

〈技術論文〉

## 압력용기의 도움 형상설계

이 영 신\* · 조 원 만\*\*

(1991년 1월 11일 접수)

### Shape Design of Pressure Vessel Dome

Young-Shin Lee and Won-Man Cho

**Key Words :** Pressure Vessel(압력용기), Dome Shape(도움형상), Internal Pressure(내압), Torispherical Dome(토리-구형 도움), Ellipsoidal Dome(타원형 도움)

#### Abstract

The dome structure of pressure vessel can be subject to buckling failure due to compressive stress. Present study shows an optimal design procedure for dome shape without buckling and for other type of dome shapes, such as hemisphere, ellipsoid, and torisphere, etc. The design parameters for these shapes are compared each other. This study also presents the optimal design procedure for the dome shape of a hydrostatic reservoir for various height and radius combinations. In order to accomplish this study, several nonlinear differential equations are derived and solved in closed forms. Every design parameter is nondimensionalized and presented as reference data for the optimal design of dome shapes. Also design examples for vessel of which the radius is 5m are shown.

#### 기 호 설 명

$a$	: 타원형 도움의 장경 길이
$b$	: 타원형 도움의 단경 길이
$\bar{h}$	: 임의 높이 무차원 양
$N_{\theta}$	: 원주 방향 합응력
$N_x$	: 자오선 방향 합응력
$P$	: 내압
$Q$	: 수직 방향의 합력
$\bar{r}$	: 임의 반경 무차원 양
$R_{\theta}$	: 원주면의 곡률 주반경
$\bar{R}_{\theta}$	: 원주면의 무차원 곡률 주반경
$R_x^*$	: 토리-구형 도움의 구형 반경
$\bar{R}_x$	: 자오선면이 곡률 주반경
$R_{\theta}$	: 자오선면의 무차원 곡률 주반경
$R_x^*$	: 토리-구형 도움의 너클 반경

#### 1. 서 론

축대칭 박판 원통셸(cylindrical shell)의 공학적인 이용은 압력용기, 항공기, 저장용기, 잠수함등 그 적용범위가 매우 넓다. 압력용기는 주로 축대칭 실린더와 도움구조로 이루어져 있으며, 도움의 형상은 반구형(hemispherical), 타원형(ellipsoidal), 토리-구형(torispherical)등 여러 형태가 있다. 보통 박판 원통셸은 굽힘효과(bending effects)가 무시된 막이론(membrane theory)에 의하여 설계, 해석된다.

도움형상은 제작의 편이를 위해서는 되도록 얕은(shallow) 형상이 유리하고, 응력분포상으로는 되도록 깊은 형상이 되어야 이점이 있다. 특히 반구형도움은 응력상으로는 제일 낮은 값을 보이지만 제작상 문제가 있으므로 보통 토리-구형 및 타원형

\* 정회원, 충남대학교 공과대학 기계설계공학과

\*\* 정회원, 국방과학연구소

도움 형상이 실제로 많이 적용되고 있다. 도움 구조는 외압을 받는 경우 좌굴현상이 유발될 수 있으나, 내압을 받는 축대칭 원통셀의 도움부위의 크기가 크고 얇은 경우에도 압축응력에 의한 좌굴(buckling)이 발생되며 이를 방지하기 위하여 두께 증가 또는 보강판 지지등에 의한 안전 극한하중계산을 실험적<sup>(2,3)</sup>, 이론적<sup>(4,5)</sup>방법으로 규명하는 많은 연구가 시도되어 왔으며, 이러한 방법으로는 무게, 제작비용등이 증가된다.

본 연구에서는 형상을 미소하게 변화시켜 좌굴을 방지할 수 있는 최적 도움형상을 설계하였고 타원형, 토리-구형도움의 가장 얇은 형태의 최적도움형상도 설계하였으며, 실제 적용예를 수치로 제시하였다. 또한 수압(hydrostatic pressure)을 받는 수조(reservoir)의 도움형상에 대해서도 직경 및 길이 변화에 따른 형상설계 결과를 제시하였다.

