

〈論 文〉

## 특이 경계 조건을 갖는 보의 동적 비선형 해석

김 정 운\* · 권 영 두\*\*

(1990년 11월 27일 접수)

### Nonlinear Analysis of Dynamics of Beams with Special Boundary Conditions

Jeong Oun Kim and Young Doo Kwon

**Key Words :** Large Displacement Dynamic Problem(대변위 동적 문제), Initial Displacement(초기 변위), Direct Integration(직접적분), Newton-Raphson Iteration Method(뉴턴-랩슨 반복법)

#### Abstract

Nonlinear finite element equations for large-displacement dynamic problems are derived by using the principle of virtual displacement. The governing equilibrium equations are presented in Total-Lagrangian description, and they are applicable to large displacement problems as well as to small deformation problems and to the problems of initial stress also. The nonlinear equilibrium equation is applied to the dynamic analysis of a beam with special boundary conditions, and also the linear analysis for the same beam has been carried out. The results of special boundary beam are compared with those of a fixed-free beam having same material property and load condition except the part inserted in boundary. Finite element solutions are obtained by Newton-Raphson iteration method and by Newmark's method. The computed results of special boundary beam with initial displacement are compared with the experiment results of special boundary beam.

#### 기 호 설 명

[ $B_L$ ] : 변위-변형률 변환 행렬  
 [ $B_{NL}$ ] : 비선형 변위-변형률 변환 행렬  
 [ $K_L$ ] : 선형 강성 계수 행렬  
 [ $K_{NL}$ ] : 비선형 강성 계수 행렬  
 [ $M$ ] : 질량 행렬  
 [ $S$ ] : 초기응력을 나타내는 제2 Piola-Kirchhoff 응력 행렬  
 $\{E\}$  : Green-Lagrange 변형률 행렬  
 [ $F$ ] : 등가 절점력 벡터  
 [ $P$ ] : 외력 벡터  
 [ $U$ ] : 전변위 벡터

$\{\dot{U}\}$  : 가속도 벡터  
 $\rho$  : 밀도  
 $R$  : 외부 가상일  
 $C_{ijrs}$  : 재료 특성 텐서  
 $\epsilon_{ij}$  : Green-Lagrange 변형률 텐서  
 $S_{ij}$  : 제2 Piola-Kirchhoff 응력 텐서

#### 1. 서 론

일반적으로 고체의 탄성변위는 선형적이지만, 탄성 대변형을 하는 고체의 변위는 대변형에 의하여 비선형성(즉 기하학적 비선형)을 나타낸다. 이러한 대변형에 의한 비선형 현상에 관하여는 Wood와 Zienkiewicz<sup>(1)</sup> 등을 비롯한 많은 학자들에 의하여

\* 정회원, 경북대학교 대학원

\*\* 정회원, 경북대학교 공과대학 기계공학과

연구가 되어져 왔다<sup>(2~4)</sup>. 특히 대변형 비선형 현상 중에서 정하중이 작용하는 좌굴 문제와 동하중이 작용하는 동적 비선형 해석 방법에 관하여 많은 결과들이 발표되었다<sup>(5~10)</sup>. 또한 초기 응력이 작용하는 경우에 있어서의 비선형 문제에 대한 해석 결과도 발표되었다<sup>(11,12)</sup>. 이러한 결과들은 대체로 경계 조건들이 단순지나, 고정된 상태에 관한 것에 국한되었다.

본 논문에서는 연속체 역학의 에너지 원리에서 출발하여, 동적 비선형 해석을 위한 유한요소 식들을 유도하고, 이를 이용하여 특이 경계조건을 갖는 고체의 대변위 동적 선형 현상과 비선형 현상에 관하여 연구하고자 한다.

대변형 현상은 비선형적이므로 정적 또는 동적인 문제의 지배 방정식들은 비선형 형태를 갖고있으며, 이를 해석하기 위하여는 주로 선형화한 증분형의 평형식들이 사용된다. 이러한 비선형 문제의 평형식 형성에는 Lagrange 방식과 Euler 방식이 있다<sup>(13)</sup>. Lagrange 방식은 초기상태를 기준으로하고, Euler 방식은 현재 시간을 기준으로 수행된다. 본 논문에서는 두방식 중 고체문제에 적용이 편리한 Lagrange 방식을 채택하였다<sup>(13,15)</sup>.

비선형 식을 선형화하여 실제 해석에 적용할 때, 계산과정에서 발생되어 누적 되는 오차를 보정하기 위하여 증분 해석과 반복 계산 과정이 필요 하게 된다.

본 논문에서는 비선형 동적인 문제에 대한 증분 해석을 하기위하여 가상변위 또는 가상일의 원리 (principle of virtual displacement or work)에 기초한 유한 요소법에 의하여 Lagrange 방법 중 Total Lagrange 방법을 이용한 증분형 동적 비선형 평형식을 유도하고, 이 평형식을 다시 Newton-Raphson 반복 방식으로 변환한 증분형 동적 비선형 반복 평형식을 유도하였다. 여기서 유도된 평형식을 사용하여서는 소변형 문제와 초기 응력이 있는 탄성체 문제 뿐만 아니라, 비선형 대변위 문제에 대한 해석이 가능하다.

고체에 동하중이 작용하는 대변위 동적 비선형 해석을 전술한 Newton-Raphson 반복법과 Newmark의 직접 적분법을 이용하여 수행하였으며, 또한 선형으로 가정한 경우와 비교하기 위하여 동적 선형 해석을 Newmark의 직접 적분법을 이용하여 수행하고, 이를 동적 비선형 해석 결과와 비교하였다.

또한 본 논문에서 유도된 증분형 동적 비선형 반복 평형식을 이용하여 특이한 경계조건을 갖는 보 (일단이 경계면에 삽입된 보)의 동적 비선형 해석을 하였으며, 이를 동적 선형 해석을 한 결과와 비교 분석하고, 또한 일단고정 및 일단자유 보의 해석 결과와도 비교하였다. 아울러 같은 경계 조건을 갖는 정적인 문제에 대하여 선형 해석과 비선형 해석 결과도 참고로 비교 분석 하였다. 그리고 특이 경계 조건보에 대한 비선형 해석 결과의 타당성을 실험을 통하여 입증하였다.

