

(技術論文)

평판의 균일압축에 의한 좌굴현상에 관한 연구

김 창 옥*

(1990년 12월 26일 접수)

A Study on Buckling of Plate under Uniform Compressive Stress

Chang Ok Kim

Key Words : Buckling Coefficient(좌굴상수), Length of Rectangular Plate(4각 평판의 길이), Plate Strain Energy(평판의 스트레인 에너지), Plate Potential Energy due to Applied Loads(적용하중에 의한 평판 포텐셜 에너지), NASTRAN Program(미 항공우주국 구조해석 프로그램)

Abstract

An analytical study is conducted to investigate the buckling stress of simple-supported rectangular plate, with a rectangular cut-out at center of the plate, under uniform axial compression.

The main objective is to find the plate thickness distribution produces the highest buckling stress. The study used the minimum total potential energy principle in conjunction with Rayleigh-Ritz method. The present analytical results show that the buckling stress can be increased up to 40% by reducing the thickness at the middle half portion of the plate and increasing the thickness along the unloaded sides. While it can be increased up to 20% by increasing the thickness at the rectangular out-out portion of the plate.

기 호 설 명			
a_{pq}	: 좌굴모드의 크기	β	: 두께비
b	: 4각 평판의 폭	γ	: 폭 비
C_{ij}	: 힘과 변위에 대응되는 영향상수	ϵ	: 단위연신률
D	: 단위길이당 강성도, $Et^3/12(1-\nu^2)$	λ	: 가로세로비
E	: 인장 및 압축시 탄성계수	ν	: 프와송 비
K	: 좌굴상수	ω	: 변위성분
L	: 4각 평판의 길이	σ_{x0}	: x 축에 대한 초기응력
m	: 모드의 수	σ_{cr}	: 평판두께의 임계응력
P_{cr}	: 좌굴하중	ζ, η	: x 와 y 축에 대한 공칭좌표
t	: 4각 평판의 두께	Π	: 총 포텐셜 스트레인 에너지
U	: 평판의 스트레인 에너지	Π^*	: 강성도를 갖는 총 포텐셜 스트레인 에너지
V	: 적용하중에 의한 포텐셜에너지		
α	: 길이비		

첨 자
 m, n, p, q : 인덱스성분

* 정회원, 국방과학연구소

1. 서 론

항공기 외피가 응력을 전달할 수 있는 금속박판으로 대체된 이후 최소중량을 갖는 박판구조설계가 꾸준히 수행되어 오았다. 이러한 박판설계에서는 특히 박판과 동일한 평면상에서의 압축하중에 의한 안정성(좌굴)문제가 심각하게 대두된다.

1774년에 최초로 Euler가 기둥문제로 좌굴현상을 설명하였으며 1781년에 Bryan이 선박외피 설계를 위하여 균일압축력을 받는 단순지지된 직사각형, 등방성 균일재질 평판의 좌굴하중을 포텐셜 에너지(potential energy)방법으로 구하였다. 그 이후 여러가지 박판현상과 경계조건 및 하중조건에 대하여 이론적인 좌굴해석방법들이 Timoshenko^(1,2), Levy, Donnell, Hoff등에 의하여 개발되었으며 좌굴응력뿐만 아니라 좌굴이후의 현상까지 연구되어 왔다. 1960년대 이후 고성능 컴퓨터의 발달로 복잡한 형상의 구조물을 해석할 수 있는 유한요소법 등의 수치 해석법이 급속히 발달되었으며 이 유한요소법을 사용한 NASTRAN(NASA Structural Analysis)같은 종합적인 대형 구조해석 프로그램이 개발되고 있다. 그러나 NASTRAN과 같은 대형 프로그램을 사용할 수 없거나 혹은 짧은 시간내에 근사해가 요구될 경우 일반적으로 최소 Potential Energy Principle에 의한 Rayleigh-Ritz방법^(3,4)를 사용하여 좌굴해석을 효율적으로 할 수 있다.

본 논문에서는 균일압축력을 받으며 네변이 단순지지된 비균일 두께를 가진 평판의 좌굴응력을 Rayleigh-Ritz방법으로 해석하여 평판두께를 적절히 분포함으로써 동일한 평판중량으로 더 큰 좌굴하중을 얻을 수 있음을 보이며 또한 동일한 문제를 NASTRAN프로그램을 사용하여 해석함으로써 그 정확도를 입증한다.

본 연구의 결과와 해석방법은 중량감소가 중요시 되는 항공기 외피설계에 응용될 수 있으며 또한 창문이 있는 항공기 외피의 설계해석으로도 발전될 수 있다.

2. 평판에 따른 좌굴현상

본 논문에서는 길이 방향으로 균일압축응력을 받는, 길이와 폭이 각각 L 과 b 가 네변이 단순지지된 평판의 두께분포에 따른 좌굴응력(buckling stress)

과 좌굴형상(buckling mode shape)의 변화를 살펴 보고자 한다. 다시 말하면 동일한 평판체적(중량)과 길이 및 폭을 가진 여러가지 비균일 두께의 평판 중에서 가장 높은 좌굴응력을 제공하는 두께분포를 찾고자 하는 것이다. 이렇게 찾아진 평판형상은 설계좌굴응력이 제시된 경우 최소 중량을 가진 체적형상이 되기 때문에 평판구조설계에 상당히 유용한 자료가 된다. 문제를 보다 단순화하기 위하여 본 연구에서는 Fig. 1에서 보이는 바와 같이 불연속 두께변화(평판두께에 대한 비 β 로 표시)를 좌표축에 대칭되도록 설정한다. 즉 평판의 중앙부분에 4각홈($\beta < 1$ 경우)이나 4각돌출부($\beta > 1$ 경우)가 존재하는 형상이 되는데 이의 길이와 폭은 평판의 길이와 폭에 대한 비 α 와 γ 를 사용하여 각각 αL 과 γb 로 표시한다. 여기서 α, β, γ 뿐만 아니라 평판중량비 L/b 를 변화시켜 각각의 좌굴응력을 구하도록 한다. 이 좌굴응력을 동일체적을 가진 균일두께 평판의 좌굴응력과 비교하도록 한다.

문제의 해석은 최소 총 포텐셜에너지(minimum total potential energy) Principle에 의한 Rayleigh-Ritz방법을 사용하였으며 이때 포텐셜에너지는 Kirchhoff-Love의 가정에 의거한 미소 변형률-변위관계식과 평면응력상태(state of plane stress)의 응력으로 구한다.

평판의 재질은 균일등방성이며 초기응력과 변형이 없는 것으로 가정한다. 또한 좌굴이 선형강성영역(Hooke의 법칙 만족)내에서 발생하는 경우에만 고려한다. 본 해석결과의 정확도를 입증하기 위하여 몇가지 평판형상에 대하여 NASTRAN프로그램을 사용하여 해석하기로 한다.

