

〈論 文〉

이방성 이종재료의 접합계면 균열에 대한 응력확대계수 결정에 대한 연구

李甲來* · 曹相鳳** · 崔鎔湜***

(1990년 10월 22일 接受)

A Study on Determination of Stress Intensity Factors for the Interface Crack in Dissimilar Anisotropic Materials

Kab Rae Lee, Sang Bong Cho and Yong Shick Choy

Key Words : Boundary Element Method(경계요소법), Composite Material(복합재료), Characteristic Roots(특성근), Anisotropic Material(이방성 재료), Interface Crack(접합계면 균열), Eigenvalue(고유치), Stress Intensity Factor(응력확대계수)

Abstract

After clarifying eigenvectors and the stress intensity factors which are used in Suo's expression of the stress and displacement fields for interface crack in dissimilar anisotropic materials, we propose an extrapolation method to determine the stress intensity factors of an interface crack in anisotropic dissimilar materials by using the numerical method such as FEM or BEM. In accordance with the proposed method, numerical results of the stress intensity factors for interface crack in various material combination are shown by BEM. It is confirmed that the proposed method is found to be valid throughout the consideration and comparison with the other's results.

1. 서 론

최근 구조물의 경량화를 목적으로 복합재료의 개발이 급속히 증가하고 있으며, 또한 세라믹과 같은 신소재의 개발과 더불어 세라믹-금속 접합재와 같이, 수치·금속·탄소·세라믹·복합재료 등의 재료가 서로 접합된 이종접합재료(異種接合材料)의 사용이 날로 증가하고 있다. 따라서 복합재료의 응력해석이 중요하며, 특히 새로운 접착, 접합 기술의 개발과 더불어 복합재료등과 접합된 이종재료간의 접합계면 균열의 해석뿐만 아니라, 접합계면에

서의 파괴거동에 대한 연구가 중요한 대상⁽¹⁾이 되고 있다.

이종접합계면(interface)에서는 대개 응력의 특이성이 나타나기 때문에, 접합계면에서 균열이 발생하는 원인이 되며, 이러한 접합계면 균열(interface crack)이 접합구조물의 파괴원인 중 큰 부분을 차지하고 있다. 접합되는 재료에 따라 접합계면 균열은 Fig. 1과 같이 여러가지 유형으로 분류할 수 있다. Williams⁽²⁾가 Fig. 1의 (a)와 같이 등방성재료간의 접합계면 균열에 대한 응력장과 변위장을 해석하였다. 그러나 접합계면 균열의 응력장과 변위장은 균질재료 내의 균열의 변위장과 응력장에서 볼 수 없는 응력의 진동특이성(oscillatory stress singularity)과 overlapping 현상이 아주 적은 범위이지만 접합계면 균열 선단부근에서

* 정회원, 성균관대학교 대학원
** 정회원, 경남대학교 공과대학 기계설계학과
*** 정회원, 성균관대학교 공과대학 기계공학과

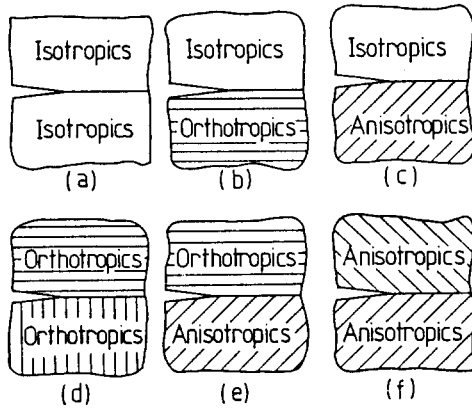


Fig. 1 Material type of interface crack in dissimilar materials

나타난다. 이러한 현상은 물리적으로 불합리하기 때문에, 그 이후 여러연구자⁽³⁻⁶⁾들이 제각기 접합계면 균열 모델을 제안한 바 있으나, 나름대로의 문제점들을 내포하고 있어 아직 확립된 접합계면 균열 모델은 없는 실정이다. 즉, 응력의 진동특성이 균열선단에서 아주 작은 범위에서 생기는 현상이므로 무시하자⁽¹⁾는 측면과 진동특성이 나타나지 않는 새로운 접합계면 균열모델을 구하자는⁽³⁾ 측면에서 계속 연구되고 있다고 하겠다. 지금까지의 연구가 등방성 재료간의 접합계면 균열에 대한 해석이었으나 최근에는 신소재 및 복합재료의 개발로써 Fig. 1(b)~(f)와 같이 이방성 재료가 접합된 경우의 문제가 연구대상이 되고 있다⁽⁷⁾. 이러한 연구는 최근 몇몇 연구자^(8,9)들에 의해 해석되었고, Suo⁽¹⁰⁾는 Fig. 1(f)와 같은 접합계면 균열의 응력장과 변위장 및 응력확대계수(stress intensity factor)를 복소함수로써 표현하였다. 그러나 Rice⁽¹⁾, Suo⁽¹⁰⁾ 등이 사용한 접합계면 균열에 대한 응력확대계수의 정의는 균질재료의 응력확대계수와는 달리 K_I , K_{II} 가 모두드 I, II와 일치하지 않는다. 또한, 실험 등에서 중요한 이방성 이종재료 접합균열에 대한 응력확대계수의 수치해석결과가 거의 없는 실정이며, 따라서 실험에 대한 연구결과도 거의 없다.

본 연구는 위와 같은 배경에서, Fig. 1(f)와 같이 가장 일반적인 이방성재료가 접합된 경우의 응력확대계수를 명확히 정의하고, 수치해석법으로 구할 수 있는 외삽식을 제안한다. 또한, 탄성문제에의 수치해석 방법으로 적은 요소의 분할로써 고정밀도의

수치해석 결과를 얻을 수 있는 경계요소법(boundary element method : BEM), 특히 저자들이 개발한 복합재료에 대한 2차원 경계요소법 프로그램^(11,12)을 이용하여 이방성 이종재료 접합계면 균열의 응력확대계수를 해석하고, 복합재료내의 섬유(fiber)방향에 대한 접합계면 균열의 정성적 거동을 고찰하고자 한다.

2. 이방성 재료의 복소응력함수에 의한 응력과 변위⁽¹⁰⁾

일반적인 균일 이방성 재료에서의 응력과 변형율의 관계, 즉 Hooke의 법칙은 다음과 같다.

$$\epsilon_i = \sum_{j=1}^6 a_{ij} \sigma_j, \quad \sigma_i = \sum_{j=1}^6 c_{ij} \epsilon_j \quad (1)$$

여기에서

$$\{\epsilon_i\} = [\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2\epsilon_{23}, 2\epsilon_{31}, 2\epsilon_{12}]^T$$

$$\{\sigma_i\} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}]^T$$

이며, a_{ij} , c_{ij} 는 재료의 물성치로 구성되는 재료상수들이다.