## 2. 대변위 문제에 관한 유한요소 해석

### 2.1 평형식<sup>(13~15)</sup>

일반적으로 대변위 문제는 비선형 문제로서, 이 비선형 문제를 해석하는 방법에는 Total-Lagrange 방법과 Updated-Lagrange 방법이 있다. Total-Lagrange 방법은 초기상태를 기준으로, Updated-Lagrange 방법은 직전 단계의 변형된 상태를 기준으로 수행된다. 본 논문에서는 T.L 방법으로 표시된 평형식을 이용한다.

평형식을 얻기 위하여 먼저 가상일의 원리 (principle of virtual displacement)를 사용하였다. 시간  $t + \Delta t$ 에서 물체가 평형 상태라고 생각하고, 가상일의 원리를 적용하면 다음 식 (1)을 얻을 수 있다.

$$\int_{0V} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} d^0 V = {}^{t+\Delta t} R \quad (1)$$

여기서,

${}^{t+\Delta t} S_{ij}$  = 시간 0을 기준으로한 시간  $t + \Delta t$ 에서의 제 2 Piola-Kirchhoff 응력 텐서

${}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}$  = 시간 0을 기준으로한 시간  $t + \Delta t$ 에서의 Green-Lagrange 변형률 텐서

${}^{t+\Delta t} R$  = 시간  $t + \Delta t$ 에서의 외부 가상일

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^0 S_{ij} + {}^0 S_{ij},$$

$${}^0 S_{ij} = {}^0 C_{ijrs} {}^0 \epsilon_{ij}$$

$${}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} = {}^0 \epsilon_{ij} + {}^0 \epsilon_{ij},$$

$${}^0 \epsilon_{ij} = {}^0 e_{ij} + {}^0 \eta_{ij}$$

${}^0 V$  = 시간 0을 기준으로 한 물체의 체적

${}^0 e_{ij}$  = 시간 0을 기준으로한 형태의 선형 증분 변형률

${}^0 \eta_{ij}$  = 시간 0을 기준으로한 형태의 비선형 증분 변형률

${}^0 C_{ijrs}$  = 재료 특성 텐서

${}^0\epsilon_{rs}$ =중분 Green-Lagrange 변형률 텐서  
위 관계식을 식 (1)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & \int_{0V} {}^t C_{ijrs} {}^0\epsilon_{rs} \delta_0 e_{ij} d^0V \\ & + \int_{0V} {}^t S_{ij} \delta_0 \eta_{ij} d^0V \\ & = {}^{t+\Delta t} R - \int_{0V} {}^t S_{ij} \delta_0 e_{ij} d^0V \end{aligned} \quad (2)$$

식 (2)는 선형화된 T.L 방법에 있어서의 평형 방정식 (equilibrium equation)이다. 한편 동적 (dynamic) 문제에 있어서는 체적력에 관성력이 포함되므로 고체의 질량 보존을 고려하여 관성력  $\int_{0V} {}^0\rho {}^{t+\Delta t} \ddot{U}_k \delta U_k d^0V$ 를 식 (2)에 대입하면 다음과 같이 동적 선형 해석과 비선형 해석식으로 나누어 표시할 수 있다.

동적 선형 해석에 있어서는

$$\begin{aligned} & \int_{0V} {}^0\rho {}^{t+\Delta t} \ddot{U}_k \delta U_k d^0V \\ & + \int_{0V} {}^0 C_{ijrs} {}^0\epsilon_{rs} \delta_0 e_{ij} d^0V \\ & = {}^{t+\Delta t} R \end{aligned} \quad (3)$$

동적 비선형 해석에 있어서는

$$\begin{aligned} & \int_{0V} {}^0\rho {}^{t+\Delta t} \ddot{U}_k \delta U_k d^0V \\ & + \int_{0V} {}^t C_{ijrs} {}^0\epsilon_{rs} \delta_0 e_{ij} d^0V \\ & + \int_{0V} {}^t S_{ij} \delta_0 \eta_{ij} d^0V = {}^{t+\Delta t} R \\ & - \int_{0V} {}^t S_{ij} \delta_0 e_{ij} d^0V \end{aligned} \quad (4)$$

참고로 정적 문제 해석에 있어서의 선형, 비선형 평형식을 나타내면 다음과 같다.

정적 선형식은

$$\int_{0V} {}^t C_{ijrs} {}^0\epsilon_{rs} \delta_0 e_{ij} d^0V = {}^{t+\Delta t} R \quad (5)$$

이며, 정적 비선형식은

$$\begin{aligned} & \int_{0V} {}^t C_{ijrs} {}^0\epsilon_{rs} \delta_0 e_{ij} d^0V \\ & + \int_{0V} {}^t S_{ij} \delta_0 \eta_{ij} d^0V \\ & = {}^{t+\Delta t} R - \int_{0V} {}^t S_{ij} \delta_0 e_{ij} d^0V \end{aligned} \quad (6)$$

식 (3)과 식 (4)를 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$[M] {}^{t+\Delta t} \ddot{U} + [K_L] {}^{t+\Delta t} U = {}^{t+\Delta t} P \quad (3.a)$$

$$\begin{aligned} & [M] {}^{t+\Delta t} \ddot{U} + [{}^{t+\Delta t} {}^0 K_L + {}^{t+\Delta t} {}^0 K_{NL}] {}^{t+\Delta t} U \\ & = {}^{t+\Delta t} P - {}^t F \end{aligned} \quad (4.a)$$