2. 기본 방정식<sup>(6)</sup>

Fig. 1과 같은 셀요소의 평형방정식은 다음과 같다.

$$N_\phi/R_\phi + N_\theta/R_\theta = P \tag{1}$$

식 (1)에서 좌굴 발생요인인  $N_\theta$ 를 최소화하기 위하여  $N_\theta=0$ 으로 놓으면 식 (2)와 같다.

$$N_\phi/R_\phi + 0/R_\theta = P \tag{2}$$

수정된 영역에서의 힘의 평형방정식으로부터

$$d(R_\theta N_\theta \sin\phi)/d\phi = 0 \tag{3}$$

이 되며, 수직합력은 식 (4)와 같다.

$$Q = 2\pi \int_0^\theta P \cdot R_\phi r \cos\phi d\phi \tag{4}$$

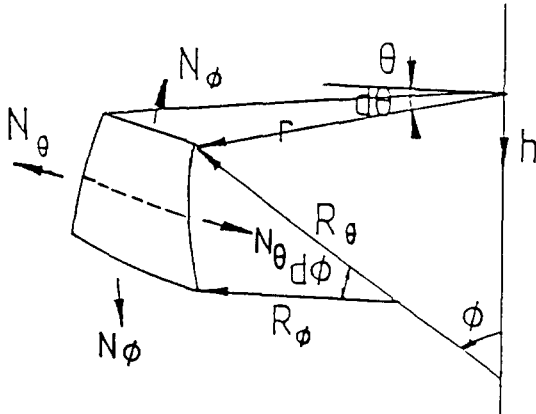


Fig. 1 Membrane shapes for axisymmetrical shell

한편 축대칭인 경우에는 다음과 같은 관계식이 성립된다.

$$r = R_\theta \sin\phi, \quad R_\theta = (1/\cos\phi) \times (dr/d\phi) \tag{5}$$

식 (5)를 식 (4)에 넣어 정리하면  $\phi$ 각의 변화율을 얻을 수 있으며

$$d\phi/dr = 2\pi r P \tan\phi/Q \tag{6}$$

또한 식 (4)로부터 수직합력의 변화율을 구할 수 있다.

$$dQ/dr = 2\pi r P \tag{7}$$

윗식을 ( $r, h$ )좌표계로 변환시키면

$$dh/dr = -\tan\phi \tag{8}$$

되며 식 (6)과 (7)로부터 식 (9)를 구할 수 있다.

$$dQ/Q = \cot\phi d\phi \tag{9}$$

또한  $Q = Q_0 \sin\phi$ 이므로 식 (9)는 다음식으로 표현된다.

$$d\phi/dh = -2\pi r P / (Q_0 \sin\phi) \tag{10}$$

$$dr/dh = -\cot\phi \tag{11}$$

3. 도움 형상 설계

3.1 일정 내압  $P_0$ 가 작용되는 경우의 최적 형상

Fig. 2의 경우와 같이 일정 내압  $P_0$ 가 작용되는 경우의 좌굴이 되지 않는 최적형상 도움을 구해보면 다음과 같다.

$$P = P_0, \quad Q = \pi r^2 P_0 \tag{12}$$

$$r = C \sqrt{\sin\phi} \tag{13}$$

단 윗식에서  $C$ 는 상수이다.

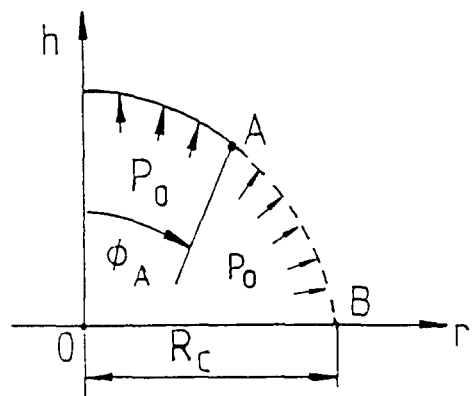


Fig. 2 Coordinates of dome shape under constant pressure

Fig. 2의 A,B점에서 각각의 기울기가 연속이 되어야 하므로, 이 조건으로부터 다음식을 구할 수 있다.

$$C = R_c$$

$$\phi_A = \sin^{-1}(r_1(\phi_A)/R_c)^2 \quad (14)$$

각각의 값들을  $R_c$ 에 대한 무차원 양으로 표시하면 다음과 같다.