일반적으로 이방성 재료에서의 탄성장은 세 복소함수 $\phi_1(z_1)$, $\phi_2(z_2)$, $\phi_3(z_3)$ 로 표현된다. 그리고, 변위 u , 응력 σ 는 다음과 같이 표현된다⁽¹⁰⁾.

$$u_i = 2\text{Re} \left[\sum_{j=1}^3 A_{ij} \phi_j(z_j) \right] \quad (2)$$

$$\sigma_{1i} = -2\text{Re} \left[\sum_{j=1}^3 L_{ij} S_j \phi_j'(z_j) \right] \quad (3)$$

$$\sigma_{2i} = 2\text{Re} \left[\sum_{j=1}^3 L_{ij} \phi_j'(z_j) \right], \quad (i=1, 2, 3) \quad (4)$$

식 (2)~(4)에서 복소 변수 z_j 는

$$z_j = x + S_j y, \quad (j=1, 2, 3) \quad (5)$$

이며, S_j 는 다음과 같이 방정식의 근이다⁽¹³⁾.

$$l_2(S) l_4(S) - [l_3(S)]^2 = 0 \quad (6)$$

여기서

$$l_2(S) = a_{55} S^2 - 2a_{45} S + a_{44}$$

$$l_4(S) = a_{11} S^4 - 2a_{16} S^3 + (2a_{12} + a_{66}) S^2 - 2a_{26} S + a_{22}$$

$$l_3(S) = a_{15} S^3 - (a_{14} + a_{56}) S^2 + (a_{25} + a_{46}) S - a_{24}$$

식 (6)에서 계수들은 식 (1)에서 정의되는 탄성계수들이며, 이들 탄성계수와 식 (6)의 근 S_j 로써 이루어지는 행렬 A 와 L 은 다음과 같다.

$$L = \begin{bmatrix} -S_1 & -S_2 & -S_3 \eta_3 \\ 1 & 1 & \eta_3 \\ -\eta_1 & -\eta_2 & -1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

이고, 행렬 A 의 성분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A_{1h} &= a_{11}S_h^2 + a_{12} - a_{16}S_h + \eta_h(a_{15}S_h - a_{14}) \\ A_{2h} &= a_{21}S_h + a_{22}/S_h - a_{26} + \eta_h(a_{25} - a_{24}/S_h) \\ A_{3h} &= a_{41}S_h + a_{42}/S_h - a_{46} + \eta_h(a_{45} - a_{44}/S_h) \\ &(h=1, 2) \\ A_{13} &= \eta_3(a_{11}S_3^2 + a_{12} - a_{16}S_3) + a_{15}S_3 - a_{14} \\ A_{23} &= \eta_3(a_{21}S_3 + a_{22}/S_3 - a_{26}) + a_{25} - a_{24}/S_3 \\ A_{33} &= \eta_3(a_{41}S_3 + a_{42}/S_3 - a_{46}) + a_{45} - a_{44}/S_3 \end{aligned}$$

여기에서

$$\eta_h = -\frac{l_3(S_h)}{l_2(S_h)}, \quad (h=1, 2) \quad \eta_3 = -\frac{l_3(S_3)}{l_4(S_3)}$$

행렬 A 와 L 에 의해 정의되는 양(+)의 Hermitian 행렬 B 는 다음과 같다.

$$B = iAL^{-1} \quad (8)$$

그리고, $y=0$ 인 x 축상에서의 탄성장은 다음과 같다.

$$U(x) = \{u_j(x, 0)\} = A\Phi(x) + \bar{A}\bar{\Phi}(x) \quad (9)$$

$$\sigma(x) = \{\sigma_{2j}(x, 0)\} = L\Phi'(x) + \bar{L}\bar{\Phi}'(x) \quad (10)$$

여기서

$$\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3]^T$$

식 (9), (10)에서 U , σ 는 각각 변위, 응력을 나타내는 벡터이며, T 는 전치행렬(transpose matrix)임을 나타낸다.

3. 이방성 이종재료의 접합계면 균열에 대한 응력장 및 변위장⁽¹⁰⁾

Fig. 2와 같은 접합계면 균열에서, $y=0$ 인 x 축상에서의 경계조건은 표면력이 0(traction free condition)인 경계조건을 사용한다.

첫째, $x > 0, y=0$ 에서 변위와 응력은 연속이다.

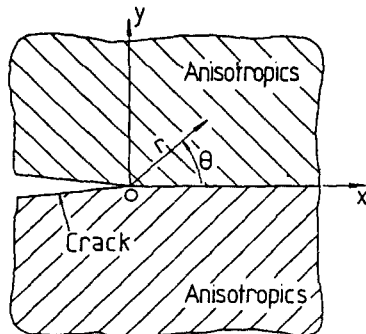


Fig. 2 Region near the interface crack tip in dissimilar anisotropic materials

즉,

$$\begin{aligned} (U)_I &= (U)_{II} \\ (\sigma)_I &= (\sigma)_{II} \end{aligned} \quad (11)$$

둘째, $x < 0, y=0$ 에서 표면력(surface traction)이 없다. 즉,

$$(\sigma)_I = (\sigma)_{II} = 0 \quad (12)$$

식 (11), (12)에서 첨자 I, II는 각각의 영역을 나타내며, U 와 σ 는 식 (9), (10)에서 정의된 것이다. 식 (11)에서 응력 $\sigma(x)$ 는 x 축상에서 연속이므로

$$L_I \Phi_I'(x) + \bar{L}_I \bar{\Phi}_I'(x) = L_{II} \Phi_{II}'(x) + \bar{L}_{II} \bar{\Phi}_{II}'(x) \quad (13)$$

이다. 식 (13)은

$$L_I \Phi_I' - \bar{L}_{II} \bar{\Phi}_{II}'(x) = L_{II} \Phi_{II}'(x) - \bar{L}_I \bar{\Phi}_I'(x) \quad (14)$$

이므로, $z \in I$ 이면 식 (14)에서 우변항이 0이므로

$$L_I \Phi_I'(z) = \bar{L}_{II} \bar{\Phi}_{II}'(z), \quad z \in I \quad (15)$$

이 된다. 그리고, x 축을 가로지르는 상대변위 $\delta(x)$ 는

$$\delta(x) = U(x, 0^+) - U(x, 0^-), \quad x < 0 \quad (16)$$

이다. 식 (9), (10), (15), (16)에서

$$\sigma(x) = L_I \Phi_I'(x) + L_{II} \Phi_{II}'(x) \quad (17)$$

$$i\delta'(x) = H L_I \Phi_I'(x) - \bar{H} L_{II} \Phi_{II}'(x) \quad (18)$$

이다. 식 (18)에서 H 행렬은

$$H = B_I + \bar{B}_{II} \quad (19)$$

또는

$$H = i A_I L_I^{-1} - i \bar{A}_{II} \bar{L}_{II}^{-1} \quad (20)$$

으로 정의되는 양(+)의 Hermitian행렬이다.