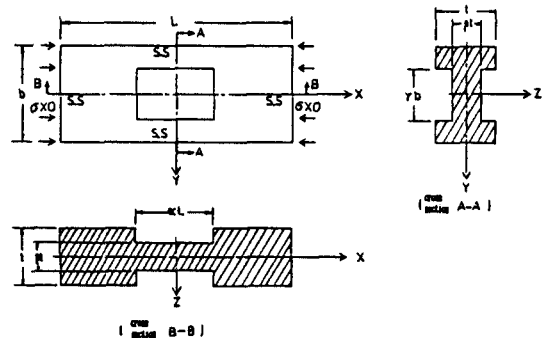


Fig. 1 Plate model

3. 스트레인 에너지 (Strain Energy)

Fig. 1의 평판에 축방향으로 균일압축응력 σ_{xo} 가 작용할때 내부응력에 의한 평판의 스트레인 에너지 U 는

$$U = \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x \epsilon_y + \sigma_y \epsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz \quad (1)$$

인데 여기에 2차원 평면응력상태에 대한 Hooke의 법칙인

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{1-\nu^2} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (2)$$

을 대입하고 Kirchhoff-Love의 가정에 입각한 미소변형률과 변위(곡률)의 관계식

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -Z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= -Z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \epsilon_{xy} &= -2Z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3)$$

을 적용하면 식 (1)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-t/2}^{t/2} Z^2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right\} dx dy dz \end{aligned} \quad (4)$$

그런데 평판은 x , y , z 에 대해 모두 대칭이므로 x , y 평면의 제 1 사분면을 고찰하여 정리한 굽힘스 트레인 에너지는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} U &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[8 \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-t/2}^{t/2} Z^2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy dz \right. \\ &\quad \left. + 8 \int_0^{L/2} \int_{b/2}^{b/2} \int_0^{t/2} Z^2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy dz \right. \\ &\quad \left. + 8 \int_0^{L/2} \int_0^{b/2} \int_0^{t/2} Z^2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. \left. \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy dz \right] \quad (5)$$

4. 포텐셜 에너지 (Potential Energy)

평판에 균일압축응력 σ_{xo} 가 작용할 때의 포텐셜 에너지는 Fig. 1에서 $a=1$ 인 경우 즉, 균일단층단 면평판일 경우에는

$$\begin{aligned} V_a &= -1/2 \sigma_{xo} \left[\int_0^{aL/2} \int_{b/2}^{b/2} \int_0^{t/2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]^2 dx dy dz \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{aL/2} \int_0^{b/2} \int_0^{t/2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]^2 dx dy dz \right] \end{aligned} \quad (6)$$

이고 4각형이 있는 비균일단층단면의 평판인 경우, 즉, $a \neq 1$ 인 경우에 있어서는

$$V_b = -2\sigma_{xo} \int_0^{L/2} \int_0^{b/2} \int_0^{t/2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy dz \quad (7)$$

이다.

5. 최소 총 포텐셜 에너지 (Minimum Total Potential Energy)

압축응력이 작용하는 평판의 총 포텐셜에너지 Π 는 내부응력에 의한 굽힘스 트레인 에너지 U_b 와 포텐셜에너지 V 의 합이므로 $a=1$ 인 경우에는 식 (5)와 식 (6)으로부터

$$\begin{aligned} \Pi_a &= U + V_a \text{는} \\ \Pi_a &= \frac{Et^2}{12(1-\nu^2)} \left[\int_{aL/2}^{L/2} \int_{b/2}^{b/2} 2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{aL/2} \int_{b/2}^{b/2} 2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \right. \\ &\quad \left. + \frac{E\beta^3 t^3}{12(1-\nu^2)} \left[\int_0^{aL/2} \int_0^{b/2} 2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\sigma_{xo} t \left\{ \beta \int_0^{L/2} \int_0^{b/2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^{L/2} \int_{b/2}^{b/2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \right\} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

이고 $a \neq 1$ 인 경우에는 식 (5) 식 (7)으로부터

$$\begin{aligned} \Pi_b &= U + V_b \\ \Pi_b &= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left[\int_{aL/2}^{L/2} \int_0^{b/2} 2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\
 & + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 \} dx dy \\
 & + \int_0^{aL/2} \int_{b/2}^{b/2} + 2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \right. \\
 & + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 \} dx dy \\
 & + \frac{E\beta^3 t^3}{12(1-\nu^2)} \left[\int_0^{aL/2} \int_0^{b/2} 2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 \right. \right. \\
 & + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\
 & + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 \} dx dy \\
 & \left. - 2\sigma_{x0} t \int_0^{L/2} \int_0^{b/2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx dy \right] \quad (9)
 \end{aligned}$$

이다. 여기서 무차원 식을 전개하기 위하여 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}
 D & \equiv \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \\
 x & \equiv \frac{L}{2}\xi, \quad y \equiv \frac{b}{2}\eta, \quad w(x, y) \rightarrow w(\xi, \eta) \\
 \lambda & \equiv 2\frac{L}{b} \\
 K & \equiv \frac{\sigma_{x0} t^2}{D\pi^2} : \text{挫屈應力係數}
 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\Pi^* \equiv \frac{\Pi}{(bL/4)(D/L^4)}$$

따라서 식 (8)과 식 (9)는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \Pi_a^* & = 2 \int_a^1 \int_0^1 \left\{ 16 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)^2 + \left(\frac{2L}{b}\right)^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right)^2 \right. \\
 & + 2\nu \left(\frac{4L}{b}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right) \\
 & + 2(1-\nu) \left(\frac{4L}{b}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}\right)^2 \} d\xi d\eta \\
 & + 2 \int_0^a \int_r^1 \left\{ 16 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right)^2 \right. \\
 & + \left(\frac{2L}{b}\right)^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right)^2 + 2\nu \left(\frac{4L}{b}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right) \\
 & + 2(1-\nu) \left(\frac{4L}{b}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}\right)^2 \} d\xi d\eta \\
 & + 2\beta^3 \left[\int_0^a \int_0^1 \left\{ 16 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)^2 + \left(\frac{2L}{b}\right)^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right)^2 \right. \right. \\
 & + 2\nu \left(\frac{4L}{b}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right) \\
 & + 2(1-\nu) \left(\frac{4L}{b}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}\right)^2 \} d\xi d\eta \\
 & \left. - K \frac{\pi^2 \lambda^2}{2} \left\{ \beta \int_0^1 \int_0^1 4 \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 d\xi d\eta \right. \right. \\
 & \left. \left. + \int_0^1 \int_r^1 4 \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 d\xi d\eta \right\} \right] \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_b^* & = 2 \int_a^1 \int_0^1 \left\{ 16 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)^2 + \left(\frac{2L}{b}\right)^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right)^2 \right. \\
 & + 2\nu \left(\frac{4L}{b}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right) \\
 & + 2(1-\nu) \left(\frac{4L}{b}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}\right)^2 \} d\xi d\eta \\
 & + 2 \int_0^a \int_r^1 \left\{ 16 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)^2 + \left(\frac{2L}{b}\right)^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right)^2 \right. \\
 & + 2\nu \left(\frac{4L}{b}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right) \\
 & + 2(1-\nu) \left(\frac{4L}{b}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}\right)^2 \} d\xi d\eta \\
 & + 2\beta^3 \left[\int_0^a \int_0^1 \left\{ 16 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)^2 + \left(\frac{2L}{b}\right)^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right)^2 \right. \right. \\
 & + 2\nu \left(\frac{4L}{b}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right) \\
 & + 2(1-\nu) \left(\frac{4L}{b}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}\right)^2 \} d\xi d\eta \\
 & \left. - K \frac{\pi^2 \lambda^2}{2} \int_0^1 \int_0^1 4 \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 d\xi d\eta \right] \quad (12)
 \end{aligned}$$