여기서,

$[M]$ =질량행렬

$[{}^{t+\Delta t} K_L]$ =선형 강성 계수

$[{}^{t+\Delta t} K_{NL}]$ =비선형 강성 계수

${}^{t+\Delta t} P$ =외력 벡터

${}^t F$ =시간  $t$ 에서의 요소 응력에 등가적인 절점력 벡터

${}^{t+\Delta t} U$ =시간  $t + \Delta t$ 에서의 전 변위 벡터

${}^{t+\Delta t} \ddot{U}$ =가속도 벡터

## 2.2 2차원 문제의 반복 평형식

식 (3)과 식 (4)는 가상일을 나타내는 평형식, 식 (3.a)와 식 (4.a)은 힘의 평형상태를 나타내는 평형식이다. 2차원 문제에서 Green-Lagrange 변형률 텐서  ${}^t \epsilon_{ij}$ 는

$${}^t \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^t U_{i,j} + {}^t U_{j,i} + {}^t U_{i,i} {}^t U_{j,j}) \quad (7)$$

식 (7)을 행렬식 형태로 나타내면 식 (8)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} {}^t E &= [{}^t B_L] {}^t U, \\ [{}^t B_L] &= [{}^t B_{L0}] + [{}^t B_{L2}] \end{aligned} \quad (8)$$

여기서  $[{}^t B_{L0}]$ 은 선형 변위-변형률 변환 행렬,  $[{}^t B_{L2}]$ 은 대변형에 의한 비선형 변위-변환 행렬로서 소변형인 경우는 0이 된다.

변위 구배 (gradient)와 변위와의 관계는 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned} {}^t U_{k,i} &= [{}^t U_{1,1} \quad {}^t U_{1,2} \quad {}^t U_{2,1} \quad {}^t U_{2,2} \quad {}^t U_{3,3}]^T \\ &= [{}^t B_{NL}] {}^t U \end{aligned} \quad (9)$$

여기서  $[{}^t B_{NL}]$ 은 비선형 변위-변형률 변환 행렬을 나타낸다.

${}^t S_{ij} {}^t U_{k,i} {}^t U_{k,j}$ 는 식 (9)를 이용하여 행렬 형태로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & {}^t S_{ij} {}^t U_{k,i} {}^t U_{k,j} \\ & = {}^t U^T [{}^t B_{NL}]^T [{}^t S] [{}^t B_{NL}] {}^t U \end{aligned} \quad (10)$$

여기서  $[{}^t S]$ 는 초기 응력을 나타내는 제2 Piola-Kirchhoff 응력 행렬이다.

${}^t S_{ij} = {}^t C_{ijrs} {}^0 \epsilon_{rs}$ 를 행렬 형태로 나타내면 다음과

Table 1 Material properties of specimen

C	Si	Mn	P	S	Cr	Y.S	T.S
0.55	1.50	0.70	0.035	0.035		125	140
~	~	~	Max	Max	-	kg/mm <sup>2</sup>	kg/mm <sup>2</sup>
0.65	1.80	1.00				(Min)	(Min)

같이 표시된다.

$$[\delta S] = [D][\delta B_L] \{U\} \quad (11)$$

여기서  $[D]$ 는 구성 물질의 특성 행렬(material property matrix)로서 평면 응력인 경우에 있어서의  $[D]$ 는

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix},$$

평면 변형률인 경우에 있어서의  $[D]$ 는

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

여기서  $E$ 는 탄성 계수,  $\nu$ 는 포와송 수이다.

Green-Lagrange 변형률 텐서  $\delta \epsilon_{ij}$ 는

$$\begin{aligned} \delta \epsilon_{ij} &= \delta e_{ij} + \delta \eta_{ij} \\ &= [\delta B_{L0}] \{U\} + [\delta B_{L2}] \{U\} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서  $\delta e_{ij}$ ,  $\delta \eta_{ij}$ 는 각각 Green-Lagrange 변형률 텐서의 선형 성분과 비선형 성분을 나타낸다.

식 (1)을 시간  $t$ 상태의 식으로 변형하여 식 (11), 식 (12)를 대입하면 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} {}^tR &= \int_{0V} {}^t_0 S_{ij} \delta \delta \epsilon_{ij} d^0 V \\ &= \int_{0V} {}^t_0 C_{ijrs} (\delta e_{rs} + \delta \eta_{rs}) \delta \delta e_{ij} d^0 V \\ &\quad + \int_{0V} {}^t_0 S_{ij} \delta \eta_{ij} d^0 V \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 외부 가상일  ${}^tR$ 과 외력 벡터  $\{P\}$ 와의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} {}^tR &= \delta \{U\}^T \{P\} \\ &= \int_{0V} \delta \{U\}^T [\delta B_{L0}]^T [D] [B_L] \{U\} d^0 V \\ &\quad + \int_{0V} \delta \{U\}^T [\delta B_{NL}]^T [\delta S] [\delta B_{NL}] \{U\} d^0 V \end{aligned} \quad (14)$$

식 (14)에서 등가 절점력 벡터를 구하기 위하여 상법칙(quotient law)을 적용하면 다음과 같으며, 이때의 외력  $\{P\} = \{\delta F\}$  일 때가 평형 상태이다.

$$\begin{aligned} \{P\} &= \int_{0V} [\delta B_{L0}]^T [D] [B_L] \{U\} d^0 V \\ &\quad + \int_{0V} [\delta B_{NL}]^T [\delta S] [\delta B_{NL}] \{U\} d^0 V = \{\delta F\} \end{aligned} \quad (15)$$

여기서  $\{\delta F\}$ 는 시간  $t$ 에서의 내부 응력에 상응하는 등가 절점력 벡터이다.

식 (13)의 우변 둘째항을 식 (12)을 이용하여 다

시 정리하면 식 (16)과 관계가 얻어진다.

$$\begin{aligned} &\int_{0V} {}^t_0 S_{ij} \delta \delta \eta_{ij} d^0 V \\ &= \int_{0V} \delta \{U\}^T [\delta B_{NL}]^T [\delta S] [\delta B_{NL}] \{U\} d^0 V \\ &= \int_{0V} \{\delta S\} \delta ([\delta B_{L2}] \{U\}) d^0 V \\ &= \int_{0V} \delta \{U\}^T [\delta B_{L1}] \{\delta S\} d^0 V \end{aligned} \quad (16)$$

여기서  $[\delta B_{L1}] = 2[\delta B_{L2}]$ ,

$\delta [\delta B_{L2}] \{U\} = [\delta B_{L2}] \delta \{U\}$ 이다.