Fig. 2에서 균열 부분을 제외한 x 축상의 전구간에서 변위연속 조건을 만족하는 어떤 해석적인 함수, $g(z)$ 가 존재해야 한다. 즉,

$$ig(z) = \begin{cases} H L_I \Phi_I'(z), & z \in I \\ \bar{H} L_{II} \Phi_{II}'(z), & z \in II \end{cases} \quad (21)$$

식 (17)과 (18)을 식 (21)의 $g(z)$ 의 함수로 나타내면

$$\sigma(x) = i[H^{-1}g^+(x) + H^{-1}g^-(x)] \quad (22)$$

$$\delta'(x) = g^+(x) - g^-(x) \quad (23)$$

이며, $x < 0, y=0$ 에서는 표면력이 없으므로

$$i[H^{-1}g^+(x) + \bar{H}^{-1}g^-(x)] = 0, \quad x < 0 \quad (24)$$

이다. 식 (24)를 만족하는 $g(z)$ 는 Muskhelishvili⁽¹⁴⁾에 의해 구해졌다. 즉,

$$ig(z) = Vz^{-1/2+i\epsilon} \quad (25)$$

식 (25)에서 V 는 고유벡터이며, ϵ 은 bimaterial constant이다.

식 (25)를 식 (24)에 대입하면 다음과 같은 고유치 문제가 된다.

$$\mathbf{H}^{-1} \mathbf{V} = e^{2\pi\epsilon} \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{V} \quad (26)$$

식 (26)에서 $e^{2\pi\epsilon}$ 는 고유치(eigenvalue)이며, ϵ 은 실수이다. 식 (26)에서 (ϵ, \mathbf{V}) 가 고유치쌍(eigenvalue pair)이면, $(-\epsilon, \mathbf{V})$, $(0, \mathbf{V}_0)$ 또한 고유치쌍이다. 따라서 식 (26)의 해는 다음과 같다.

$$ig(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} [\mathbf{V} z^{\epsilon} + \bar{\mathbf{V}} z^{-\epsilon} + \mathbf{V}_0] \quad (27)$$

식 (21)에서 복소함수 $\phi'_I(z)$ 와 $\phi'_{II}(z)_{II}$ 를 구하면

$$\begin{aligned} \phi'_I(z) &= \frac{L_I^{-1} \bar{\mathbf{H}}^{-1}}{\sqrt{z}} [\mathbf{V} z^{\epsilon} + \bar{\mathbf{V}} z^{-\epsilon} + \mathbf{V}_0], \\ z &\in I \\ \phi'_{II}(z) &= \frac{L_{II}^{-1} \bar{\mathbf{H}}^{-1}}{\sqrt{z}} [\mathbf{V} z^{\epsilon} + \bar{\mathbf{V}} z^{-\epsilon} + \mathbf{V}_0], \\ z &\in II \end{aligned} \quad (28)$$

와 같다. 식 (17), (18)과 (28)를 이용하여, 균열 선단에서 전방으로 x 축상의 거리 r 만큼 떨어진 곳의 응력벡터 $\sigma(r)$ 과 균열선단에서 후방으로 x 축상의 거리 r 만큼 떨어진 곳의 상대변위벡터 $\delta(r)$ 는

$$\sigma(r) = \frac{\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}}{\sqrt{r}} [\mathbf{V} r^{\epsilon} + \bar{\mathbf{V}} r^{-\epsilon} + \mathbf{V}_0] \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \delta(r) &= 4\sqrt{r} \left[\frac{\cosh \pi\epsilon}{1+2i\epsilon} \mathbf{V} r^{\epsilon} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cosh \pi\epsilon}{1-2i\epsilon} \bar{\mathbf{V}} r^{-\epsilon} + \mathbf{V}_0 \right] \end{aligned} \quad (30)$$

이고⁽¹⁰⁾, 여기에서

$$\begin{aligned} \delta_j(r) &= u_j(r, \pi) - u_j(r, -\pi) \\ &\quad (j = x, y) \end{aligned}$$

이다.

4. 이방성 이종재료의 면내문제에 대한 고유벡터 \mathbf{V} 와 \mathbf{W} 의 결정

식 (8)로 정의되는, 일반적인 이방성재료에 대한 행렬 \mathbf{B} 는 다음과 같다⁽¹⁰⁾.

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= i\mathbf{A}\mathbf{L}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}Im(S_1 + S_2) & -i(S_1 S_2 a_{11} - a_{12}) \\ i(\bar{S}_1 \bar{S}_2 a_{11} - a_{12}) & -a_{22}Im(S_1^{-1} + S_2^{-1}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

식 (31)에서 S_1, S_2 는 식 (6)에서 $l_4(s)=0$ 로 정의되는 특성방정식의 근이며, 행렬 \mathbf{H} 는 영역 I과 영역 II의 재료상수와 각각의 영역에 대한 특성근 S_1 과 S_2 로써 구성되는 행렬이며 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_{II} \\ &= \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} - i\eta\sqrt{H_{11}H_{22}} \\ H_{12} + i\eta\sqrt{H_{11}H_{22}} & H_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

여기에서

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta} \\ \beta &= \eta \frac{\sqrt{H_{11}H_{22}}}{\sqrt{H_{11}H_{22} - H_{12}^2}} \end{aligned}$$

의 관계가 있고, 식 (32)에서 H_{11}, H_{12}, H_{22} 는 각영역에 대한 행렬 \mathbf{B} 로써 구성되는 행렬 \mathbf{H} 의 성분이며 다음과 같다.

$$H_{11} = [a_{11}(\zeta_1 + \zeta_2)]_I + [a_{11}(\zeta_1 + \zeta_2)]_{II} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} H_{22} &= \left[a_{22} \left(\frac{\zeta_1}{\alpha_1^2 + \zeta_1^2} + \frac{\zeta_2}{\alpha_2^2 + \zeta_2^2} \right) \right]_I \\ &\quad + \left[a_{22} \left(\frac{\zeta_1}{\alpha_1^2 + \zeta_1^2} + \frac{\zeta_2}{\alpha_2^2 + \zeta_2^2} \right) \right]_{II} \end{aligned} \quad (34)$$

$$H_{12} = [a_{11}(\alpha_1 \zeta_2 + \alpha_2 \zeta_1)]_I + [a_{11}(\alpha_1 \zeta_2 + \alpha_2 \zeta_1)]_{II} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \eta\sqrt{H_{11}H_{22}} &= [a_{11}(\alpha_1 \alpha_2 - \zeta_1 \zeta_2) - a_{12}]_I \\ &\quad - [a_{11}(\alpha_1 \alpha_2 - \zeta_1 \zeta_2) - a_{12}]_{II} \end{aligned} \quad (36)$$

여기에서

$$S_1 = \alpha_1 + i\zeta_1, \quad S_2 = \alpha_2 + i\zeta_2$$

그리고, 식 (29)와 (30)에서 고유벡터 \mathbf{V}, \mathbf{V}_0 는 다음과 같이 정규화(normalize)하여 구할 수 있다.

$$(\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}) \mathbf{V} = [-i, *, *]^T = \mathbf{W} \quad (37)$$

$$(\mathbf{H}^{-1} + \bar{\mathbf{H}}^{-1}) \mathbf{V}_0 = [*, *, 1]^T = \mathbf{W}_0 \quad (38)$$

식 (37)은 면내문제(in-plane problem)에 대한 관계식이며, 식 (38)은 면외문제(anti-plane problem)에 대한 관계식이며, 2차원 면내 문제에서는 $\mathbf{V}_0 = \mathbf{W}_0 = 0$ 이다. 그리고 식 (37)과 (38)에서 *는 식 (26)에서 고유벡터 \mathbf{V} 가 0 아닌 고유벡터를 가지기 위한 고유치이며, 고유벡터 \mathbf{W} 의 성분이 되고 본 연구자는 다음과 같이 구하였다.