그런데 임계응력이 작용하는 경우에는 평판이 중립평형(neutral equilibrium)의 상태에 놓이게 되고 이때에는 총포텐셜에너지가 최소가 되므로

$$\delta \Pi^* = \delta U = \delta V = 0 \quad (13)$$

이다.

6. Rayleigh-Ritz 방법

4각 홈을 가진 평판의 좌굴하중에 대한 근사해를 구하기 위하여 평판의 경계조건을 만족시키는 변위 w 를 대칭좌굴형상과 비대칭좌굴형상으로 나누어 각각 다음과 같이 가정한다.

$$w = \sum_m^{\text{odd}} \sum_n^{\text{odd}} a_{mn} \cos \frac{m\pi}{2} \xi \cos \frac{n\pi}{2} \eta \quad (14)$$

$$w = \sum_m^{\text{even}} \sum_n^{\text{odd}} a_{mn} \sin \frac{m\pi}{2} \xi \cos \frac{n\pi}{2} \eta$$

여기서 a_{mn} 은 좌굴형상계수이다. 좌굴의 특성방정식(characteristic equation)은 식 (13)으로부터

$$\delta \Pi^* / \delta a_{pq} = 0 \quad (15)$$

이므로 $a=1$ 인 경우 식 (14)를 식 (11)에 대입하여 특성방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi_a^* / \delta a_{pq} & = \sum_m^{\text{odd}} \text{or} \sum_n^{\text{even}} \sum_n^{\text{odd}} \left[(m^2 p^2 + \lambda^4 n^2 q^2 \right. \\
 & + \frac{1}{4} \nu \lambda^2 (m^2 q^2 + p^2 n^2) \\
 & \left. + \frac{1}{2} (1-\nu) \lambda^2 m n p q \right] \delta_{mp} \delta_{nq} + (\beta^3 - 1) \{ m^2 p^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\lambda^4}{16} n^2 q^2 + \frac{1}{4} \nu \lambda^2 (m^2 q^2 + p^2 n^2) \{ \delta_{mp} \alpha \\
 & + \frac{2(1-\delta_{mp})}{m-p} \pi \sin \frac{(m-p)\pi}{2} \alpha \\
 & \pm \frac{2}{m+p} \pi \sin \frac{(m+p)\pi}{2} \lambda \{ \delta_{nq} \gamma \\
 & + \frac{2(1-\delta_{nq})}{n-q} \pi \sin \frac{(n-q)\pi}{2} \gamma \\
 & + \frac{2}{n+q} \pi \sin \frac{(n+q)\pi}{2} \gamma \} \\
 & + (\beta^3 - 1) \frac{1}{2} (1-\nu) \lambda^2 mnpq \{ \delta_{mp} \alpha \\
 & + \frac{2(1-\delta_{mp})}{m-p} \pi \sin \frac{(m-p)\pi}{2} \alpha \\
 & \mp \frac{2}{m+p} \pi \sin \frac{(m+p)\pi}{2} \lambda \{ \delta_{nq} \gamma \\
 & + \frac{2(1-\delta_{nq})}{n-q} \pi \sin \frac{(n-q)\pi}{2} \gamma \\
 & - \frac{2}{n+q} \pi \sin \frac{(n+q)\pi}{2} \gamma \} \\
 & - \frac{1}{4} K \lambda^2 \cdot mp \{ \delta_{mp} \delta nq + (\beta - 1) \delta mp \{ \delta nq \gamma \\
 & + \frac{2(1-\delta_{nq})}{n-q} \pi \sin \frac{(n-q)\pi}{2} \gamma \\
 & + \frac{2}{n+q} \pi \sin \frac{(n+q)\pi}{2} \gamma \} \}] a_{mn} = 0 \quad (16)
 \end{aligned}$$

$a \neq 1$ 인 경우의 특성방정식은 식 (14)를 식 (12)에 대입함으로써 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi_b^* / \delta a_{pq} = & \sum_m^{(odd)} \text{or} \sum_n^{(even)} \sum_n^{(odd)} \left[(m^2 p^2 + \frac{\lambda^4}{16} n^2 q^2 \right. \\
 & + \frac{1}{4} \nu \lambda^2 (m^2 q^2 + p^2 n^2) \\
 & + \frac{1}{2} (1-\nu) \lambda^2 mnpq \} \delta mp \delta nq \\
 & + (\beta^3 - 1) \{ m^2 p^2 + \frac{\lambda^4}{16} n^2 q^2 \\
 & + \frac{1}{4} \nu \lambda^2 (m^2 q^2 + p^2 n^2) \} \{ \delta mp \alpha \\
 & + \frac{2(1-\delta_{mp})}{m-p} \pi \sin \frac{(m-p)\pi}{2} \alpha \\
 & \mp \frac{2}{m+p} \pi \sin \frac{(m+p)\pi}{2} \lambda \{ \delta_{nq} \gamma \\
 & + \frac{2(1-\delta_{nq})}{n-q} \pi \sin \frac{(n-q)\pi}{2} \gamma \\
 & + \frac{2}{n+q} \pi \sin \frac{(n+q)\pi}{2} \gamma \\
 & + (\beta^3 - 1) \frac{1}{2} (1-\nu) \lambda^2 mnpq \{ \delta_{mp} \alpha \\
 & + \frac{2(1-\delta_{mp})}{m-p} \pi \sin \frac{(m-p)\pi}{2} \alpha \\
 & \mp \frac{2}{m+p} \pi \sin \frac{(m+p)\pi}{2} \lambda \{ \delta_{nq} \gamma
 \end{aligned}$$