식 (16)에 상법칙을 적용하면 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &\int_{0V} [\delta B_{NL}]^T [\delta S] [\delta B_{NL}] \{U\} d^0 V \\ &= \int_{0V} [\delta B_{L1}]^T \{\delta S\} d^0 V \end{aligned} \quad (17)$$

식 (15)의 등가 절점력  $\{\delta F\}$ 를 식 (17)의 관계를 이용하여 정리하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \{\delta F\} &= \int_{0V} [\delta B_{L0}]^T [D] [\delta B_L] \{U\} d^0 V \\ &\quad + \int_{0V} [\delta B_{NL}]^T [\delta S] [\delta B_{NL}] \{U\} d^0 V \\ &= \int_{0V} [\delta B_{L0}]^T [D] [\delta B_L] \{U\} d^0 V \\ &\quad + \int_{0V} [\delta B_{L1}]^T \{\delta S\} d^0 V \\ &= \int_{0V} [\delta B_{L0} + \delta B_{L1}]^T \{\delta S\} d^0 V \end{aligned} \quad (18)$$

시간  $t + \Delta t$  상태에서 외력과 등가 절점력이 같아야 평형 상태를 이루게 되므로

$$\{{}^{t+\Delta t}P\} = \{{}^{t+\Delta t}F\} \quad (19)$$

이를 증분 형식으로 나타내기 위하여 시간  $t$  상태의 등가 절점력을 묶어 내면 식 (19)는 다음과 같이 표시된다.

$$\{{}^{t+\Delta t}P\} = \{{}^{t+\Delta t}F\} = \{\delta F\} + \{0F\} \quad (20)$$

여기서  $\{0F\}$ 는 증분 절점력 벡터로써 접선강성 행렬(tangent stiffness matrix)를 이용하여 근사적으로 구하면 식 (21)과 같다.

$$\{0F\} = [\delta K] \{\Delta U\} \quad (21)$$

여기서  $\{\Delta U\}$ 는 절점 변위 벡터  $\{{}^{t+\Delta t}U\}$ 의 증분을 나타낸다. 식 (20)과 식 (21)의 관계를 정리하면,

$$[\delta K] \{\Delta U\} = \{{}^{t+\Delta t}P\} - \{\delta F\} \quad (22)$$

가 되고 동적인 문제에서는 체적력에 관성력이 부가되므로 식 (22)는 다음과 같이 표시된다.

$$[\delta K] \{\Delta U\} = \{{}^{t+\Delta t}P\} - \{\delta F\} - [M] \{{}^{t+\Delta t}\dot{U}\} \quad (23)$$

여기서  $[M] = \int_{0V} {}^0\rho [H]^T [H] d^0 V$ ,

[H] : shape function 행렬

식 (23)의 가상 행렬은  $[iK] = [iK_L + iK_{NL}]$ 로 나눌 수 있고,  $\{dF\} = [K]\{dU\}$ 의 관계에 의해 식 (24)와 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 [K] &= [K_L] + [K_{NL}] \\
 &= \int_{0^+} [B_{L0} + B_{L1}]^T [D] [B_{L0} + B_{L1}] d^0 V \\
 &\quad + \int_{0^+} [B_{NL}]^T [S] [B_{NL}] d^0 V \quad (24)
 \end{aligned}$$

식 (22)와 식 (23)은 선형화 된 것으로 정확한 해와 비교할 때 오차를 갖게되므로 그 오차를 보정하기 위하여서는 반복 계산(iteration)이 필요하다.

식 (23)을 Newton-Raphson 반복법에 의한 평형식으로 표시하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 \{{}^{t+\Delta t}{}_0K\}^{(i-1)} \{\Delta U\}^{(i)} &= \{{}^{t+\Delta t}P\} - \{{}^{t+\Delta t}F\}^{(i-1)} \\
 &\quad - [M] \{{}^{t+\Delta t}{}_0\dot{U}\}^{(i)} \quad (25)
 \end{aligned}$$

여기서  $i=1, 2, 3, \dots$  반복 계산수이다.

시간  $t+\Delta t$  상태에서의 변위  $\{{}^{t+\Delta t}U\}$ 를 구하기 위하여 식 (25)를 Newmark 적분 방법<sup>(13)</sup>으로 나타내면 식 (26)과 같이 되며, 이때의 Newmark 적분 상수는  $\alpha=1/4$ ,  $\delta=1/2$ ,  $\beta=0$ 이다.

$$\begin{aligned}
 \{{}^{t+\Delta t}{}_0K\}^{(i-1)} \{\Delta U\}^{(i)} &= \{{}^{t+\Delta t}P\} - \{{}^{t+\Delta t}F\}^{(i-1)} \\
 &\quad - [M] \left[ -\frac{4}{(\Delta t)^2} (\{{}^{t+\Delta t}U\}^{(i-1)} - \{U\}) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4}{\Delta t} \{U\} - \{\dot{U}\} \right] \quad (26)
 \end{aligned}$$

식 (26)은 본 논문 수치 계산에서 사용한 Newton-Raphson 반복법과 Newmark의 적분법을 조합한 반복 평형식으로 비선형 동적 문제를 해석한다.

### 3. 수치해석 및 고찰

#### 3.1 일단고정 및 일단자유 보의 동적 비선형 해석

앞 장에서의 해석과 수치계산 방법의 타당성을 검토하기 위하여 다음과 같은 일단고정 및 일단자유보의 동적 비선형 응답을 계산하였다.

일정한 본토 하중이 일단고정 및 일단 자유 보에 갑자기 작용하는 문제로 사용된 유한 요소 모델<sup>(6,7)</sup>은 Fig. 1과 같다.

