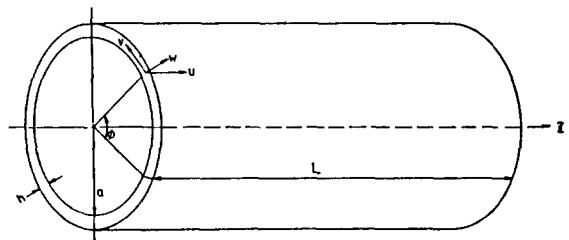


Fig. 1 Reference of a cylindrical coordinate

어진다. 대상 구조물의 크기를 두께  $h$ , 반경  $a$ 와 길이  $L$  일 때  $z$ 축을 축방향좌표,  $\phi$ 축을 원주방향을 나타내는 각 좌표,  $x$ 축을 구조물의 중앙표면에 바깥쪽으로 수직인 좌표라하고 각각의 좌표에 해당되는 중앙표면상에서의 변위를  $u, v, w$ 라 할때 구조물이 가지는 운동에너지  $T$ 와 위치에너지  $V$ 는 다음과 같이 표시될 수 있다<sup>(1)</sup>.

$$T = \frac{1}{2} \pi s h \iint_s (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dS$$

$$+ \frac{1}{2} \rho_2 \left( \frac{h^3}{12} \right) \iint_s \left[ \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial \phi} - \dot{v} \right)^2 \right] dS \quad (1)$$

$$V = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \iint_s \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \right)^2 + \frac{2\mu}{a} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \right) + \left( \frac{1-\mu}{2} \right) \left( \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] dS$$

$$+ \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \iint_s \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{1}{a^4} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} - \frac{\partial v}{\partial \phi} \right)^2 + \frac{2\mu}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} - \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) + \frac{1-\mu}{2a^2} \left( 2 \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \phi} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] dS \quad (2)$$

여기서  $E$ 는 탄성계수,  $\mu$ 는 프와송비를 가리키며  $ds$ 는 구조물의 표면에 있는 적분요소를 나타낸다. 식 (1)의 운동에너지  $T$ 중 두번째항은 회전관성력에 의한 영향을 나타내며 식 (2)의 첫번째 항은 표면응력에 의한 탄성에너지, 두번째항은 굽힘에 의한 탄성에너지를 나타낸다.

원통구조물에 수직 방향으로 외력  $p$ 가 작용할때에는 외력이 구조물에 가한 일의 양  $W$ 는

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^L p w a d\phi dz \quad (3)$$

로 표현될 수 있으며 원통형 구조물이 초기시간  $t_0$ 에서부터 최종시간  $t_1$ 에 이르기까지의 변화에 따른 영향은 Hamilton의 원리에 의해 다음의 식을 만족시켜야 한다.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt + \delta \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt = 0 \quad (4)$$

따라서 식 (1), 식 (2) 및 식 (3)을 Hamilton의 원리를 만족시키는 식 (4)에 대입하면 원통형 구조물에 대한 지배방정식을 구할수가 있게 된다.

진동을 해석코자 하는 대상구조물의 경계조건이

단순지지 (simply supported) 조건일때에는 구조물의 운동방정식의 해는 다음과 같은 식을 가정할 수 있다.

$$u = U_{mn} \sin k_m z \cos n \phi e^{i\omega t}$$

$$v = V_{mn} \cos k_m z \sin n \phi e^{i\omega t} \quad (5)$$

$$w = W_{mn} \cos k_m z \cos n \phi e^{i\omega t}$$

여기서,  $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}$  : 미정계수  
따라서 구조물에 대한 가진력  $p$ 가

$$p = p_0 \cos n \phi e^{i k_m z} \quad (6)$$

의 형태를 가진다면 변위  $u, v, w$ 의 해를 구하는 지배방정식은

$$\begin{bmatrix} k_m^2 a^2 + \frac{1}{2}(1-\mu)n^2 - \nu^2 & \frac{1}{2}(1+\mu)nk_m a \\ \frac{1}{2}(1+\mu)nk_m a & n^2 - \nu^2 + \frac{1}{2}(1-\mu)k_m^2 a^2 \\ \mu k_m a & n \\ \mu k_m a & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\nu^2}{\rho h \omega^2} p_0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

와 같이 행렬식 형태로 나타낼 수 있다.

식 (7)에서 보여진  $\nu$ 는 무차원화된 주파수를 나타내는 값으로, 각속도  $\omega$ 에 상응하는 주파수를  $f$ 라고 할때에

$$\nu = f / f_r$$

$$f_r = c / 2\pi a \quad (8)$$

여기서  $f_r$ 은 원통주파수 (ring frequency)를 나타내며 원주에 해당되는 파장을 가진 종파 (longitudinal wave)의 주파수에 해당된다.