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \begin{bmatrix} -i \\ (\sqrt{H_{11}H_{22} - H_{12}^2}/H_{22}) - i(H_{12}/H_{22}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -i \\ W_1 - iW_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (39)$$

식 (39)를 이용하여 식 (37)의 고유벡터 \mathbf{V} 를 구하면 다음과 같다.

$$\mathbf{V} = d \begin{bmatrix} \frac{H_{12}}{H_{22}} - i \frac{(H_{11}H_{22} + H_{12}^2)}{(H_{22}\sqrt{H_{11}H_{22} - H_{12}^2})} \\ 1 - i \frac{2H_{12}}{\sqrt{H_{11}H_{22} - H_{12}^2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} G_1 - iP_1 \\ G_2 - iP_2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

여기서

$$d = (H_{11}H_{22}(1-\eta^2) - H_{12}^2) / 2\sqrt{H_{11}H_{22} - H_{12}^2}$$

이고, 식 (39)와 (40)에서 $W_j, P_j, G_j (j=1, 2)$ 는 실수부와 허수부를 나타내는 계수이다.

5. 이방성 이종재료 접합계면 균열에 대한 응력확대계수의 정의

등방성 재료간의 접합계면 균열에 대한 응력확대계수 $\mathbf{K} (=K_1 + iK_2)$ 의 정의는 Rice⁽¹¹⁾등에 의해 정의된 바 있으며, Suo⁽¹⁰⁾는 이방성 이종재료 접합계면 균열에 대한 응력확대계수 \mathbf{K} 를 면내 문제에서 정의하면 응력과 상대변위를 다음과 같이 표현하였다.

$$\sigma(r) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} [\mathbf{K} \mathbf{W} r^{i\epsilon} + \mathbf{K} \mathbf{W} r^{-i\epsilon}] \quad (41)$$

$$\delta(r) = 2\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[\frac{\cos h\pi\epsilon}{1+2i\epsilon} \mathbf{K} \mathbf{V} r^{i\epsilon} + \frac{\cos h\pi\epsilon}{1-2i\epsilon} \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{V}} r^{-i\epsilon} \right] \quad (42)$$

여기에서

$$\mathbf{K} = K_1 + iK_2$$

이고 식 (41), (42)에서 $r^{i\epsilon} = e^{i\epsilon \ln r}$ 의 항에 의해 응력확대계수의 값이 r 의 측정 단위에 의존하는 모호성을 Sun⁽¹⁵⁾ 등이 지적한 바 있다. 따라서 본 연구에서는 Suo⁽⁹⁾가 표현한 식 (41), (42)에서 $r^{i\epsilon}$ 항을 임의의 길이 l 로써 무차원화하여 다음과 같이 정의한다.

$$\sigma(r) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} [\mathbf{K} \mathbf{W} (r/l)^{i\epsilon} + \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{W}} (r/l)^{-i\epsilon}] \quad (43)$$

$$\delta(r) = 2\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[\frac{\cos h\pi\epsilon}{1+2i\epsilon} \mathbf{K} \mathbf{V} (r/l)^{i\epsilon} + \frac{\cos h\pi\epsilon}{1-2i\epsilon} \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{V}} (r/l)^{-i\epsilon} \right] \quad (44)$$

Rice⁽¹¹⁾, Kim⁽¹⁶⁾ 등은 식 (43)과 (44)의 임의의 길이 l 를 매우 작은 길이 $l = 1\mu\text{m}$ 로 선택하고 있으며, 이때는 균열길이에 관계없이 매우 작은 응력진동 특이영역을 가지게 되나, $l = 2a$ 를 선택하면 무한판의 경우에서 균열길이가 변화하여도 K_2/K_1 가 일정하게 되는 것으로 생각된다. 따라서 l 의 선택은 어느 것으로도 정의할 수 있지만 본 논문에서는 균열길이 $2a$ 로써 무차원화하여 식 (43)과 (44)

와 같이 응력확대계수를 정의하였다.

6. 응력확대계수의 외삽식 표현

Fig. 2에서 영역 I과 영역 II가 일반적인 이방성 재료인 경우의 문제를 경계요소법으로 해석하기 위한 응력확대계수의 외삽식을 본 논문에서는 다음과 같이 구하였다. 식 (43)과 식 (44)에서 $\mathbf{K} = K_1 + iK_2$ 를 대입한 후, 식 (9)와 식 (10)과 식 (39)과 (40)을 이용하여, 먼저 응력의 항으로 정의되는 외삽식을 구하면 다음과 같다.

$$K_1 = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \\ = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} [\sqrt{(W_1^2 + W_2^2) \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yy}^2 - 2W_2 \sigma_{xy} \sigma_{yy}}] / W_1 \quad (45)$$

$$\frac{K_2}{K_1} = \log_{r \rightarrow 0} \frac{A - C(\sigma_{xy}/\sigma_{yy})}{D(\sigma_{xy}/\sigma_{yy}) - B} \quad (46) \\ A = \sin\theta, \quad B = \cos\theta, \\ C = (W_1 \cos\theta + W_2 \sin\theta) \\ D = (W_2 \cos\theta - W_1 \sin\theta) \\ \theta = \epsilon \ln(r/l)$$

이며, 식 (45)의 K_1 를 접합계면 응력확대계수 (interfacial stress intensity factor)라 부르기도 한다. 그리고 W_1, W_2 는 식 (39)에 의해 정의된 값이다. 그리고 식 (44)의 상대변위를 위와 같은 방법으로 응력확대계수 K_1 과 K_2 의 항으로 나타내면, δ_x, δ_y 는 각각

$$\delta_x = d_1 K_1 + t_1 K_2 \\ \delta_y = d_2 K_1 + t_2 K_2 \quad (47)$$

이고, 여기서

$$d_k = G_k (\cos\theta + 2\epsilon \sin\theta) + P_k (\sin\theta - 2\cos\theta) \\ t_k = G_k (2\cos\theta - \sin\theta) + P_k (\cos\theta + 2\epsilon \sin\theta) \quad (48)$$

이고, G_k, P_k 는 식 (40)에서 구해지는 값이다. 따라서 외삽식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K_1 = \sqrt{K_1^2 + \sqrt{2}^2} \\ = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 + 4\epsilon^2}{4\cosh\pi\epsilon} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \\ - \frac{\sqrt{(t_2 \delta_x - t_2 \delta_y)^2 + (d_1 \delta_y - d_2 \delta_x)^2}}{d_1 t_2 - t_1 d_2} \quad (49)$$

$$\frac{K_2}{K_1} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{d_1 \delta_y - d_2 \delta_x}{t_2 \delta_x - t_1 \delta_y} = \frac{d_1 - \left(\frac{\delta_y}{\delta_x}\right) - d_2}{t_2 - t_1 \left(\frac{\delta_y}{\delta_x}\right)} \quad (50)$$

식 (45), (46), (49), (50)의 이방성 재료에 대한 외삽식에서 직교이방성 재료인 경우 즉, 식 (39),

(40)에서 $H_{12}=0$ 이면 $Suo^{(10)}$ 의 결과와 일치하게 되며, 또한 등방성 재료가 될 경우 즉, 식 (39), (40)에서 $H_{11}=H_{22}, H_{12}=0$ 이면 Yuuki와 Cho⁽¹⁷⁾의 외삽식과 일치한다.