이 보의 유한요소 해석을 위하여 Fig. 1(b)와 같이 5개의 8 절점 등분개변수 요소(isoparametric elements)로 등분할하였으며, 이 보의 상태는 평면응력(plane stress) 상태이며, 또한 하중은 변형

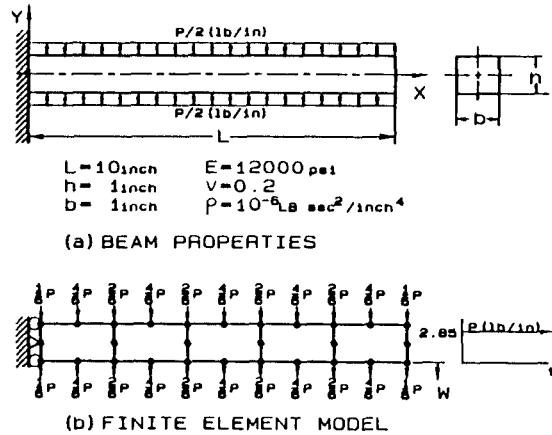


Fig. 1 Fixed-free beam

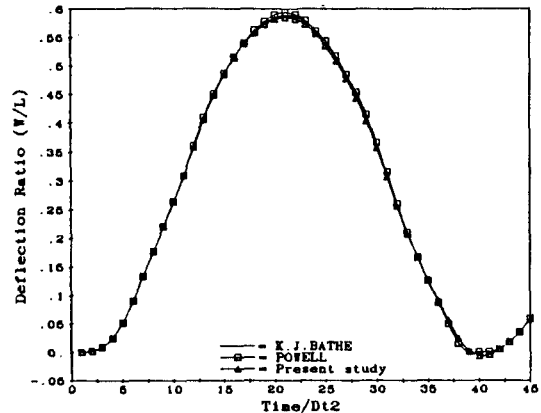


Fig. 2 Large displacement dynamic nonlinear response of fixed-free beam at the free end under uniformly distributed load, ( $Dt/2 = 135 \mu\text{sec}$ )

중에도 항상 수직 방향으로 작용한다고 가정하였으며, 재료는 선형 탄성 재료라고 가정하였다. 그리고 각 요소 질량은 집중질량(lumped mass)으로 작용시켰으며, 수치적분에서는 Gauss 적분차수를 2로하고, Newmark의 상수  $\alpha=1/4$ ,  $\delta=1/2$ ,  $\beta=0$ 을 이용하여 Newton-Raphson 반복법으로 반복 계산을 하였다. 시간 증분  $\Delta t$ 는  $45 \mu\text{sec}$ 로 하고 등분포 하중  $499\text{N/m}$ 를 갑자기 작용시켰을 때의 보 끝의 무차원 변위를 Fig. 2에 나타내었으며, 이를 기 발표된 결과<sup>(6,7)</sup>와 비교하였다. 그리고 시간 증분  $\Delta t$ 는 탄성 외팔보 기본 주기의  $1/126$ 으로 하였다.

본 계산에서는 각 반복 계산에 있어서 Tol. ≤ 0.0001를 만족할 때 수렴한 것으로 간주하였다.

Fig. 2에서와 같이 본 논문에서 해석한 결과는 Bathe 등<sup>(6)</sup>, Powell 등<sup>(7)</sup>의 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 변위의 최대 오차는 0.2% 이하이다. 반복수에 있어서 Bathe는 평균 4내지 5회의 반복 계산이 소요되었고, Powell은 3회의 반복 계산이 수행되었으며, 본 계산에서도 3회씩의 반복 계산이 행하였었다.

3.2 특이 경계조건을 갖는 보의 해석

Fig. 3과 같이 일단이 경계면에 삽입되어 있고, 또 다른 일단은 자유 상태인 보(inserted-free beam)의 특성을 해석 하였다.

하중은 Fig. 1과 같은 분포 하중이 작용하고 있고, 이 때의 해석 결과를 선형해석 결과와 비교하였고, 아울러 일단고정 및 일단자유 상태인 보의 비선형 해석 결과와 비교하여 보았다.

이 보의 상태 및 재료 특성은 3.1절에 나타낸 보의 재료 특성과 동일하게 하였고, 각 시간에 가하는 하중도 같은 크기인 499N/m를 작용시키고, 시간증분 Δt도 45μsec로 나누어 계산하였다.

또한 삽입된 길이(I.L)가 보의 두께(h)의 0.1h 크기로부터 20h 크기까지 0.1 간격으로 계산하였다.

삽입 길이가 각각 0.1, 0.3, 0.8 및 2.0 배 일 때의 동적 비선형 결과를 일단 고정 및 일단자유 보의 동적 비선형 특성과 비교한 것을 Fig. 4에 나타내었다.

Fig. 4를 보면 각 삽입된 길이에 따라 동적 특성이 달라짐을 알 수 있다. 삽입 길이의 크기가 작을수록 최대 변위의 크기가 크고, 주기가 길어 짐을 알 수 있다. 그리고 일단고정보와 일단삽입된 보의 특성은 상당히 차이가나며 특히 삽입된 길이의 크기가 작을수록 많은 차이를 보이고 있다.

삽입된 보의 동적 비선형 특성은 삽입된 길이가 길어질수록 일단고정 및 일단 자유보에 가까워지나 0.8h 근처에서 부터는 그 크기가 증가하더라도 더 이상 두드러지게 가까워 지지 않음을 알 수 있다.

삽입된 길이가 0.1h와 0.8h 일 때의 동적 선형 해석과 비선형 해석 결과가 각각 Fig. 5와 Fig. 6에서 비교 하였으며, 정적인 변위도 아울러 나타내었다.