식 (7)의 3방향의 성분중 에너지의 전달에 가장 큰 영향을 미치는 물리적인 양은 반경방향의 값인  $W_{mn}$ 이다. 따라서 임의점에서 반경 방향으로 가지는 가진력의 스펙트럼과 그곳에서의 진동 스펙트럼과의 비를 모빌리티 (mobility),  $G_r$  라고 정의하면  $G_r$ 는 다음과 같이 구할 수 있다. 즉

$$G_r = \nu / \left\{ \rho c a h \left\{ \alpha - 1 + \frac{(1-\mu^2) \left( \frac{1}{2}(1-\mu)k_m^2 a^2 - \nu^2 \right) k_m^2 a^2 + K \nu^2}{K(k_m^2 a^2 + n^2 - \nu^2)} \right\} \right\} \quad (9)$$

여기서

$$K = \frac{1}{2}(1-\mu)(k_m^2 a^2 + n^2) - \nu^2$$

$$\alpha = 1 - \nu^2 + \beta^2(k_m^2 a^2 + n^2)^2$$

로 표현된다.

이 결과로부터 모빌리티  $G$ 가 발산하는 조건을 만족시켜주는 값이 구조물의 고유진동수  $\nu_{res}$  이므로 식 (9)의 분모를 0으로 하는 조건으로부터

$$\nu_{res}^2 = (1 - \mu^2) \frac{k_m^4}{\left[ k_m^2 + \left( \frac{n}{a} \right)^2 \right]^2} + \beta^2 a^4 \left[ k_m^2 + \left( \frac{n}{a} \right)^2 \right]^2 \quad (10)$$

이며, 여기서  $\beta$ 는 구조물의 축방향에 대한 무차원화된 굽힘강성이며  $h/\sqrt{12}a$ 로 나타내지므로 원통과 동일한 두께의 굽힘강성과 같은 값을 가지게 된다.

식 (10)은 원통구조물의 고유진동수를 원통주파수  $f_r$ 로 나눈 무차원화된 것으로 오른쪽의 첫번째 항은 곡률반경을 가짐으로써 발생하는 표면응력의 영향이고 두번째 항은  $\beta^2$ 이 존재하므로 굽힘강성에 의해 영향을 받는 것을 알 수 있다. 따라서 원통형 구조를 펼쳐서 표면적이 동일한 평판으로 변환되면 두번째항만 존재하게 된다.

### 3. 모드 평면상에서의 해석

본 연구에서는 원형구조물의 고유진동수  $\nu_{res}$ 를 해석하기 위하여 SEA 기법을 적용하였다. SEA 기법은 진동 또는 소음의 해석시 고유진동수에 해당되는 모드의 수를 근거로 에너지의 크기를 정해 주는 통계적 방법으로서 모드 평면의 개념을 이용하는 방법이다.

식 (10)에서 보여진것과 같이 고유진동수는 대상 구조물의 재질과 크기가 주어지게 되면 임의의 정수  $M, N$ 을 만족시키는 위치에  $\nu_{res}$  값이 존재하게 되므로  $m$ 과  $n$ 을 나타내는 2개의 좌표축상위에 고유진동주파수를 표현하면 편리하게 된다. 이와같이

2개의 좌표에 의해서 표현되는 것을 SEA에서는 모드 평면(modal lattice domain)이라고 칭한다.

원통형 구조물에 대한 모드 평면의 해석을 하기 위하여 일차적으로 Fig. 2와 같이 반경  $a$ 와 높이  $l_1$ 의 원통구조를 펼친 평판으로 가정하여보자. 펼친 평판은 곡률 반경이 무한대이며 폭은  $2\pi a$ , 또는  $l_2$ 의 크기를 가지게 된다. 평판의 경계조건이 단순지지상태를 만족시킨다고 하면 이 평판에 대한 모드 함수  $\Psi_{mn}$ 은

$$\Psi_{mn} = A \sin k_m x_1 \sin k_n x_2 \quad (11)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서  $x_1$ 과  $x_2$ 는 평판의 수평 및 수직축 방향을 나타낸다. 이때에 주어진 경계조건을 만족시키기 위한  $k_m, k_n$ 은 다음과 같은 조건을 만족시켜야 한다.

$$k_m = M \frac{\pi}{l_1} \quad (12)$$

$$k_n = N \frac{\pi}{l_2}$$

여기서  $M, N$ 은 임의의 정수값을 보이므로  $k_m$ 과  $k_n$ 으로 이루어지는 좌표, 즉 모드 평면상에 고유진동수를 표시할 수 있다. 평판의 고유진동수 해석은 Fig. 3(a)와 같이 원주와 축 방향의 2차원 평면에 표시할 수 있다. Fig. 3(a)에서 보이는  $\times$ 표는 평판구조물이 가질 수 있는 고유진동수의 위치를 나타낸다. 이와같이 고유진동수는 모드 평면상에서 수직축으로는  $\pi/l_1$  수평축으로는  $\pi/l_2$ 의 간격을 가지고 나타나며  $l_2$ 가 원통 구조물의 둘레를 나타내므로 이를 반경의 함수로 표현하면 수평축상에서는  $1/2a$ 의 간격임을 알 수 있다.