7. 수치해석 및 결과 고찰

일반적인 이방성 이종재료 접합계면 균열에 대한 응력확대계수의 외삽식에 따라 접합계면 균열을 경계요소법으로 수치해석하였다. 해석모델은 중앙관통 접합계면 균열로 Fig. 3과 같이 설정하였다. 본 해석에서 사용한 무차원 응력확대계수(nondimensional stress intensity factor) F_i 는

$$F_i = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} / \sigma_0 \sqrt{\pi a} = K_i / \sigma_0 \sqrt{\pi a} \quad (51)$$

이다. 그리고, 본 해석에서 택한 응력상태는 평면 응력상태이며, 사용한 요소수는 80~90개이다.

7.1 등방성 이종재료와 직교이방성 이종재료의 유한판의 중앙관통 접합계면 균열 해석

Fig. 3의 모델에서, 식 (49), (50)을 사용하였을 때 영역 I과 영역 II가 등방성 재료인 경우 각영역의 영률(Young's modulus : E)의 변화에 따른 F_i 의 값을 BEM에 의해 구한 결과를 나타낸 것이

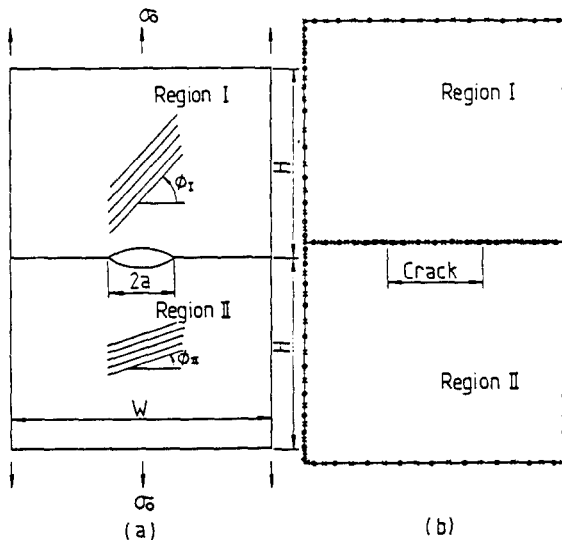


Fig. 3 (a) A central interface crack in finite dissimilar plate under uniform tension
(b) Model of BEM analysis

Fig. 4이다.

그리고, Table 1은 영역 I과 영역 II가 같은 등방성 재료, 즉 등방균질 재료 내의 중앙관통균열에 대한 Isida⁽¹⁸⁾의 결과와 비교한 것이며, Table 2는 등방성 재료간의 이종재료 접합계면 균열에 대한 Yuuki와 Cho⁽¹⁷⁾의 해석 결과와 비교한 것으로, 요소의 분할방법과 사용 요소수에 따라 약간의 차이는 있으나, 비교적 잘 일치하고 있다.

Table 3은 영역 I의 재료를 직교이방성로써 고정하고, 영역 II의 직교이방성 재료를 변화시켜,

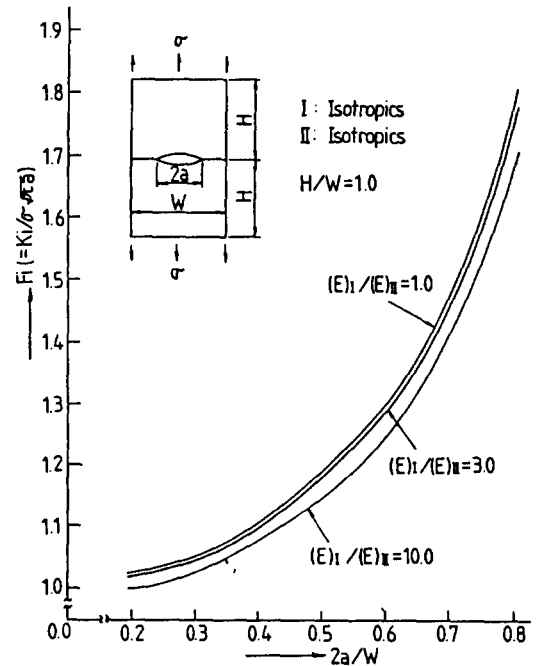


Fig. 4 Variation of interfacial stress intensity factors for $2a/W$

Table 1 Stress intensity factor F_i for $(E)_I = (E)_{II}$

$2a/W$	Isida ⁽¹⁸⁾	BEM (This study)
0.2	1.0246	1.0225
0.3	1.0577	1.0534
0.4	1.1094	1.1084
0.5	1.1867	1.1870
0.6	1.3033	1.3013
0.7	1.4882	1.4834
0.8	1.8160	1.8111

Table 2 Comparison of interfacial stress intensity factors F_i for $(E)_I/(E)_{II}$
(upper : $F_i = K_i/\sigma\sqrt{\pi a}$, lower in () : K_2/K_1)

$2a/W$	$(E)_I/(E)_{II}=3.0$		$(E)_I/(E)_{II}=10.0$	
	This study	Yuuki ⁽¹⁷⁾	This study	Yuuki ⁽¹⁷⁾
0.2	1.018	1.017	1.000	1.000
	(-0.099)	(-0.105)	(-0.163)	(-0.173)
0.3	1.045	1.050	1.028	1.032
	(-0.097)	(-0.102)	(-0.161)	(-0.168)
0.4	1.099	1.101	1.078	1.079
	(-0.095)	(-0.100)	(-0.156)	(-0.163)
0.5	1.175	1.176	1.150	1.149
	(-0.093)	(-0.099)	(-0.156)	(-0.161)
0.6	1.285	1.289	1.251	1.254
	(-0.093)	(-0.096)	(-0.157)	(-0.161)
0.7	1.459	1.476	1.412	1.419
	(-0.098)	(-0.102)	(-0.160)	(-0.164)
0.8	1.771	1.783	1.704	1.710
	(-0.106)	(-0.109)	(-0.169)	(-0.175)

Table 3 Non-dimensional stress intensity factors of a central interface crack in a finite dissimilar orthotropic plate for $2a/W=0.4$ (plane stress, $\nu_I=\nu_{II}=0.3$), (upper : $F_i = K_i/\sigma\sqrt{\pi a}$, lower in () : K_2/K_1),
($(E_2/E_1)_I=0.5$, $(E_1)_I=(E_2)_{II}=100\text{N/mm}^2$)

$(E_2/E_1)_{II}$	$\rho=3.32$	$\rho=1$	$\rho=0.49$
0.5	1.300	1.316	1.331
0.45	1.3170	1.334	1.349
	(-1.566×10 ⁻³)	(-8.07×10 ⁻³)	(-9.340×10 ⁻³)
0.4	1.337	1.3561	1.371
	(-1.207×10 ⁻²)	(-1.707×10 ⁻²)	(-1.985×10 ⁻²)
0.3	1.392	1.415	1.433
	(-2.813×10 ⁻²)	(-3.885×10 ⁻²)	(-4.579×10 ⁻²)
0.1	1.697	1.748	1.772
	(-1.407×10 ⁻²)	(-0.115)	(-0.143)