$$\bar{r} = r/R_c = \sqrt{\sin\phi} \quad (15)$$

$$\bar{h} = h(\phi)/R_c = 1/2 \int_{\phi}^{\pi/2} \sqrt{\sin\phi} d\phi \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_\theta &= 1/(2\sqrt{\sin\phi}) \\ \bar{R}_\phi &= 1/\sqrt{\sin\phi} \end{aligned} \right\} \phi_A \leq \phi \leq \pi/2 \quad (17)$$

일정 내압  $P_0$ 가 작용되는 경우에 좌굴을 방지시키는 도움형태를 수치적으로 계산하여 도움의 깊이를 구하면

$$h/R_c = 0.599$$

이지만, 실제 적용하는데 있어서는  $r=0$ 에서 매우 큰값의  $N_\theta$ 가 유발되므로, 이를 방지하기 위하여  $h$  값을 크게 하여야 한다.

$$R_\theta = R_c^2/2r \quad (18)$$

$$N_\theta = P_0 P_c^2/2r \quad (19)$$

이므로, 식 (19)에서  $r \rightarrow 0$ 이면,  $N_\theta \rightarrow \infty$ 가 되어 특이성이 나타나게 된다.

이 문제점을 해결하기 위하여 그 점에서의 셀두께를 증가시키거나,  $r=0$ 영역에서 이론적 형상 대신에 구형곡선을 적용시켜서  $N_\theta$ 값을 감소시킬 수 있다. 만일  $N_\theta$ 의 최대값을  $P_0 R_c$ 로 국한시킨다면,

$$R_\theta = R_c^2/r = 2R_c \quad (20)$$

가 되므로 구형곡선 영역은

$$|r| < R_c/2 \quad (21)$$

가 되며, 이때의 도움의 총 깊이는 다음과 같다.

$$h/R_c = 0.620 \quad (22)$$

### 3.2 다른 도움 형상과의 비교

#### (1) 타원형(ellipsoidal) 도움 형상

타원형 도움의 형상은 다음식을 만족시키는 곡선이다.

$$r^2/a^2 + h^2/b^2 = 1 \quad (23)$$

여기에서  $a$ 는 장경,  $b$ 는 단경이며  $a, b$ 의 변화에 의하여 도움의 형태가 달라진다.

타원형 도움에서의 원주방향 합응력은 다음과 같다.

$$N_\theta = P_0 R_\theta (1 - R_\theta/2R_\phi) \quad (24)$$

여기에서

$$R_\theta = R_\phi^3 b^2/R_c^4$$

$$R_\theta = (R_c^4 h^2 + b^4 r^2)^{1/2}/b^2$$

식 (24)에서  $b_{min}$ 값을 좌굴응력이 걸리지 않는 최소값이로 구하면 다음과 같다.

$$R_\theta = 2R_\phi \quad (25)$$

$$\bar{b}_{min} = b_{min}/R_c = 0.707 \quad (26)$$

#### (2) 토리-구형(Torispherical) 도움 형상

Fig. 3에 도시한 토리-구형 도움은 구형과 실린더의 접합부에서 발생하는 응력집중 및 자오선 방향 형상이 갑자기 변하는 것을 완화시켜 주기 위하여 너클부(knuckle section)를 첨가한 형태이다.

그림의 기하학적 형상으로부터

$$R_\theta^* = R_\phi^* + (R_c - R_\phi^*) \operatorname{cosec}\phi^* \quad (27)$$

$$N_\theta = P_0 R_\theta (1 - R_\theta/2R_\phi^*) \quad (28)$$

이 되고, 식 (28)에서  $N_\theta=0$ 의 경우

$$R_\theta^* = 2R_\phi^* \quad (29)$$

이 된다. 그러므로 좌굴이 걸리지 않는 토리-구형 도움의 최소값이는

$$b = R_c (2 - \cos\phi^*) / (1 + \sin\phi^*) \quad (30)$$

$$\bar{b}_{min} \approx 0.75 \quad (31)$$

여기서

$$\phi^* = 36.87^\circ, \bar{R}_\theta^* = 0.625, \bar{R}_\phi^* = 1.25$$

이 된다.