평판구조물의 모드 평면에서는 진동파의 전달방향과 무관하게 굽힘강성은 일정하므로 굽힘파가 전파되는 주파수  $\nu_{res}$ 는

$$\nu_{res} = \beta a^2 (k_m^2 + k_n^2) \quad (13)$$

로 표현되며  $M, N$ 에 의해 결정되는 반경  $k_m^2 + k_n^2$ 의 원을 그리게 된다.

따라서 식 (13)은 원통형 구조에서 보여진 고유진동수를 나타내는 식 (10)의 오른쪽 두번째항과 관련된다. 또한 동일한 주파수 성분을 나타내는 값을 모드 평면상에 나타내면 원의 성분위에 나타나므로 주파수값이 증가할수록 원의 반경도 증가하게 된다. 이와함께 1/4 원주안에 위치하는 고유진동수  $\nu_{res}$ 의 갯수도 비례하여 증가함을 알 수 있다.

Fig. 3(b)은 폭 36.9cm, 높이 18.1cm와 두께 0.3cm의 크기를 가진 평판에 대한 동일주파수 성분을 보여주고 있다. 폭과 높이가 같지 않으므로

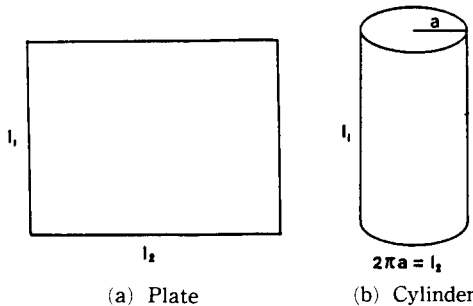


Fig. 2 Structural dimensions : flat plate versus cylinder

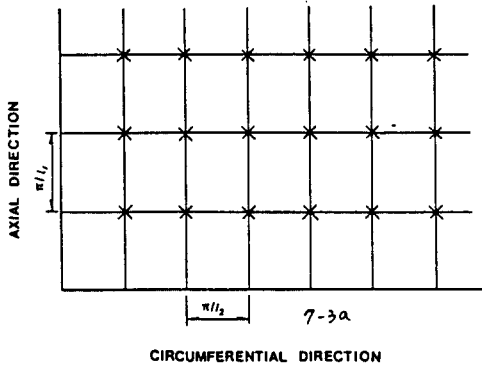


Fig. 3(a) Locations of natural frequencies on a modal lattice domain : plate case

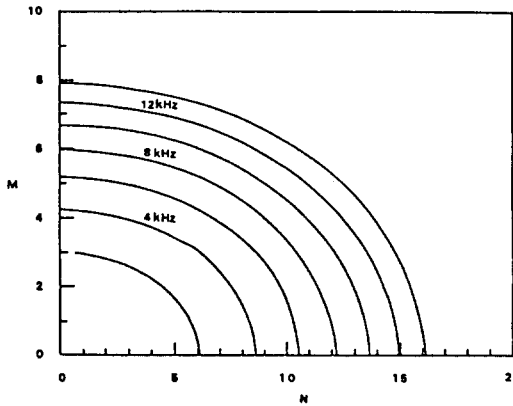


Fig. 3(b) Constant frequency loci of a plate

모우드 간격  $\pi/l_1$ ,  $\pi/l_2$ 가 각각 다른 값을 가지며 이 결과로부터 동일주파수를 나타내는 궤적은 타원형의 모양을 가지게 된다.

그림에서 맨 안쪽에 있는 곡선은 2kHz의 주파수 값을 나타내고 각각의 곡선은 2kHz씩 증가하면서 제일 바깥쪽 곡선은 14kHz를 나타낸다.

이와같이 평판구조물은 임의 방향의 굽힘파에 대한 강성과 동일한 관계로 굽힘파의 전파속도는 주파수가 주어질경우 동일한 값을 가지므로 동일 주파수를 나타내는 곡선에 왜곡이 없음을 알 수 있다.