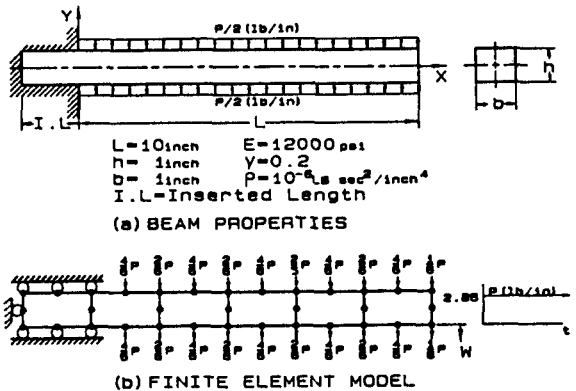


Fig. 3 Inserted-free beam under uniform load

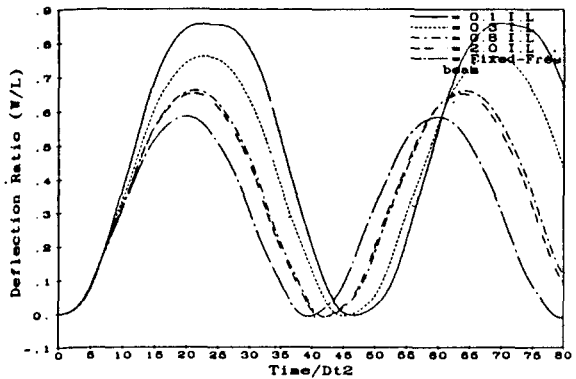


Fig. 4 Dynamic nonlinear response of fixed-free and inserted-free beam under uniformly distributed load, varying with I.L.

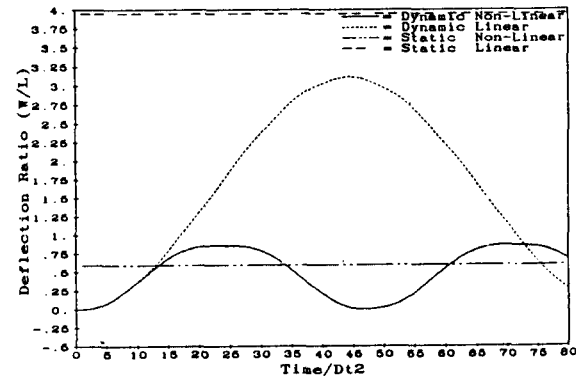


Fig. 5 Large displacement dynamic and static response of inserted-free beam under uniformly distributed load, when I.L=0.1h

Fig. 5와 Fig. 6을 비교하면 삽입된 길이에 따라 선형 결과 및 비선형 결과의 차이가 달라짐을 알 수 있다. 즉 삽입된 길이가 작을 수록 선형 결과는 비선형 결과와 많은 차이를 나타내고 있음을 알 수 있다.

각 삽입된 길이에 따른 최대 변위비를 4가지 경우(동적 선형 해석, 동적 비선형 해석, 정적 선형 해석, 정적 비선형 해석)에 대하여 Fig. 7에 나타내었고, 또한 일단고정 및 일단자유 상태인 보의 4가지 경우에 대한 것도 함께 표시하였다.

Fig. 5와 Fig. 6 및 Fig. 7에서와 같이 삽입 길이가 짧을 수록 선형 결과와 비선형 결과가 큰 차이를 보이는 것은 삽입 길이가 작을 수록 경계면에서

의 회전(rotation)이 크게 즉 쉽게되어 대변위가 일어나고, 이 대변위에 의한 비선형성이 크게 나타나지만, 삽입 길이가 길어지면 경계면에서의 회전이 작게 즉 어렵게 되어 대변위가 점점 줄어들게 되고, 따라서 대변위에 의한 비선형성이 작게되기 때문이다. 따라서 Fig. 7에서와 같이 삽입 길이가 0.1h에서 0.8h 사이에서 변화가 심하고, 삽입 길이의 크기 0.8h 이상에서는 거의 변화가 없음을 알 수 있다.

#### 4. 실험 및 고찰

3.2에서 해석한 특이 경계 조건 보에 대한 동적 비선형 해석의 타당성을 검토하기 위하여 실험을 하였으며, 그 결과를 수치해석 결과와 비교하였다.

##### 4.1 시험편

Fig. 9, Fig. 10에 실험 장치의 개요와 실험 장치를 각각 나타내었다. 장치의 주 구성품은 시험편, 치구, 브리지 회로와 증폭 회로, 전원 공급기 및 데이터 변환을 위한 A/D 변환기가 내장된 16bit AT급 퍼스널 컴퓨터이다.

실험 방법은 시험편 길이 방향의 끝단(Fig. 8의 화살 W 표시부위)에 임의의 힘을 가하여 끝단의 변위를 임의의 위치에 고정시키면 재료의 탄성 복원력에 의하여 재료 내부에 발생하는 등가 절점력이 변위에 역으로 작용하게 된다. 이 등가 절점력에 의하여 변위 구속이 해제되는 순간부터 보가 온

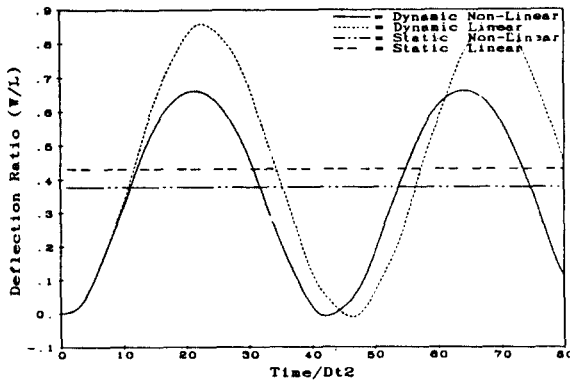


Fig. 6 Large displacement dynamic and static response of inserted-free beam under uniformly distributed load, when  $I.L=0.8h$