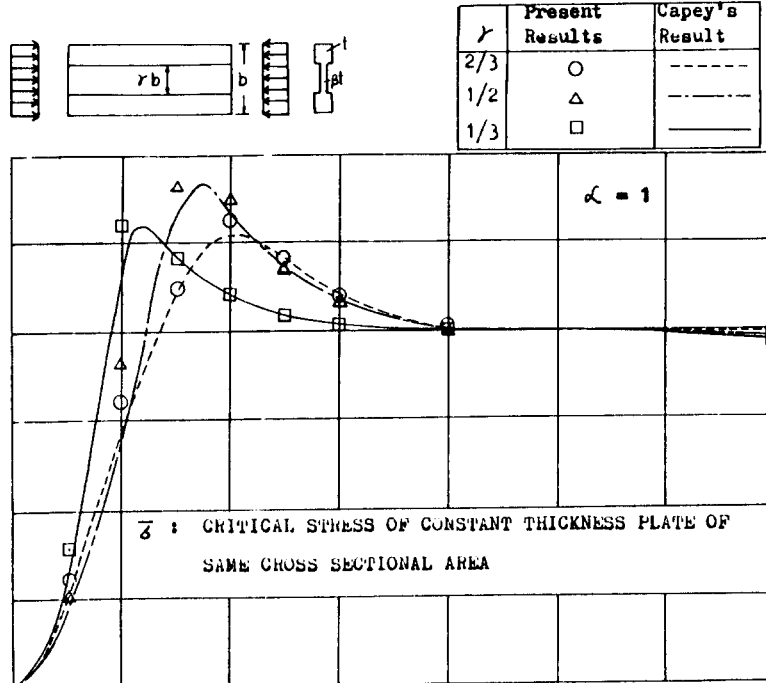


Fig. 2 Comparison of Capery's result

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2(1-\delta_{nq})}{(n+q)\pi} \sin \frac{(n-q)\pi}{2} \gamma \\
 & - \frac{2}{(n+q)\pi} \sin \frac{(n+q)\pi}{2} \gamma \\
 & \left. - \frac{1}{4} K \lambda^2 m p \delta m p \delta n q \right] a_{mn} = 0 \quad (17)
 \end{aligned}$$

여기서 식 (16)과 식 (17)에서 복호동항이 홀수일 경우는 위쪽부호이고 아래쪽부호는 짝수이다. 그러면 식 (16)과 식 (17)의 특성방정식을 간단히 행렬식으로 표현하면

$$\delta \Pi^* / \delta a_{pq} = [A] \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = 0 \quad (18)$$

이고 식 (18)이 Non-trivial Solution을 가지 위해서는 행렬 A의 Determinant가 0이어야 한다.

즉 $D(K) = |A| = 0$

여기서 $[A] = [d_{ij} - C_{ij}K]$

따라서 식 (19)를 전개하면서 좌굴응력계수 K에 대한 다항식을 얻을 수 있고 이때 구하고자 하는 좌굴응력은 최소치에 해당되는데 여기서는 행렬 A의 차수를 $(1 \times 3)^2$ 에서 $(11 \times 11)^2$ 까지 변화시켜 가면서 대형 컴퓨터에 내장된 library subroutine IMSL에 특성치(eigenvalue)를 구하는 EIGRF를 이용하여 구했다.

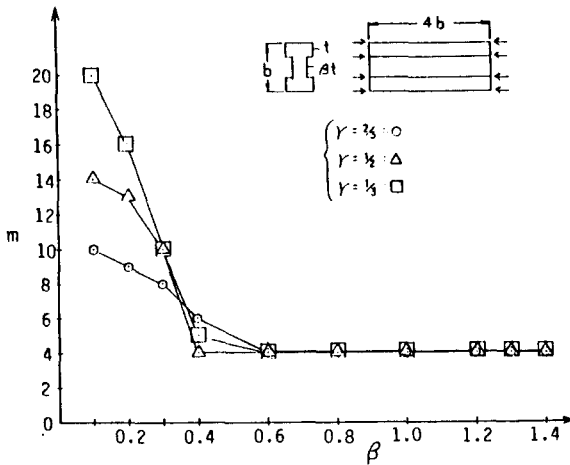


Fig. 3 Half-wave number of plate

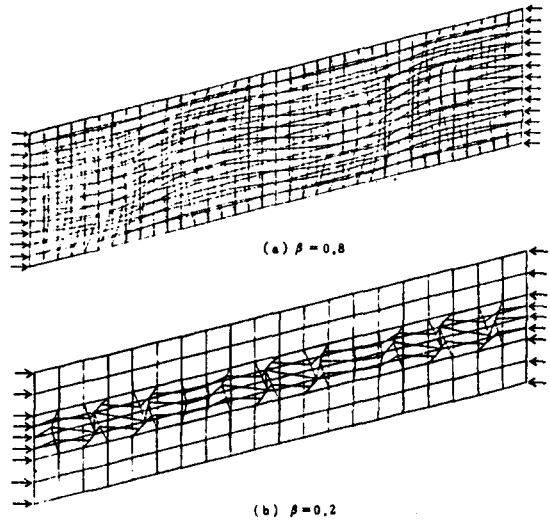
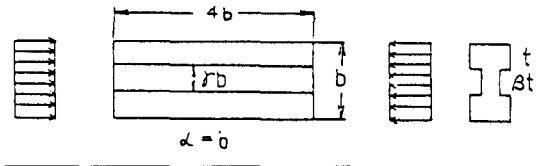


Fig. 4 Buckling mode shapes of NASTRAN ($a=1$, $\gamma=1/3$, $L/b=4$)

Table 1 Number of buckling mode coefficient, a_{mn}

$\beta \backslash \gamma$	$1/3$	$1/2$	$2/3$
1.4	7	7	7
1.3	5	5	5
0.8	5	5	5
0.6	6	6	6
0.4	7	7	7
0.3	10	10	10
0.2	20	20	20
0.1	20	20	20



7. 단층단면의 평판

참고문헌 (3)에 균일단층단면(Fig. 1에서 $a=1$ 인 경우)을 갖는 긴 평판의 좌굴응력결과가 Fig. 2에 보이는 실선과 점선으로 γ 가 $2/3$, $1/2$ 및 $1/3$ 인 경우에 관하여 수록되어 있다.

우선 본 논문의 해석방법과 결과의 정확도를 검증하기 위하여 동일한 문제를 해석하여 그 결과를 Fig. 2에 표시하였다. 두 결과가 전반적으로 잘 일치함을 볼 수 있다.

본 해석에 의한 거로가가 약간 높은 좌굴하중을 얻는 것은 Capey의 결과는 평판이 아주 긴 경우이며 본 해석에서는 평판종횡비 L/b 가 4인 직사각형으로써 하중이 작용하는 면의 경계조건 영향이 남아있기 때문이다. Fig. 2에 의하면 균일단층단면의 평판의 경우 평판 중앙부분을 얇게하며 양변쪽을 두텁게 함으로써 좌굴응력을 높일 수 있음을 알 수 있다. 특히 평판 폭의 비 γ 가 0.5이며 두께비 β 가 0.3일때 좌굴응력이 동일하중의 균일두께 평판의 좌굴응력보다 약 40%이상 증가된다. 이러한 추세로 β 가 작아질수록 좌굴응력비 σ_{cr}/σ_a 가 높아지다가 낮아지는 이유는 중앙의 평판양변이 고정지지 (clamped)된 독립적인 평판역할을 하기 때문인 것으로 추측된다. 물론 중앙평판이 아주 얇아지면 국부적으로 중앙평판에만 좌굴 (local buckling)이 발생하며 이로인해 좌굴하중이 감소하게 된다. 이러한 경우에 실질적인 평판종횡비가 커지므로 하중방향으로의 좌굴 half-wave갯수 m 이 급격히 증가하게 된다.