위에서 제시한 여러형태의 최적도움형상을 실린더 반경에 대한 무차원 값으로 계산하여 서로 비교하여 도시하면 Fig. 4와 같다.

### 3.3 수조(Reservoir)의 도움 형상(Fig. 5)

수조는 담겨있는 물높이를 견뎌야 하며, 직경과

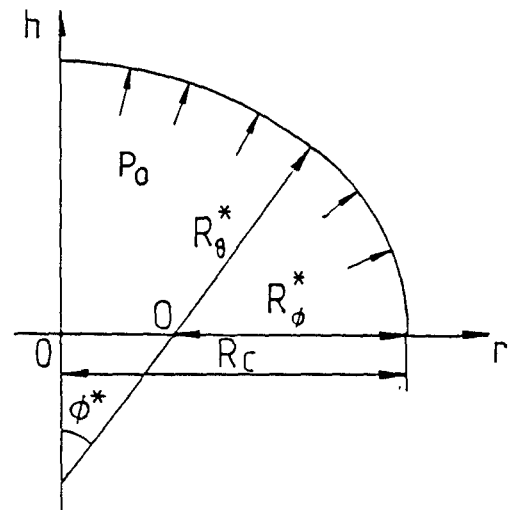


Fig. 3 Coordinates of torispherical dome shape

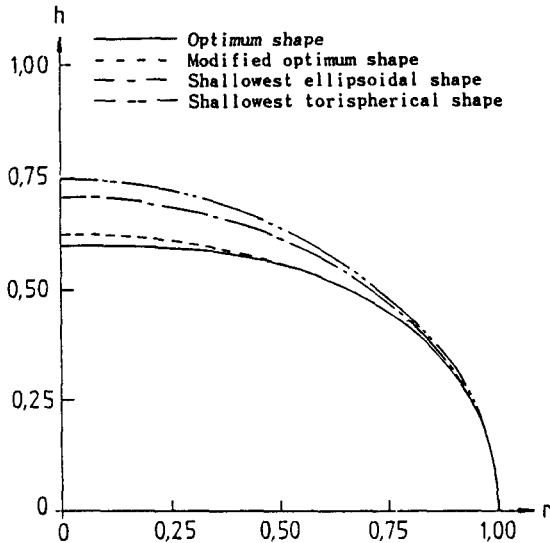


Fig. 4 Comparisons of various dome shapes without buckling

높이에 따라 최적도움형상은 달라진다. 수조에 작용하는 내압은 식 (32)와 같다.

$$P = \gamma(H + h) \tag{32}$$

단 윗식에서  $\gamma$ 는 물의 비중량을 의미한다.

식 (10)과 (11)을 수조의 경우로 다시 표현하면

$$d\phi/dh = -2\pi r \cdot \gamma(H + h) / (Q_0 \sin\phi) \tag{33}$$

$$dr/dh = -\cot\phi \tag{34}$$

여기서  $Q_0$ 는  $H$ ,  $R_s$  및 구속 방정식 (35)에 의하여 시행착오법으로 결정될 수 있다.

$$Q(\phi_A) = Q_0 \sin\phi_A \\ = \pi r_A^2 \gamma (H + h_A) + \pi R_s^3 \gamma [(1 - \cos\phi_A) - 1/3(1 - \cos^3\phi_A)] \tag{35}$$

만일  $H$ 값이 미리 주어진다면  $\phi$ ,  $r$ ,  $h$ 값들은 2계 Runge Kutta방법에 의하여 식 (35)가 만족될 때까지 수치적으로 구할 수 있으며, 이때의  $\phi_A$ 값이 결정될 수 있다.

4. 최적 형상 설계 적용에 및 고찰

실제로 압력용기의 도움을 제작하기 위해서는  $r$ ,  $h$ ,  $R_s$ ,  $R_c$ 값이 필요하며 수치제어(Numerical control) 선반등에서 제작 가능하다. 설계자가 좀더 용이하게 설계 가능하도록 하기 위하여 일정내압이 걸리는 직경 10m의 압력용기의 경우에 대하여 좌굴이 걸리지 않는 최적도움형상을 설계하였으

며 그 결과를 Table 1~4에 제시하였다.