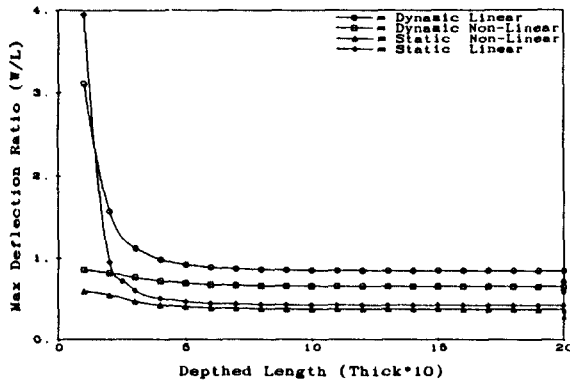
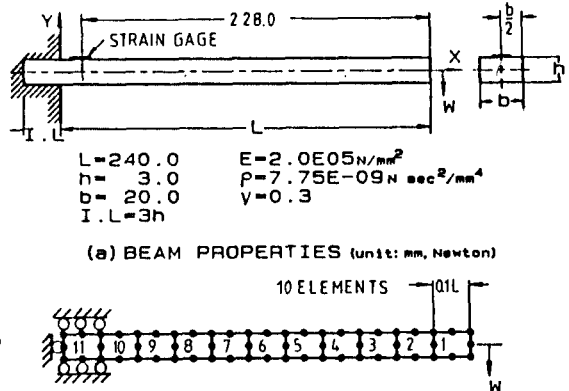


Fig. 7 Maximum deflection ratios of the inserted-free beam (solid marks denote corresponding fixed-free beam deflection)



(b) FINITE ELEMENT MODEL

Fig. 8 Specimen configuration

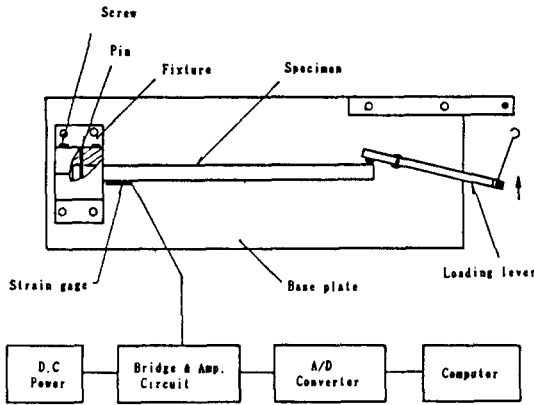


Fig. 9 Schematic apparatus of the dynamic strain testing equipment

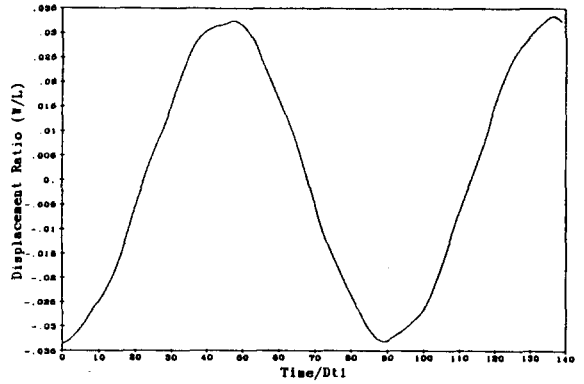


Fig. 11 Large displacement dynamic response of inserted-free beam at the free end under initial displacement, when  $I.L=3h$

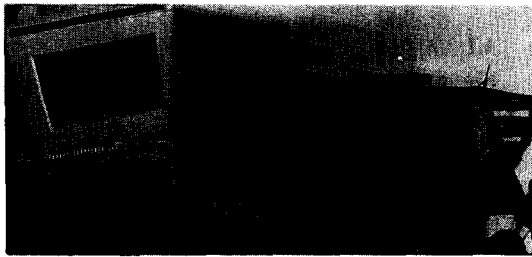


Fig. 10 Experimental apparatus for dynamic strain test

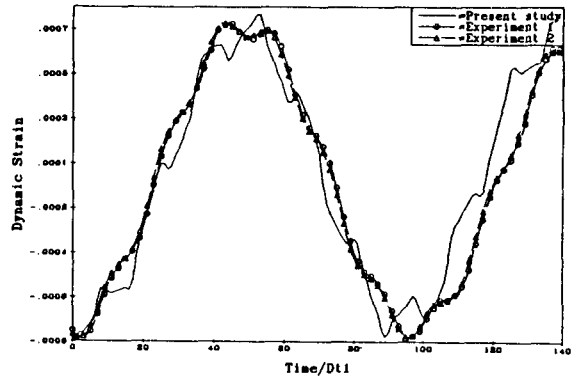


Fig. 12 Measured and calculated dynamic strain response of an inserted-free beam, when  $I.L=3h$

등을 하게 된다. 이러한 조건은 초기 응력을 받고 있는 보의 운동 조건과 같을 것이지만 본 논문에서는 초기 변위가 작용하는 구속 조건이라 한다.

초기 변위 구속을 해제할 때부터의 보의 운동 상태를 보에 부착된 스트레인 게이지로 동적 변형률 (dynamic strain)을 측정하였다. 실제 스트레인 게이지의 데이터 신호는 아나로그 신호이므로 A/D 변환기로 디지털 신호로 바꾸어 컴퓨터에 저장하였다. 이때 데이터 추출 시간 간격은  $250\mu\text{sec}$ 였다.

### 4.3 수치해석 및 실험적 고찰

Fig. 8과 같은 재료 특성을 갖는 특이 경계 조건 보에 대하여 4.2와 같이 초기 변위값을 하중대신 사용하여 수치해석을 하였다. 이 때 보의 상태는 평면 변형률 (plane strain) 상태이며 11개의 8절점 등매개변수 요소 (isoparametric elements)로 분할하였다. 삽입 길이 ( $I.L$ )가 0일 때의 보의 기본 주

기<sup>(16)</sup>는  $0.016\text{sec}$ 이고, 수치 계산시의 시간 증분  $\Delta t_1$ 은 실험시의 데이터 추출 시간과 같게 하였다.

변위 구속이 해제된 보의 끝단의 변위는 수치 해석 결과 시간이 증가함에 따라 Fig. 11과 같이 나타났다. 또한 이 때의 계산된 동적 변형률을 실험 결과와 함께 Fig. 12에 나타내었다.