본 해석에 의하여 얻어진 Fig. 3에 이러한 추세가 잘 나타나 있다. 즉 두께비 β 가 1에 가까울 때는 잘 알려진 정사각형 좌굴형상이 발생되므로 m 이 4가 되며 β 가 0.6보다 작아질수록 국부좌굴 형

상이 평판중앙에만 나타나므로 m 이 증가하게 된다. 물론 중앙 얇은 평판의 폭이 좁을수록 half-wave수가 발생함을 알 수 있다.

Half-wave수에 대한 결과인 Fig. 3의 타당성을 검사하기 위하여 유한요소법을 이용한 구조해석 프로그램인 NASTRAN에 의해 plotting시킨 결과를 Fig. 4에 대표적으로 나타냈으며 Fig. 4(b)에서는 국부적인 좌굴의 발생을 확인할 수 있다. 이러한 국부좌굴형상을 삼각함수로 나타내고자 하면 많은

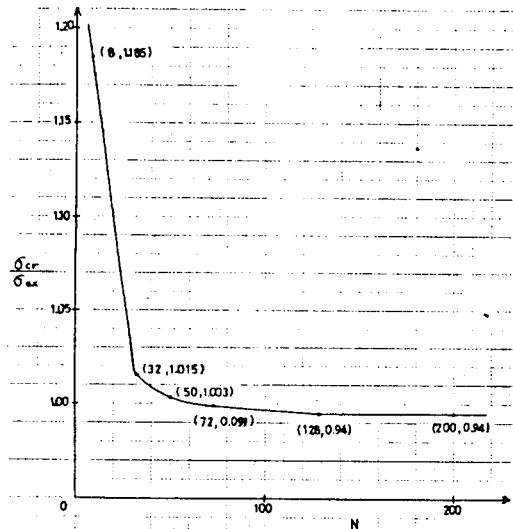


Fig. 5 Relation between NASTRAN element number and critical stress ratio σ_{cr}/σ_{ex}

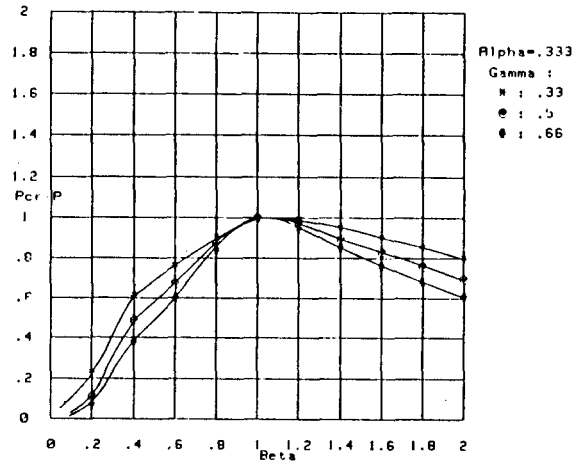
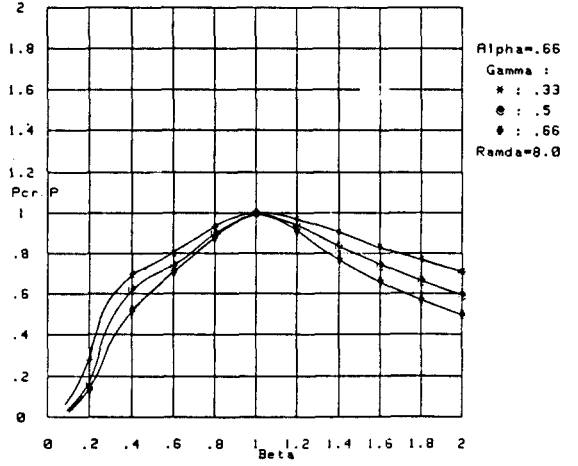
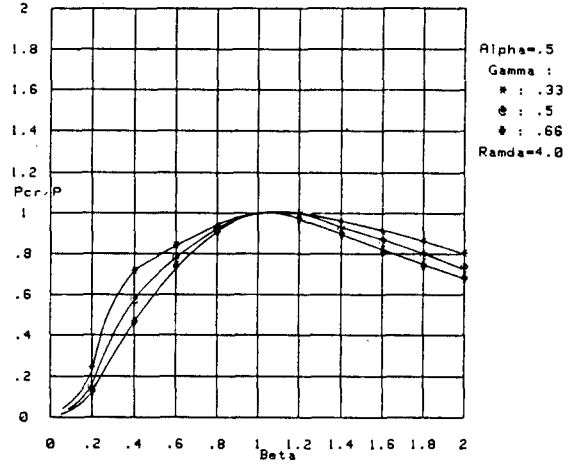
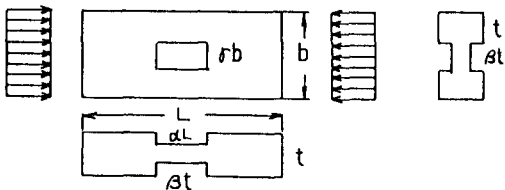
Table 2 Critical load of NASTRAN and present results ($a=1$)

γ	β	L/b	t	ν	E	Number of elements	P_{cr}	e (%)
0	1	2	0.5	0.3	10^6	8 (8×4)	53356.3	18.07
						32 (4×8)	45864.3	1.5
						50 (5×10)	45338.8	0.3
						128 (8×16)	44982.6	-0.5
						200 (10×20)	44966.3	-0.5
						Present value	45190.5	
						Exact solution	45190.5	
1/2	0.2	4	0.5	0.3	10^6	160 (8×20)	22941.7	
						Oresebt vakye	22519.3	
1/3	0.8	4	0.5	3.0	10^6	432 (12×36)	36478.4	
						Present value	36993	