평판구조를 수직방향의 축에 따라 대칭을 이루는 원통형 구조로 변화시키면 곡률반경에 대한 효과를 고려할 수 있다. Fig. 2(b)와 같이 원통형 구조물이 평판과 같은 경계조건을 가지고 있을때에 이에

대한 모드함수  $\Psi_{mn}$ 은

$$\Psi_{mn} = \sin k_m x_1 \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} n\phi \quad (14)$$

으로 표시될 수 있으며  $k_{mn}$ 은 다음의 식을 만족시켜야 한다.

$$k_m = M \frac{\pi}{l_1} \quad (15)$$

$$n = \frac{N}{2}$$

여기서  $M$ 은 축방향,  $N$ 은 원주방향의 파동수 (wave number)를 가리킨다. 따라서 식 (15)와 (10)을 이용하면 임의의 정수  $M$ ,  $N$ 에 해당되는 곳에 고유진동수  $\nu_{res}$ 를 구할 수 있다.

$$\nu_{res}^2 = (1 - \mu^2) \frac{\left(\frac{M\pi}{l_1}\right)^4}{\left[\left(\frac{M\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{N}{2a}\right)^2\right]^2} + \beta^2 a^4 \left[\left(\frac{M\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{N}{2a}\right)^2\right]^2 \quad (16)$$

원통형 구조물의 모드 평면상에서 보면 Fig. 4(a)에 보이는 것과 같이 됨을 알 수 있다. 원통형 구조물의 모드형태중 특기할것은 수평축, 즉 원주방향에 따른 모드의 분리이다. 원통구조물의 축방향에서의 모드간격  $\pi/l_1$ 은 Fig. 3(a)에 보여지는 것과 같은 값을 가지나 원주방향으로의 모드 분리는  $2\pi/l_2$  만큼 떨어져 있어 평판의 경우에 비해 2배의 거리를 유지하게 된다. 따라서 원통 구조물에서는 모드가 발생되는 주파수가 평판에 비해 절반으로 줄게된다. 이에 반해 각각의 모드 발생위치에서는 식 (14)에서 보여지는 것과 같이 모드 함수가 cosine과 sine의 함수로 구성되어 있는 관계로 각각의 모드발생 위치에서 2중의 모드가 중첩되어 나타나게 됨을 볼 수 있다. Fig. 4(a)는 원통형 구조물이 모드 평면상에서 가질 수 있는 고유진동수의 위치를 보여주고 있다. Fig. 4(a)의 원통구조물의 모드 평면과 Fig. 3(a)에서 본 평판의 경우를 비교해볼때에 축방향의 곡률반경에 의한 고유진동수의 존재위치를 비교할 수 있다.

이와함께 주파수 대역별로 나타날 수 있는 고유진동수 값을 알아보기 위하여 식 (16)을 이용하여 동일한 주파수 성분을 계산하여 보았다. Fig. 4(b)는 본연구에서 사용된 원통형 구조물의 동일주파수 곡선을 보여주고 있다. 내부의 동일주파수 선분은 2kHz를, 맨바깥쪽 선분은 14 kHz를 나타낸다. 이 구조물의 원통주파수  $f_r$ 은 식 (8)을 이용하면 14.3 kHz로 주어지며 Fig. 4(b)의 맨 바깥쪽 곡선위치

에 있음을 알 수 있다. 그림에서의 수평축은 원주 방향을 나타내고 있으며  $N$  값이 큰 영역에서는 원통형 구조물이 굽힘에 의한 영향만을 받으므로 평판구조물과 유사한 곡선을 그리는 반면  $N$  값이 작은 영역에서는 곡률반경으로부터 야기되는 응력으로 인해 곡선의 변화가 심한 것을 알 수 있다.

이러한 현상은 원주방향으로 진행되는 굽힘파의 경우 평판과 같은 전달속도를 가지게 되는 반면 축방향으로는 곡률반경에 의한 구조물 강성 증가로 인해 굽힘파의 전달속도가 빠르게 되므로 낮은 파동수로도 높은 주파수를 가질 수 있기 때문이다.

Fig. 4(b)에서 볼 수 있는 동일주파수 곡선은 값이 증가할수록 평판 구조물에서의 동일주파수 곡선인 Fig. 3(b)에 접근함을 볼 수 있다. 원통형 구조물의 특성에서 평판구조로의 변환은  $\nu$  값이 1.0일 때 나타나므로 원통형 구조물의 특성을 해석할 때에

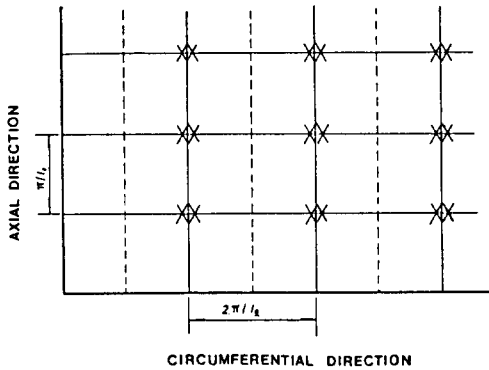


Fig. 4(a) Locations of natural frequencies on a modal lattice domain : cylinder case