수렴의 여부를 나타낸 결과로써, $(E_2/E_1)_I=(E_2/E_1)_{II}=0.5$ 인 접합재의 경우(정의가 되지 않음)로 수렴하고 있음을 볼 수 있다. 이때 정의한 직교이방성 재료의 탄성계수들 간의 관계식은 다음과 같다^(10,12).

$$\rho = \frac{-2\nu_{12}}{E_1} + \frac{1}{G_{12}} \quad (52)$$

$$2\sqrt{\frac{1}{E_1 E_2}}$$

여기서 $E_1=E_{11}$, $E_2=E_{22}$ 는 각각 섬유(fiber) 방향 및 섬유방향 수직인 방향의 영률이며, ν_{12} 는 프와송비이고, G_{12} 는 전단계수이다.

그리고, Table 3에서 같은 $(E_2/E_1)_{II}$ 에 대하여 ρ 의 값이 작을 수록 무차원 응력확대계수 값이 증가함을 볼 수 있다.

7.2 등방성 재료와 이방성 재료의 유한판의 중앙관통접합계면 균열 해석

Fig. 5~Fig. 7은, 영역 II가 등방성 재료이고 영역 I은 식 (53)의 관계식으로 정의되는 재료상수들의 관계에서 $\rho=1$ 인 경우이고, 화이버 각도가 0° ($\phi_1=0^\circ$), 45°, 90°인 복합재가 접합된 경우 균열이 없는 접합계면에서의 응력분포를 나타낸 것이다.

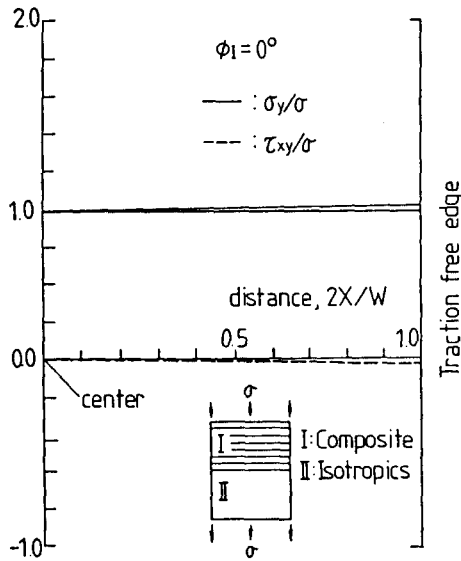


Fig. 5 Stress distributions on the interface of the finite dissimilar plate without a crack subjected to a uniform tension for $\phi_1=0^\circ$

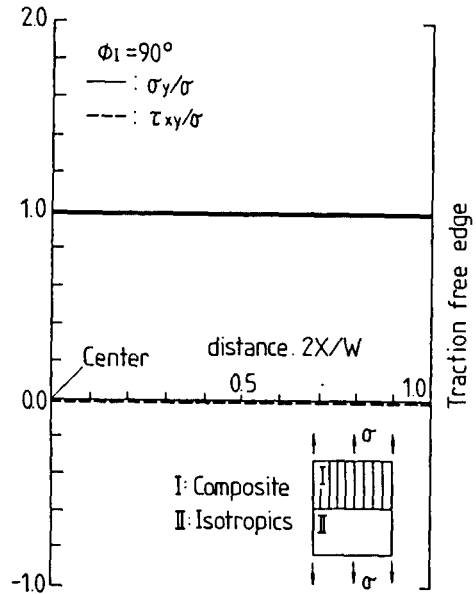


Fig. 7 Stress distributions on the interface of the finite dissimilar plate without a crack subjected to a uniform tension for $\phi_1=90^\circ$

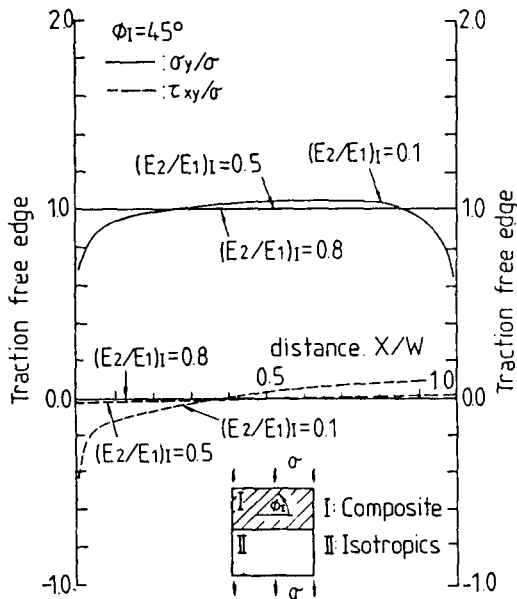


Fig. 6 Stress distributions on the interface of the finite dissimilar plate without a crack subjected to a uniform tension for $\phi_1=45^\circ$

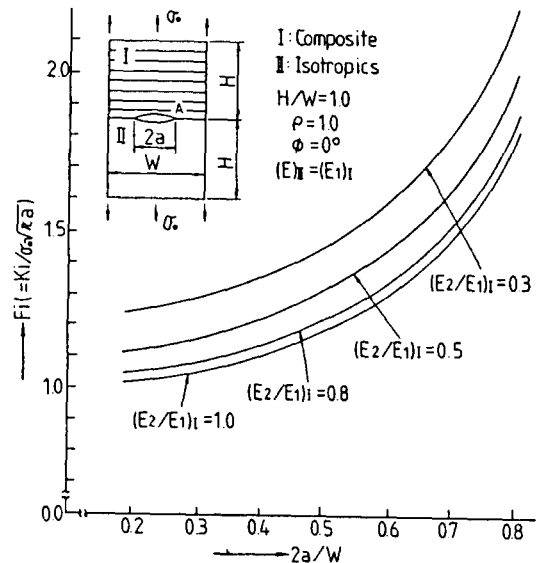


Fig. 8 Variation of Interfacial stress intensity factors for $2a/W$ at the point A ($\phi_1=90^\circ$)

$(E_1)_{II} = 100 \text{ N/mm}^2$, $(\nu_{12})_I = (\nu_{21})_I = 0.3$ 이고 $(E_1)_I = (E_1)_{II}$ 인 경우, $(E_2/E_1)_I = 0.8, 0.5, 0.1$ 에 대해 $\phi_1 = 0^\circ$ 일 때 σ_y 는 거의 같은 값을 가지며, τ_{xy} 는 거

의 0에 가까운 값을 가지고 있다. 그러나 $\phi_1 = 45^\circ$ 일 때 접합계면의 중앙부에서는 $(E_2/E_1)_I$ 가 적을수록 σ_y 값은 증가하지만 자유단에 가까울수록 감소하는 경향이다. 그러나 $\phi_1 = 90^\circ$ 일 때는 $\phi_1 = 0^\circ$ 와 같이 $(E_2/E_1)_I$ 의 변화에 대해 거의 같은 값을 나타내고 있다.