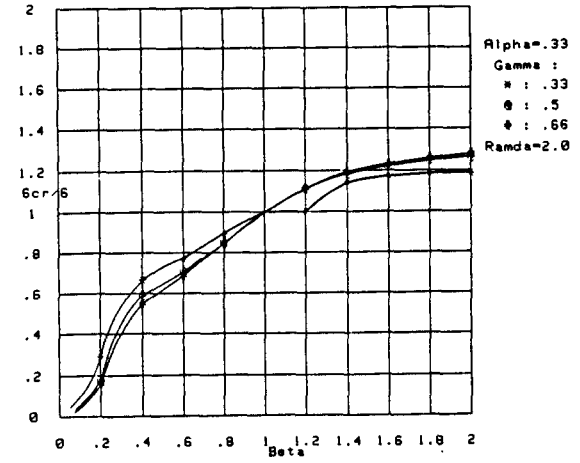
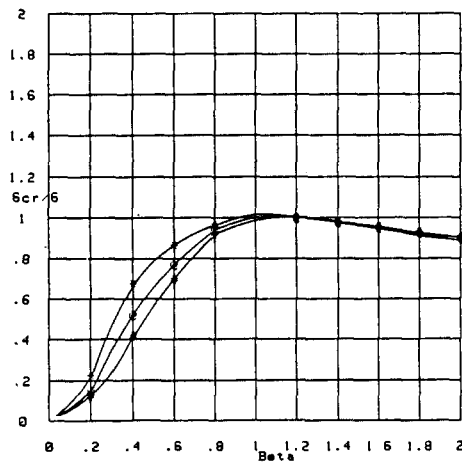
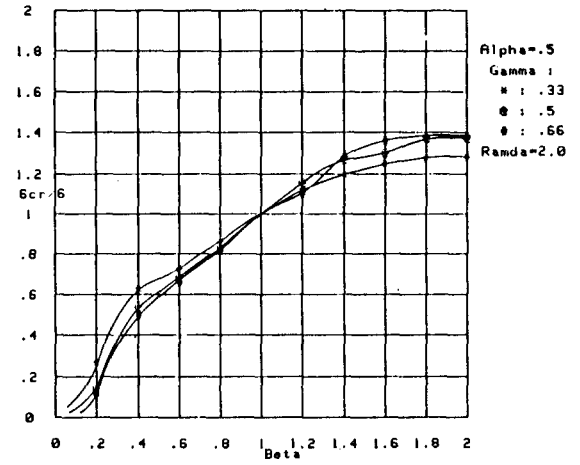
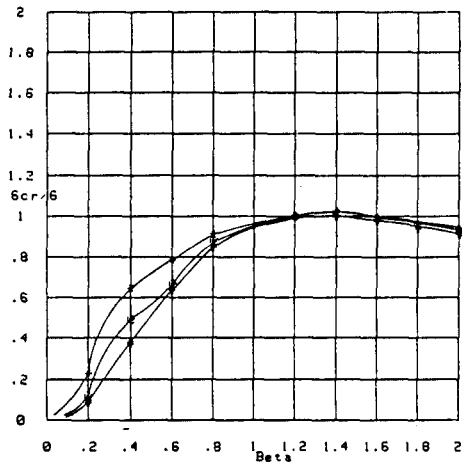
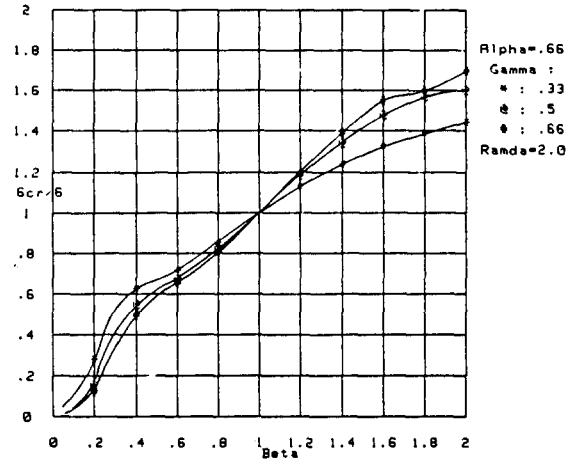
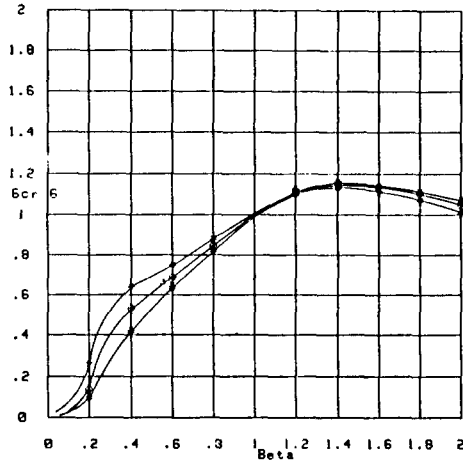
좌굴하중계수 a_{mn} 이 필요하게 된다. Fig. 2의 결과를 얻기 위하여 본 해석에서 사용된 좌굴형상계수 a_{mn} 의 갯수가 Table 1에 나타나 있는 데 이러한 필요성을 입증하고 있다.

Table 3 Number of displacement terms

β	r		1/3	1/2	2/3
	a				
2.0	1/3		24	24	24
	1/2		24	24	24
1.8	2/3		24	24	24
1.2	1/3		16	16	16
	1/2		16	16	16
	2/3		16	16	16
1.0	1/3		3	3	3
	1/2		3	3	3
	2/3		3	3	3
0.8	1/3		16	16	16
	1/2		16	16	16
	2/3		16	16	16
0.6	1/3		20	20	20
	1/2		20	20	20
	2/3		20	20	20
0.4	1/3		30	30	30
	1/2		30	30	30
	2/3		30	30	30
0.2	1/3		121	120	120
	1/2		110	99	120
	2/3		110	110	99
0.1	1/3		117	120	120
	1/2		120	120	120
	2/3		120	120	120