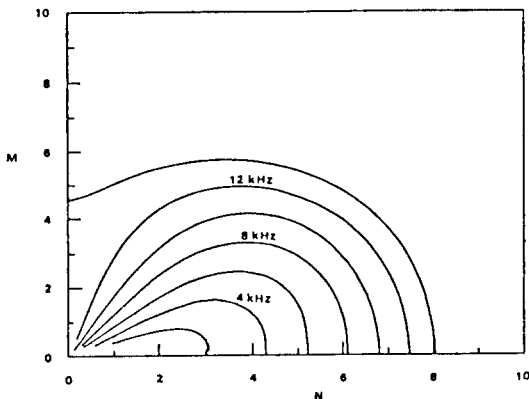


Fig. 4(b) Constant frequency loci of a cylinder

는 식 (8)을 이용하여 일차적으로  $f_r$  값을 구한 후 관심있는 주파수 대역이  $f_r$ 보다 클 때에는 원통형 구조를 동일면적을 가진 평판구조물로 해석할 수 있음을 알 수 있다<sup>(9)</sup>.

#### 4. 고유진동수의 계산

앞절에서 사용한 원통형 구조물에 대하여 모드 평면상에서 고유진동수의 값을 이론적으로 구하고 그 결과를 실험치와 비교하였다. 특히 본 연구에서 사용된 원통형 구조물의 진동해석은 소음의 분석과 연계된 관계로 고유진동수의 산출대역을 주파수 대역 2kHz에서부터 4kHz로 국한하였다.

Fig. 5는 식 (16)을 이용하여 정수  $M, N$ 을 만족시키는 고유진동수값을 보여주고 있다. 이론적인 해석으로부터 동일주파수 곡선인 2kHz와 4kHz의 내부에는 3개의 고유진동수를 가지고 있음을 볼 수 있으며 그 값은 2,600Hz ( $M=1, N=3$ ), 2,925Hz ( $M=1, N=2$ ) 및 3,769Hz ( $M=1, N=4$ )의 값을 가진다.

이와같은 이론적인 결과를 실험치와 비교하기 위하여 원통구조물의 고유진동수에 대한 실험을 실시하였다. Fig. 6은 실험의 개략도를 보여주고 있다. 신호발생기를 통해 2kHz~4kHz 주파수 대역의 랜덤신호(random signal)가 증폭기를 통하여 가진기(shaker)를 동작시킴에 따라 원통형 구조물은 진동에너지로 가지며 고유진동수를 측정하기 위하여 가진기와 원통형 구조사이에 임피던스 헤드