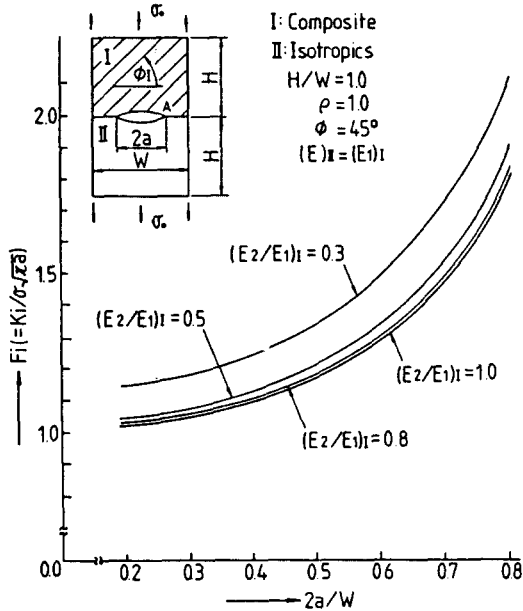


Fig. 9 Variation of Interfacial stress intensity factors for $2a/W$ at the point A ($\phi_1 = 45^\circ$)

Fig. 8~Fig. 10은 $(E_2/E_1)_I = 0.8, 0.5, 0.3$ 일 때, $\phi_1 = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 에 대해 접합계면 균열 길이의 증가에 따른 무차원 응력확대계수 F_i 값의 변화를 나타

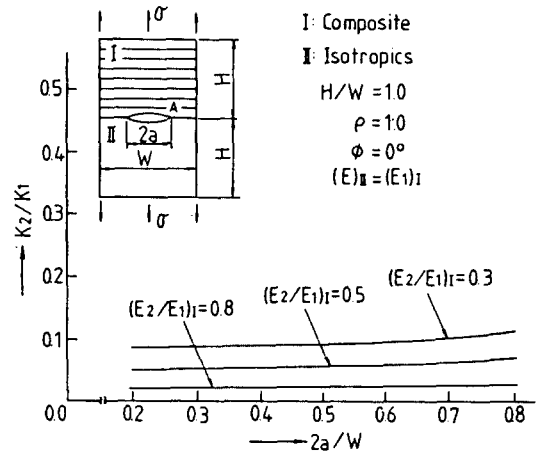


Fig. 11 Variation of K_2/K_1 for $2a/W$ at the point A ($\phi_1 = 0^\circ$)

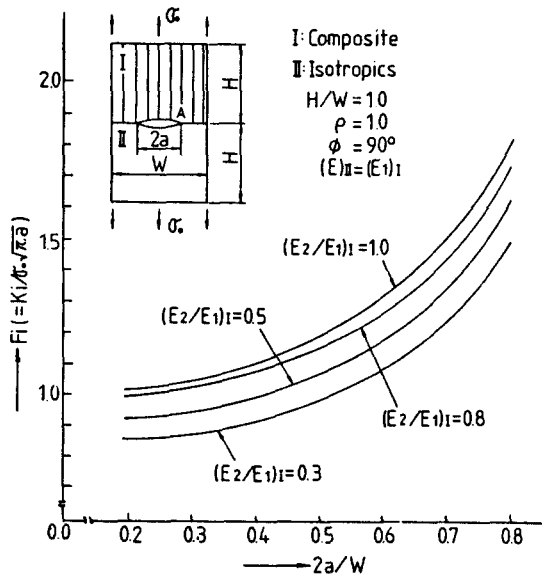


Fig. 10 Variation of Interfacial stress intensity factors for $2a/W$ at the point A ($\phi_1 = 0^\circ$)

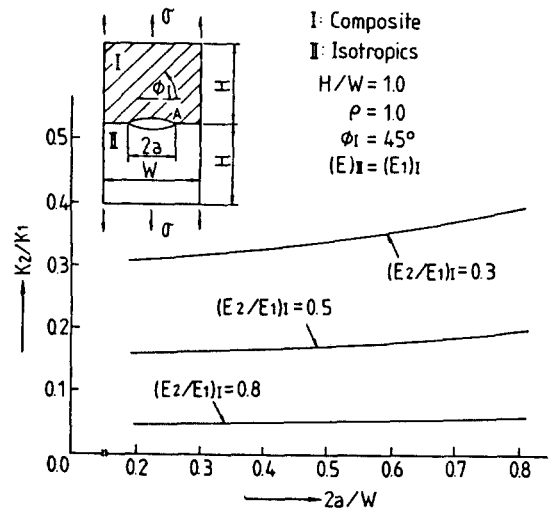


Fig. 12 Variation of K_2/K_1 for $2a/W$ at the point A ($\phi_1 = 45^\circ$)

낸 것이며, Fig. 11~Fig. 13은 K/K_1 의 비에 대한 변화를 나타낸 그림이다. Fig. 8~Fig. 10에서, $\phi_1=0^\circ$ 일 때는 같은 균일 길이에 대해 $(E_2/E_1)_1$ 의 값이 적을 수록 F_i 값은 점점 증가하며, $\phi_1=45^\circ$ 일

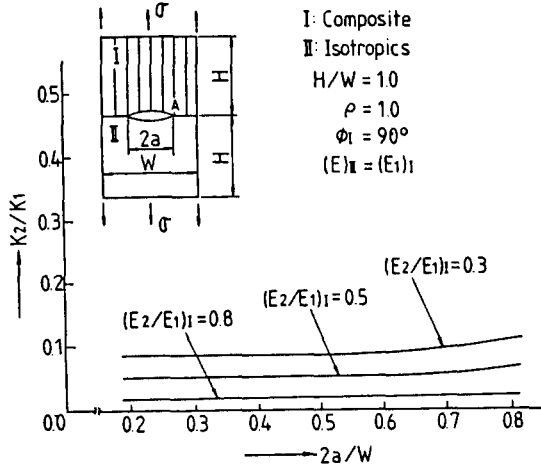


Fig. 13 Variation of K_2/K_1 for $2a/W$ at the point A ($\phi_1=90^\circ$)

경우에도 같은 현상이지만 변화의 폭은 상당히 감소하고 있으며, $\phi_1=90^\circ$ 일 때는 $\phi_1=0^\circ$ 와는 반대로 $(E_2/E_1)_1$ 의 값이 적을 수록 F_i 값이 감소하는 경향을 나타내고 있다. 이러한 현상은 식 (40)~(43)으로서 정의되는 응력확대계수가, 등방성재료간의 접합계면 균열과는 달리 각 영역의 탄성계수(E_1, E_2)의 영향이 고려된 항을 포함하고 있으므로, 화이버 각도가 0° 일 때와 90° 일 때는 서로 상반되는 결과를 나타내며, 이러한 변화의 폭은 $(E_2/E_1)_1$ 의 비가 1에 가까울 수록 적을 것이다.

그리고, K_2/K_1 의 비를 나타낸 Fig. 11~Fig. 13에서, $\phi_1=0^\circ, \phi_1=90^\circ$ 인 경우의 변화폭이 가장 작을 뿐만 아니라, K_2/K_1 의 비의 값도 가장 작은 값이며, 한편 $\phi_1=45^\circ$ 에 접근할수록 K_2/K_1 비의 값은 커지고 있으며, 변화의 폭도 커지고 있다.