(a) $L/b=4$



(b) $L/b=2$

(c) $L/b=1$

Fig. 6 Critical stress ratio. σ_{cr}/σ

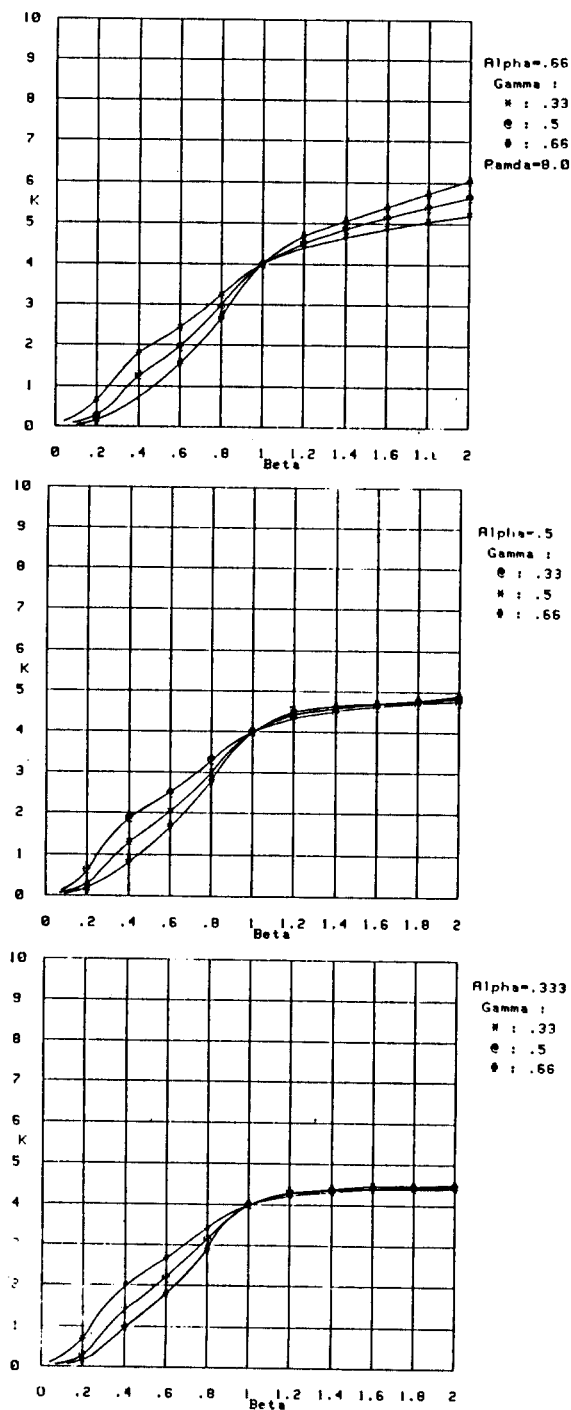


Fig. 7 Buckling stress coefficient, $K(L/b=4)$

다음은 NASTRAN 프로그램을 사용하여 유한 요소법으로 동일한 문제를 해석하였다. 일반적으로 유한요소법의 정확도는 요소의 종류와 갯수에 의해

좌우되는 데 우선 엄밀해(exact solution)가 잘 알려진 균일 두께의 평판에 대해 NASTRAN 프로그램을 적용하여 적절한 요소의 갯수를 구해보면 그 결과는 Fig. 5가 얻어지고 요소수가 약 50개 이상인 경우에 근사해를 구할 수 있음을 알 수 있다.

따라서 NASTRAN 프로그램에 이용되는 요소의 수를 평판의 가로세로비가 1:1인 경우는 25개 이상, 3:1인 경우는 75개 이상, 4:1인 경우는 100개 이상으로 하고 단층두께의 평판에 대해서는 국부적인 좌굴을 고찰하여 위의 요소수보다 2~3배 이상으로 하여 단면두께와 폭의 길이 및 가로세로비의 변화에 따른 NASTRAN 프로그램 계산결과와 Rayleigh-Ritz방법에 의한 근사치를 비교하여 정리하면 Table 2와 같다.

8. 비균일 단층단면의 평판

길이가 L 이고 폭이 b 이며 두께가 t 인 평판에 각각의 변수가 α, γ, β 인 비균일 단층단면의 경우에 대해 Rayleigh-Ritz방법으로 좌굴하중을 구하기 위하여 적용하는 변위 w 의 항수는 Table 3과 같으며 이 결과로부터 두께비 β 가 1이면 변위의 항수가 3개 만으로도 엄밀해와 거의 일치되는 좌굴응력계수 K 의 근사치를 구할 수 있지만 $\beta > 1$ 이거나 $\beta < 1$ 이면 변위의 항수를 더 증가시켜야만 바람직한 K 값이 구해질 수 있음을 알 수 있다. 즉 $\beta = 1.2 \sim 2.0$ 이면 항의 갯수가 16~24정도 이어야 하고 $\beta = 0.1 \sim 0.8$ 이면 16~120개의 변위에 대한 항이 필요하다.

평판종횡비 L/b 가 4, 2, 1인 평판에 대해서는 $\alpha = 1$ 인 경우에서와 마찬가지로 Table 3의 결과를 이용하여 구하여진 α, β, γ 에 따른 $\sigma_{cr}\sqrt{\sigma}$ 의 결과를 Fig. 6에 나타냈으며 이를 해석한 결과는 Table 4와 같다.

이들 결과로부터 평판종횡비 L/b 가 4인 경우에는 길이와 폭의 비인 α 와 γ 가 변화하더라도 $\beta = 1$ 에서 좌굴 응력이 가장 높으며 점차적으로 흠이 있는 평판의 종횡비가 작아지고 β 가 1이하로 감소되면 α 와 γ 의 변화에 따라 단면두께에 변화를 갖는 평판의 좌굴응력이 작아지는 반면 β 가 1이상으로 증가되면 σ 에 비해 σ_{cr} 가 똑같은 중량상태에서 30%증가함을 알 수 있다.

이 결과에 의하면 중앙부분을 얇게하며 양변을 두텁게 하는 것이 좌굴응력을 증가시킨다는 균일단

Table 4 States of critical stress ratio, σ_{cr}/σ

λ	α	γ	β_1	σ_{cr}/σ	β_2	$(\sigma_{mr}/\sigma)_{max}$
8	2/3	2/3, 1/2, 1/3	1	1	—	—
			Over 1	Decrease	2	0.8
			Under 1	Decrease	0.2	0.1
	2/3	2/3, 1/2, 1/3	1	1	—	—
			Over 1	Increase	2	1.2
			Under 1	Decrease	0.2	0.1
	1/3	2/3, 1/2, 1/3	1	1	—	—
			1-2	Decrease	2	0.9
			Under 1	Decrease	0.2	0.1
4	2/3	2/3, 1/2, 1/3	1	1	—	—
			From 1-1.4 to 1.4-2	From increasing to decreasing	2	1
			Under 1	Decrease	0.2	0.1
	1/2	2/3, 1/2, 1/3	1	1	—	—
			Over 1	Increase	2	1.3
			Under 1	Decrease	0.2	0.1
	1/3	2/3, 1/2, 1/3	1	1	—	—
			Over 1	Decrease	2	0.9
			Under 1	Decrease	0.2	0.4
2	2/3	2/3, 1/2, 1/3	1	1	—	—
			Over 1	Decrease	2	1.6
			Under 1	Decrease	0.2	0.1
	1/3	2/3, 1/2, 1/3	1	1	—	—
			Over 1	Increase	2	1.3
			Under 1	Decrease	0.2	0.1
	1/3	2/3, 1/2, 1/3	1	1	—	—
			Over 1	Decrease	2	1.2
			Under 1	Decrease	0.2	0.8

층단면의 평판의 경우에는 중앙부분을 변두리 부분보다 더 두텁게 설계하는 것이 훨씬 유리함을 알 수 있다. Fig. 7은 대표적으로 평판중형비 L/b 가 4인 경우의 α, β, γ 에 대한 좌굴응력계수 K 의 변화를 나타내고 있으며 이에 대한 해석의 결과가 Table 5에 나타난다.

$a=1$ 인 경우에서와 마찬가지로 비균일단층단면

의 직사각형평판에 대해 NASTRAN프로그램을 이용하여 얻은 좌굴하중 P_{cr} 과 앞에서 Rayleigh-Ritz방법으로 구한 결과의 비교는 Table 6에 나타나 있다. 그리고 대표적으로 평판중형비 L/b 가 4이고 단순지지의 4각형을 가진 평판에 균일압축응력이 가해지는 경우 NASTRAN프로그램에 의한 좌굴형상은 Fig. 8과 같이 얻어진다.