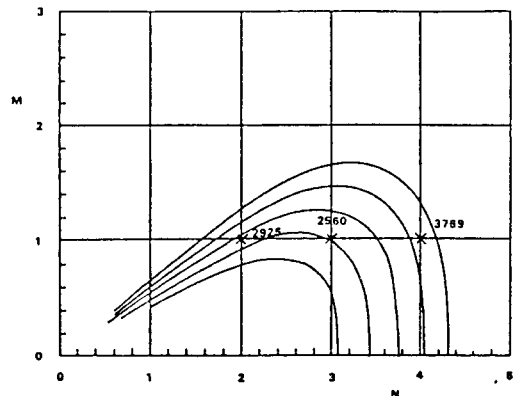


Fig. 5 Narrow band behavior of natural frequencies : Between 2 kHz and 4 kHz

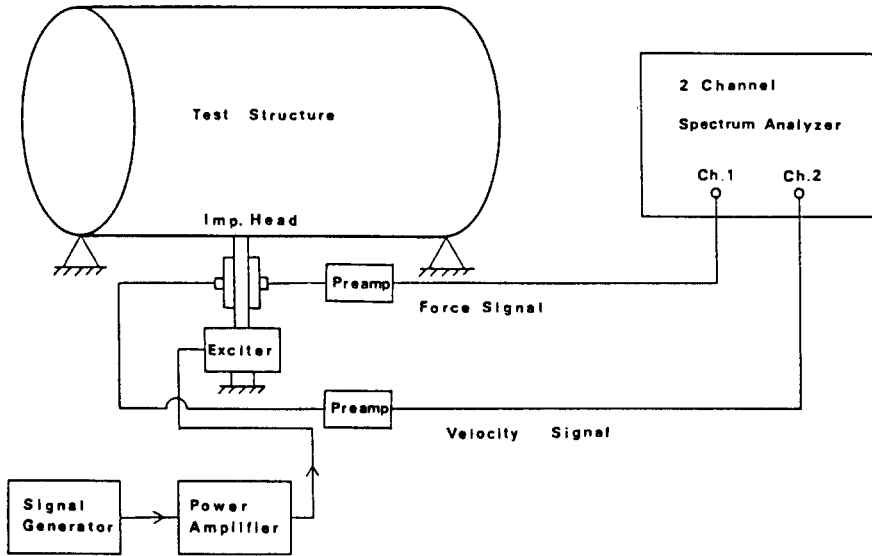


Fig. 6 Experimental set up to measure the mobility function

(impedance head)를 설치하였다. 임피던스 헤드는 2개의 질량 (seismic mass)을 가지고 있는 센서로 가진력과 가속도의 신호를 동시에 측정할 수 있다. 임피던스 헤드에서 나온 가진력에 대한 신호는 전치증폭기 (preamplifier)를 거쳐 주파수 분석기의 채널 1에, 가속도 신호는 적분기겸용의 전치증폭기를 거쳐 주파수 분석기의 채널 2로 각각 입력되었다. Fig. 7은 원통구조물의 모빌리티를 나타내고 있다. 모빌리티 함수는 속도스펙트럼을 가진 스펙

트럼으로 나눈값을 정의한 것으로 분석기를 이용하면 채널 1과 채널 2의 비로부터 계산할 수 있다. 실험치로부터 2kHz와 4kHz 사이에 3개의 고유진동수가 있음을 볼 수 있고 이와같은 실험결과를 식 (16)으로부터 구해진 이론치와 비교하여 보면 그 오차가 6% 정도 이내임을 알 수 있다.

이와같은 오차는 고유진동수값에 해당하는 파동수  $M, N$ 이 낮으므로 이에 해당되는 굵힘파의 파장은 원통구조의 크기에 비해 상대적으로 큰값을

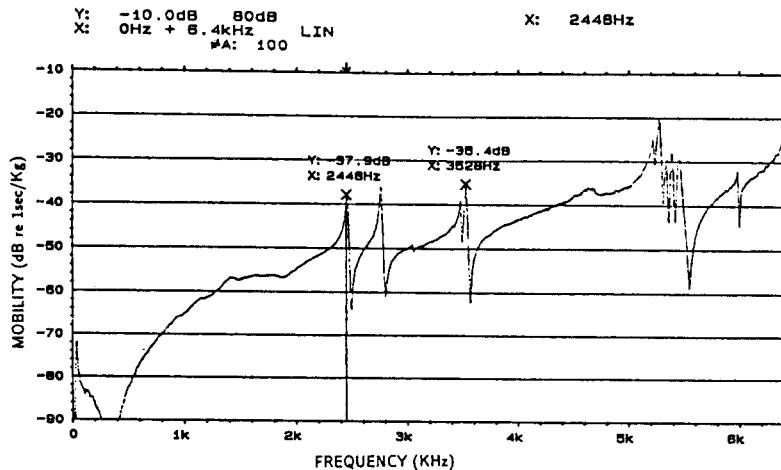


Fig. 7 Measured mobility function of a cylindrical structure

**Table 1** Comparison of natural frequencies among experimental, analytical and FEM results.

	Experiment (Hz)	Analysis		FEM	
		(Hz)	Error(%)	(Hz)	Error(%)
Mode 1	2,448	2,600	6.2	2,439	0.4
Mode 2	2,758	2,925	6.1	2,788	1.0
Mode 3	3,528	3,769	6.8	3,474	1.5

가지고 있기 때문이다. 실제로 Fig. 3(b)에 보여진 평균구조의 동일주파수 선분을 Fig. 4(b)의 원통구조의 경우와 비교해볼때 4kHz 이내의 주파수 대역에서는 동일주파수 선분이 급격히 변화되는 영역에 위치하고 있어 고유진동수의 예측값이  $M, N$ 에 민감한 것임을 알 수 있다.  $M, N$ 값이 크게 되는 고주파수 대역에서는 이에 해당되는 파장이 짧아지므로 고유진동수의 예측오차는 줄어들게 된다.

실험을 통한 고유진동수의 측정과 함께 유한요소법 (FEM)을 통한 수치해석도 시도되었다. 본 연구에서 시도된 FEM 분석은 현재 상용코드로 널리 사용되고 있는 ANSYS가 사용되었다. 원통형 구조는 100개의 자유도 (master degree of freedom)로 가정된뒤 456개의 요소로 나누어서 해석하였다. FEM을 통한 수치해석결과 얻어진 고유진동수값은 실험으로부터 구한 값과 거의 일치하였다. Table 1은 FEM을 통해 구해진 고유진동수의 값을 실험치, 이론치와 비교한 결과를 나타내고 있다. FEM을 통한 수치해석은 실험치로부터 1% 이내의 오차를 가지고 고유진동수를 예측할 수 있음을 알 수 있다. 비록 모드 평면을 이용한 고유진동수 예측이 FEM과 같이 정확한 근사해를 구할수는 없지만 수식계산이 용이한 장점을 가지고 있다.