실험 결과와 수치 해석 결과를 비교하면 실제로 수치 해석시의 동적 반응이 실험 결과와 잘 일치하고 있으며, 반복되는 주기의 차이는 다음과 같은 원인이라 판단된다. 그 원인으로서는 감쇠를 고려하지 않은 수치 해석의 결과와 실제 감쇠 특성을 갖고 있는 실험 결과와의 차이와, 실험 장치에서 발생하는 오차 등이 누적된 것이라 생각되며, 수치



해석시에 감쇠를 고려하고, 실험 장치를 완벽하게 제작한다면 좀 더 정확하게 일치하리라 판단된다.

## 5. 결 론

가상 변위의 원리를 기초로하여 동적인 대변위 문제의 해석이 가능한 증분형의 Total-Lagrange 방법의 한 반복 평형 유한요소식을 구하였다. 그리고 이 평형식을 경계조건이 일단고정과 일단자유 상태인 보와 특이 경계조건을 갖는 보에 적용 하여 그 결과를 비교하였으며, 실제 실험 결과와도 비교하였다.

(1) Newton-Raphson 방법에 의한 증분형의 반복 평형 유한요소식을 유도하였으며, 이를 경계조건이 일단고정 및 일단자유 상태인 보에 관한 문제에 적용한 결과 기존의 해석과 잘 일치함을 알 수 있었다.

(2) 일단자유 및 경계면에 다른 일단이 삽입된 상태와 같은 특이 경계조건을 갖는 보의 대변위 정적 및 동적 비선형 문제를 위의 평형식을 사용하여 경계면에 삽입된 크기에 따라 해석하였으며, 이 결과를 선형 해석의 결과와 비교하였고, 또한 경계조건이 일단고정 및 일단자유 상태인 보의 해석 결과와도 비교하였다.

(3) 해석 결과를 요약하면 다음과 같다.

(i) 경계조건이 일단고정 및 일단자유 상태인 보와 특이 경계조건을 갖는 보의 응답은 비선형 해석을 한 경우나 선형 해석을 한 경우 모두 다르게 나타났다. 특히 경계면에 삽입된 길이가 짧을수록 많은 차이가 남을 알 수 있다.

(ii) 경계면에 일단이 삽입된 보의 최대변위는 삽입된 길이가 길어질 수록 일단고정 및 일단자유 상태인 보의 변위에 가까워지거나 삽입된 길이가 보의 두께에 비하여 어느정도 이상의 삽입 길이(약 0.8배)에서는 수렴하는 경향을 보이고 있으며, 일단고정 및 일단자유 상태인 보의 변위에 비해 일단 삽입 및 일단자유 상태인 특이보의 동적 비선형 해석의 변위는 111.3%, 동적 선형 해석의 변위는 116.3% 정도의 차이가 남을 알 수 있었다.

(iii) 특이 경계조건 보의 동적 선형 해석 결과는 동적 비선형 해석과 많은 차이를 나타내고 있으며, 삽입 길이가 두께에 비하여 약 0.8배 이상에서의 해석 결과를 보면, 동적 선형 해석의 변위는 동적 비선형 해석의 변위에 비하여 130% 정도의 차이가

있고, 삽입 길이가 0.8배 이하에서는 130% 이상의 차이가 있었다.

(4) 실험 결과와 본 논문에서 해석한 결과는 잘 일치함을 알 수 있다.

## 참 고 문 헌

- (1) Wood, R.D., Zienkiewicz, O.C., 1976, "Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells", *Comuter & Structures*, Vol. 7, pp.725~735.
- (2) Suram, K.S., 1982, "Geometrically Nonlinear Formulation for the Axisymmetric Shell Elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.18, pp.477~502.
- (3) Suram, K.S., 1983, "Geometrically Nonlinear Formulation for the Curved Shell Elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.19, pp.581~615.
- (4) Yang, T.Y., Sunli Saigal, 1984, "A Simple Element for Static and Dynamic Response of Beams with Material and Geometric Nonlinearities", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.20, pp.851~867.
- (5) Bathe, K.J., Haluk Ozdemir, Wilson, E.L., 1974, "Static and Dynamic Geometric and Material Nonlinear Analysis", Report No. UC SESM 74-4, Dept. Civil Eng. Univ. of California, Berkeley.
- (6) Bathe, K.J., Ramm, E., Wilson, E.L., 1975, "Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 9, pp.353~386.
- (7) Mondakar, D.P., Powell, G.H., 1977, "Finite Element Analysis of Nonlinear Static and Dynamic Response", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.11, pp.499~520.
- (8) Mondakar, D.P., Powell, D.P., 1978, "Evaluation of Solution Schemes for Nonlinear Structures", *Computer & Structures*, Vol. 9, pp.223~236.
- (9) Nath, Y., Dumir, P.C., Bhatia, R.S., 1985, "Nonlinear Static and Dynamic Analysis of Circular Plates and Shallow Spherical Shells Using the Collocation Method", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.21, pp. 565~578.
- (10) Sunil Saigal, Yang, T.Y., 1985, "Nonlinear Dynamic Analysis with a 48 D.O.F Curved thin Shell Element", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 1, pp.1115~1128.
- (11) Kwon, Y.D., 1985, "Forced Motion of Initially Stressed Elastic Solids Analytical and Finite Element Methods", Ph.D. Thesis, State University of

- New York at Buffalo.
- (12) 권영두, 최진민, 1988, "초기 응력이 있는 탄성체의 선형 및 비선형 해석", 대한기계학회논문집, 제12권, 제4호, pp.642~651.
- (13) Bathe, K. J., 1982, "Finite Element Procedure in Engineering Analysis", Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- (14) Oliver, J., Onate, E., 1986, "A Total Lagrangian Formulation for the Geometrically Nonlinear Analysis of Structures Using Finite Elements. Part 2 : Arches, Frames and Axisymmetric Shells", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 23, pp. 253~274.
- (15) Dvokin, Edurado N., Onate, Eugenio and Oliver, Javier., 1988, "On a Non-Linear Formulation for Curved TIMOSHENKO Beam Elements Considering Large Displacement/Rotation Increments", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 26, pp. 1597~1613.
- (16) Blevins, Robert D., 1979, "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape", Van Nostrand Reinhold Company.