Table 5 States of buckling stress coefficient, K

λ	α	γ	β_1	K	β_2	K_{max}
8	2/3	2/3, 1/2, 1/3	1	4	—	—
			Over 1	Increase	2	5.5
			Under 1	Decrease	0.2	0.1
	2/3	2/3, 1/2, 1/3	1	4	—	—
			Over 1	Increase	2	7
			Under 1	Decrease	0.2	0.5
	2/3	2/3, 1/2, 1/3	1	4	—	—
			Over 1	Increase	2	4.5
			Under 1	Decrease	0.2	0.2
4	2/3	2/3, 1/2, 1/3	1	4	—	—
			Over 1	Increase	2	7.5
			Under 1	Decrease	0.2	0.3
	1/3	2/3, 1/2, 1/3	1	4	—	—
			Over 1	Increase	2	5.8
			Under 1	Decrease	0.2	0.2
	1/3	2/3, 1/2, 1/3	1	4	—	—
			Over 1	Increase	2	5
			Under 1	Decrease	0.2	0.5
2	2/3	2/3, 1/2, 1/3	1	4	—	—
			Over 1	Increase	2	10
			Under 1	Decrease	0.2	0.4
	1/3	2/3, 1/2, 1/3	1	4	—	—
			Over 1	Increase	2	8.5
			Under 1	Decrease	0.2	0.3
	1/3	2/3, 1/2, 1/3	1	4	—	—
			Over 1	Increase	2	7
			Under 1	Decrease	0.2	0.5

9. 결 론

사각면이 모두 단순지지되고 사각홈이 있는 직사각형 평판에 있어서 축방향이 균일 압축응력에 의한 좌굴현상에 관하여 연구분석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 균일단층단면의 평판인 경우에는 중앙부분을

얇게하고 양변을 두텁게 하는 것이 유리하다. 즉, 중앙평판의 폭의비가 0.5이며 두께비 β 가 0.3일때의 좌굴응력이 동일중량이고 동일두께인 평판의 좌굴응력보다 약 40%이상 증가된다.

(2) 비균일단층단면의 평판인 경우에는 중앙부분을 변두리 부분보다 두텁게 설계하는 것이 유리하다. 평판중회비 L/b 가 2일 경우에는 중앙부분을 두텁게 함으로써 좌굴응력이 약 20%증가된다. 이

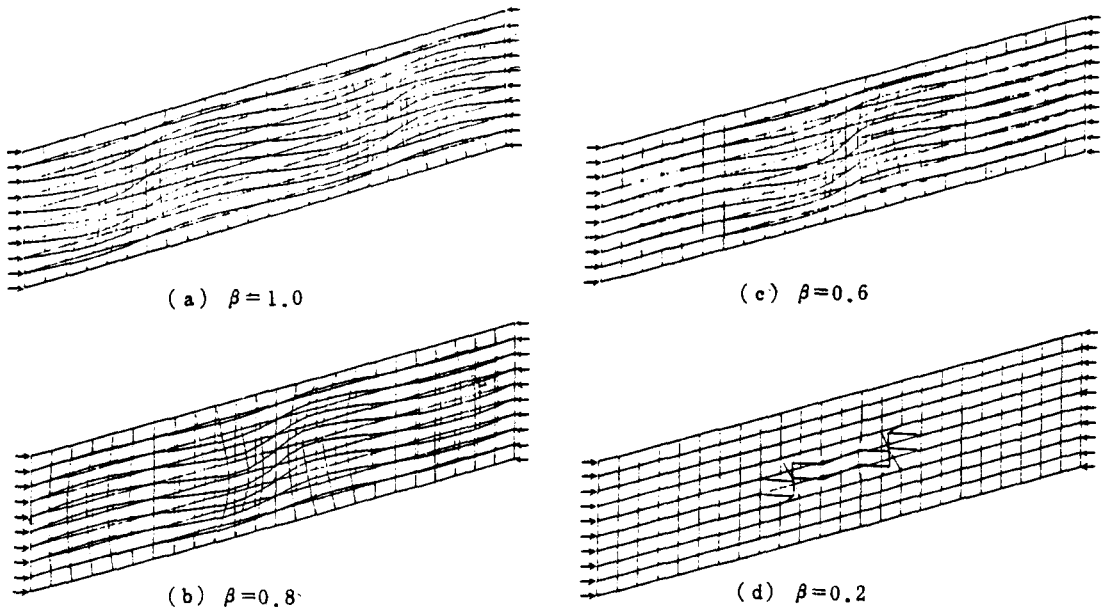


Fig. 8 Buckling mode shapes of NASTRAN ($a=1/3$, $\gamma=1/3$, $L/b=4$)

Table 6 Critical load of NASTRAN and present results ($a \neq 1$)

α, γ	λ	β	Number of elements	P_{cr}
1/3	4	1	216	44499
			Exact value	45190
		0.8	216	39483.2
			Exact value	38526.3
		0.6	216	33930.8
			Exact value	30127.4

증가량은 평판중횡비 L/b 에 크게 영향을 받는다.

그러므로 항공기의 동체나 창문등과 같이 사각형을 갖는 평판구조물을 설계할 경우에 있어서 본 연구의 결과를 응용하면 같은 좌굴응력을 갖게하면서도 중량감소를 가져올 수 있다고 본다.

참 고 문 헌

(1) Rudolph, S., 1974, "Theory and Analysis of Plates", Prentice-Hall, INC., New Jersey., pp.256

~261.
 (2) Timoshenko, S.T. and Krieger, S.W., 1959, "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill, INC., New York., pp.131~145
 (3) Bulson, P.S. and Christ, C., 1969, "The Stability of Flat Plates", American Elsevier Publishing Company., pp.278~283.
 (4) Alexander, C., 1974, "Principles of Structural Stability Theory", Prentice-Hall, INC., New Jersey., pp.65~72.
 (5) Timoshenko, S.T. and Goodier, J.N., 1970, "Theory of Elasticity" McGraw-Hill, INC., New York., pp.174~178.
 (6) Fung, Y.C., 1965, "Foundation of Solid Mechanics", Prentice-Hall, INC., New Jersey., pp.186~191.
 (7) Bathe, K.I. and Willson, E.L., 1974, "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice-Hall, INC., New Jersey., pp.312~316.
 (8) Selby, S.M., 1973, "Standard Mathematical Tables", 21st Ed., The Chemical Rubber Co.
 (9) Desai, C.S., 1979, "Elementary Finite Element Method", Prentice-Hall, INC., New Jersey. pp.159~163.
 (10) Gerard, G. and Becker, H., 1957, "Handbook of Structural Stability", NACA TN 3781.