### 5. 경계조건변화에 대한 고찰

고유진동수를 계산하는 식 (16)은 원통형 구조물이 단순지지된 조건에서 유도되었다. 그러나 실제 쓰이는 원통형 구조물의 경우 경계조건이 다양할 수 있으며 위에서 사용된 단순지지 경계조건을 원통형 구조물의 일반적인 경계조건에 확장시켜 사용할 수 있는 방법에 대해 고찰하였다.

본 연구에서는 단순지지 조건이외에 원통의 양끝면중 1면은 단순지지, 또다른 면은 고정(simple

support-clamped)과 두면 다 고정(clamped-clamped)된 경우가 고려되었다.

가령 원통의 양 끝단이 고정된 경계조건에서는 단순지지 경계조건에 비해 양쪽끝이 보강되었으므로 고유진동수의 값은 증가하리라 예측할 수 있으며 원통구조의 경계조건 변화는 각각의 모우드 원통의 끝단이 위치한 경계면의 반공진점(node) 위치변화에 영향을 주게 된다.

구조물의 맨 끝점에 위치하는데 비해 경계조건이 변화하면 반 공진점의 위치는 구조물의 내부쪽으로 이동하게 된다. 따라서 원통구조에서 경계조건 변화는 축방향의 원통높이  $l_1$ 과 관련되는 원주방향과는 무관하며 식 (14)에 보여지고 있는  $\sin(k_m x_1)$  항의 수정을 요하게 된다.

양끝단 단순지지의 경계조건일때는 특성방정식

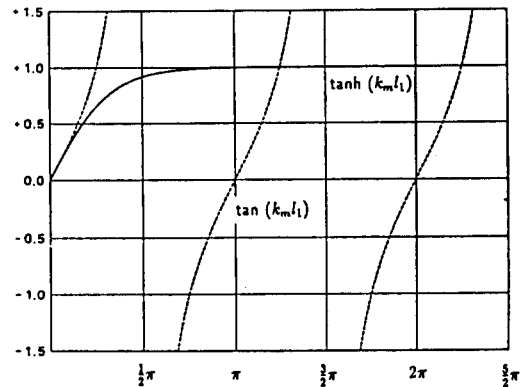


Fig. 8(a) Roots of transcendental equations for simple supported-clamped boundary condition

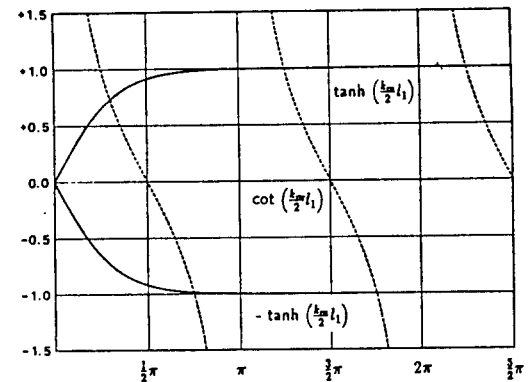


Fig. 8(b) Roots of transcendental equations for clamped-clamped boundary conditions



**Table 2** Comparison of natural frequencies among various boundary conditions. (unit : Hz)

Mode	Simple supported (both ends)	Simple supported-clamped	Clamped (both ends)
1st	2,448	2,876	3,511
2nd	2,758	3,748	4,073
3rd	3,528	3,939	5,006

이  $\sin(k_m l) = 0$ 을 만족시켜야 하므로 식 (15)로써  $k_m$ 이 표현되고 단순지지-고정인 경우에는

$$\tan(k_m l) = \tanh(k_m l) \tag{17}$$

고정-고정인 경우에는

$$\cot\left(\frac{k_m l}{2}\right) = \mp \tanh\left(\frac{k_m l}{2}\right) \tag{18}$$

이다<sup>(10)</sup>.

따라서 식 (17)과 (18)을 만족시키는  $k_m$  값은 Fig. 8에 보여진 함수곡선을 이용하여 근사해를 구할 수 있으며 이 결과로부터 단순지지-고정의 경계조건일때는

$$k_m = \left(M + \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{l_1} \tag{19}$$

고정-고정의 경계조건일때는

$$k_m = \left(M + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l_1} \tag{20}$$

임을 알 수 있다. 그러므로 단순지지-고정의 경계조건일때에는 원통형 구조의 경계조건이 단순지지인 경우에 사용되었던 식 (16)의  $M$ 값 대신에  $M + 1/4$ 이, 고정-고정의 경우에는  $M + 1/2$ 을 대입하여 원통구조의 고유진동수를 계산할 수 있다.