Fig. 14는 $2a/W=0.4$ 일 때 화이버 각도, ϕ_1 변화에 따른 F_i 의 값을 $(E_2/E_1)_1$ 에 대해 나타낸 그림이다. Fig. 14에서 $(E_2/E_1)_1$ 이 1에 가까워지면, F_i 값이 $(E_2/E_1)_1=1$ 의 값에 접근하며, $\phi_1=60^\circ$ 부근에서 $(E_2/E_1)_1$ 의 비에 따른 F_i 의 값이 서로 바뀌어지는 현상을 볼 수 있다.

8. 결 론

본 연구의 결과로 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

(1) 일반적인 이방성재료간의 접합계면 균열(interface crack)에 대한 Suo의 응력 및 변위장의 표현에 필요한 고유벡터를 구하였고, 접합계면 균열의 응력확대계수를 명확히 정의하여, 경계요소법 및 유한요소법과 같은 수치해석 방법을 이용하여 응력확대계수를 구할 수 있는 외삽식을 제안하였다.

(2) 이방성 이종재료의 접합계면 균열에 대한 응력확대계수의 정의는 가장 일반적인 경우이므로, 등방성 재료간의 접합계면 뿐만 아니라, 등방성과 직교이방성 재료, 그리고, 직교이방성 재료간의 접합계면 균열 문제에도 사용할 수 있다.

(3) 복합재료와 등방성재료간의 접합계면 균열의 응력확대계수를 경계요소법을 이용하여, 본 연구에서 제안한 외삽식으로 해석 가능함을 확인할 수 있었고, 섬유(fiber)방향에 따른 탄성계수의 변화에 의한 응력확대계수 K_i 의 영향은 섬유방향에 접합계면균열과 일치하거나, 수직일 때가 가장 크게 나

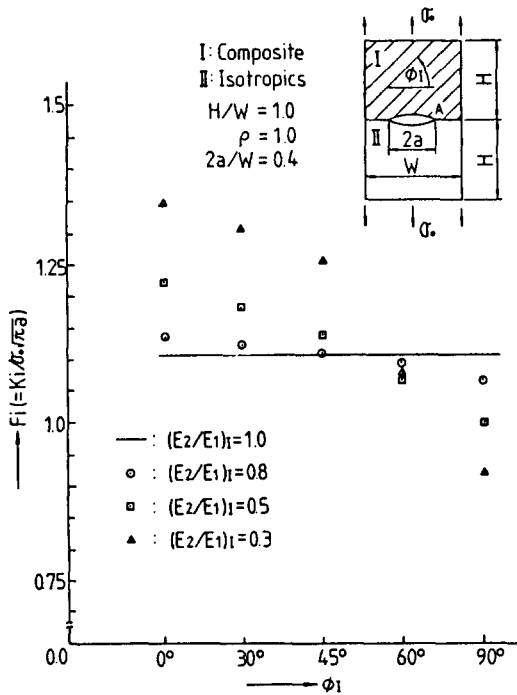


Fig. 14 Variation of interfacial stress intensity factors for ϕ_1 at the point A

타나며, 섬유각도가 45°근방에서 가장 적게 나타남을 수치해석의 예를 통하여 알 수 있었다.

(4) 여러가지의 이종재료에 대한 유한판내의 접합계면 균열의 응력확대계수의 수치해석이 가능하므로, 접합계면 균열의 실험적 연구가 기대된다.

참 고 문 헌

- (1) Rice, J.F., 1988, "Elastic Fracture Mechanics Concepts for Interface Crack", *J. Appl. Mech.* 55, pp. 98~103.
- (2) Williams, M.L., 1959, "The Stress Around a Fault or Crack in Dissimilar Media", *Bull. Seism. Soc. Am.* 49, pp. 199~204.
- (3) Cominou, M., 1977, "The Interface Crack", *J. Appl. Mech.* 44, pp. 631~636.
- (4) Atkinson, C., 1982, "The Interface Crack with Contact Zone (an Analytical Treatment)", *Int. J. Fracture* 36, pp. 161~177.
- (5) Mark, A.F., Keer, L.M., Chen, S.H. and Lewis, J.L., 1980, "A No-Slip Interfact Crack", *J. Appl. Mech.* 47, pp. 347~350.
- (6) Lee, K.Y. and Choi, H.J. 1988, "Boundary Element Analysis of Stress Intensity Factors for Bimaterial Interface Cracks", *Engng Fracture Mech.* Vol. 29, No. 4, pp. 461~472.
- (7) Imanaka, M., Kishimoto, W., Okita, K., Nakayama, N. and Nagai, H., 1989, "Fatigue Life Estimation of Adhesive Shaft Joints", *Int. J. Fracture* 41, pp. 223~228.
- (8) Ting, T.C.T., 1986, "Explicit Solution and Invariance of the Singularities at an Interface Crack in Anisotropic Composites" *Int. J. Solids Structures* Vol. 22, No. 9, pp. 965~983.
- (9) Wang, S. and Choi, I., 1983, "The Interface Crack Between Dissimilar Anisotropic Composite Materials", *ASME J. Applied Mech.*, Vol. 50, pp. 169~178.
- (10) Suo, Z., 1989, "Singularity, Interface and Crack in Dissimilar Anisotropic Media", *Havard University Report Mech-137.*
- (11) 李甲來, 曹相鳳, 崔鎔湜, 1990, "직교이방성 재료에 대한 경계요소법의 기본해에 대한 연구", *한국자동차학회지*, Vol.12, No.2, pp. 51~58.
- (12) 李甲來, 曹相鳳, 崔鎔湜, 1991, "경계요소법(BEM)에 의한 복합재료의 응력확대계수 해석", *대한기계학회논문집*, 제15권, 제1호, pp.179~189.
- (13) Leknitskii, G., 1963, "Theory of Elasticity on an Anisotropic Elastic Body, Holden-Day Inco., pp. 117~128.
- (14) Muskhelishvili, N.I., 1954, "Some Basic of the Mathematical Theory Ofelasticity", Published by P. Noordhof. LTD, pp. 447~470.
- (15) Sun, C.T. and Jih, C.T., 1987, "On Strain Release Rates for Interfacial Cracks in Bimaterial Media", *Engng Fracture Mech.* 28, pp. 13~20.
- (16) Kim, T.W, Im, S. and Earmme, Y.Y., 1990, "Thermoelastic Analysis of an Interfacial Crack in Bimaterial", *Proceeding of the KSME/JSME Joint Conference Fracture and Strength 90*, pp. 514~519.
- (17) Yuuki, R. and Cho, .B., 1989, "Efficiency Boundary Element Analysis of Stress Intensity Factors for Interface Cracks in Dissimilar Materials", *Engng Fracture Mech.* 34, pp. 179~188.
- (18) Isida, M. and Noguchi, H., 1973, "An Arbitrary of Cracks in Bonded Semi-Infinite Bodies under In-plane Loads", *Trans. JSME* 49, pp. 36~45.