Table 2는 4절에서 사용된 원통과 동일한 구조에 대하여 경계조건만을 단순지지-고정과 양면고정의 경우로 바꾸었을때 구해진 고유진동수를 보여주고 있다.

양면의 단순지지 경계조건을 단순지지-고정으로 변화시키면 원통구조의 굽힘강도가 증가하므로 고유진동수 역시 증가하는 경향을 볼 수 있으며 고정-고정의 경우에는 여타 고유진동수보다 각각의 모드가 크게 변화하게 된다. 이와같은 고유진동수의 변화는 축방향의 파동수  $M$ 값이 1이기 때문에 경계조건이 바뀔때 따라 파동수가 25%, 50%가 각각 증가했기 때문이다. 원통구조의 소음특성을 고려할 때에는 파동수  $M$ 값이 1보다 큰 고주파수 영역에

위치하므로 고유진동수는 경계조건변화와 무관함을 알 수 있다.

## 6. 결 론

모드 평면을 이용하여 곡률반경을 가지고 있는 원통형 구조에 대한 고유진동수의 계산식을 유도하였다. 본 연구에서 사용된 고유진동수 산출은 원통구조의 축방향 및 원주방향의 모드 차수의 함수로써 표현되었고 고유진동수의 값은 구조물의 두께로부터 발생하는 굽힘강성과 곡률반경으로부터 야기되는 표면 인장력에 의해 영향을 받음을 알 수 있다.

원통형 구조의 경우 원통 주파수  $f_r$ 이 중요한 변수로 작용하며 관심있는 주파수 영역이  $f_r$ 과 비교하여 작은값을 가질때는 표면인장에 의한 효과를 고려하여야 한다. 이에 반해 고주파수 영역에서는 굽힘강성의 영향에 의해 고유진동수가 결정되며 원통구조의 동력학 특성은 동일한 표면적을 가진 평판 구조의 특성으로 대체할 수 있음을 볼 수 있었다.

또한 이론적으로 계산된 고유진동수 값을 확인하기 위하여 원통구조에 대한 실험치, FEM 기법에 의한 수치해석 결과와도 비교하였다. 사용된 원통은  $f_r$ 값이 14.3kHz를 가진 철재구조로 2kHz~4kHz 영역에서 실험치와 비교하여 6% 이내의 오차를 가진 결과를 얻었다.

본 연구에서 사용된 고유진동수 계산방식은 다양한 경계조건에 변화에도 적용할 수 있으며 단순지지 이외의 고유진동수값에 대한 정밀도 분석은 앞으로의 연구과제에서 다루고자 한다.

모드 평면에서 구조물의 진동특성을 예측하는 접근방법은 고유진동수의 예측과 함께 모드의 갯수나 단위 주파수 대역에 존재하는 모드의 밀도등을 산출할 수 있으므로 높은 주파수 대역의 진동특성을 요구하는 구조물의 소음현상예측 등에 응용하여 쓸 수 있을 것으로 판단된다.

## 참 고 문 헌

- (1) Junger, M.C and Feit, D., 1972, "Sound, Structure and Their Interaction", The MIT Press, Cambridge, MA.
- (2) Franken, P.A., 1960, "Input Impedances of Simple

- Cylindrical Structures”, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 32, No. 4, pp.473~477.
- (3) Leissa, A.W., “Vibration of Shells, NASA Sp-288”, Office of Technology Utilization, NASA, Washington, D.C.
- (4) Sodel, W., 1981, “Vibrations of Shells and Plates, Marcel Dekker Inc”, New York and Basel.
- (5) Flugge, W., 1967, “Stresses in Shells”, Springer-Verlag Inc, New York.
- (6) Arnold, R.N. and Warburton, G.B., 1953, “The Flexural Vibrations of Thin Cylinders”, Proc. of IME, Vol. 167, pp.62~74.
- (7) Baron, M.L. and Bleich, H.H., 1954, “Tables for Frequencies and Modes of Free Vibration of Infinitely Long Thin Cylindrical Shells”, Journal of Applied Mechanics, Tran ASME, Vol. 76, pp.178~184.
- (8) Lyon, R.H., 1986, “Machinery Noise and Diagnostics”, Butterworths, Boston.
- (9) 김정태, 김동혁, 1990, “Vibration Prediction of Cylindrical Structures Based on a Plate Analogy”, 대한기계학회 춘계학술대회 논문집, pp.294~297.
- (10) Meirovitch, L., 1967, “Analytical Methods in Vibration”, pp.161-165, Macmillan Co, New York,