Table 1~4에서 알 수 있는 바와 같이 동일조건에서는 최적도움형상의 깊이가 가장 얇으나  $r=0$ (도움의 정점) 부근에서는 응력이 커지므로 약간 깊이가 커진 수정된 최적도움형상을 설계하였다.

그러나 ASME(American Society of Mechanical Engineers)의 압력용기 규격(code)에 제시되어 있으며 실제로 산업 및 우주항공 분야에서 많이 적용되고 있는 타원형 및 토리-구형 도움을 최적화시킨 경우에는 수정된 도움형상보다 깊이가 커지게 됨을 알 수 있다. 또한 실제 많이 사용되고 있는 저수탱크 등의 수조의 경우 실린더 반경  $R_c$ 에 대하여 무차원화시킨 높이( $\bar{H}$ ,  $\bar{h}$ ) 및  $\bar{R}_s$ 의 변화에 따른 설계결과를 Fig. 6~10에 제시하였다.

Fig. 6~10에서 알 수 있는 바와 같이  $\bar{R}_s$ 가 점점 증가하게 되면 구형부의 막응력(membrane stress)이 커지며, 점점 평평(flat)한 모양으로 되어 원주 응력의 불연속이 증가하게 된다. 한편  $\bar{H}$ 값이 점점 커져서  $\bar{H} \geq 10$ 이 되면 앞에서 설계한 일정내압이 걸리는 최적도움형상으로 접근하게 됨을 알 수 있다.

5. 결 론

- (1) 압력용기의 도움형상에서 좌굴을 방지하기 위한 설계과정을 시도하였으며, 최적화된 형상을 제시하였다.
- (2) 수치해석을 통하여 기존의 다른 도움형상과 비교하였으며, 좀더 얇은 깊이의 최적형상을 얻었다.

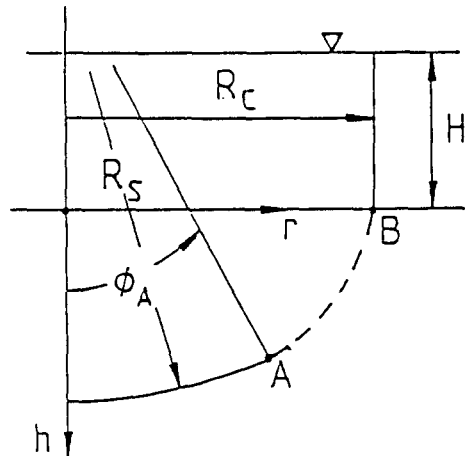


Fig. 5 Coordinates of cylindrical reservoir dome

**Table 1** Dome shape without buckling under constant pressure

$h$ (m)	$r$ (m)	$R_o$ (m)	$R_s$ (m)
0.000	5.000	5.000	2.500
0.435	4.960	5.040	2.520
0.865	4.850	5.160	2.580
1.280	4.650	5.370	2.685
1.675	4.375	5.710	2.855
2.040	4.000	6.240	3.120
2.370	3.535	7.070	3.535
2.655	2.925	8.550	4.275
2.875	2.000	12.000	6.000
3.000	0.000	$\infty$	$\infty$

**Table 2** Modified dome shape without buckling under constant pressure

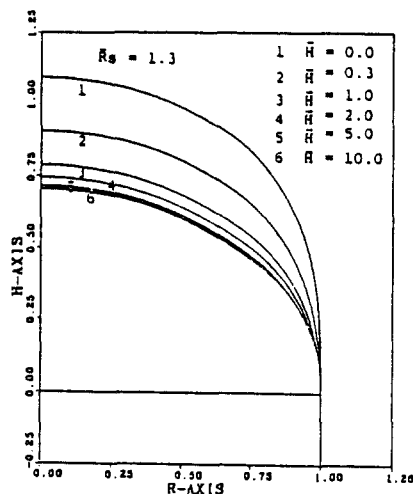
$h$ (m)	$r$ (m)	$R_o$ (m)	$R_s$ (m)
0.000	5.000	5.000	2.500
0.435	4.960	5.040	2.520
0.865	4.850	5.160	2.580
1.280	4.650	5.370	2.685
1.675	4.375	5.710	2.855
2.040	4.000	6.240	3.120
2.370	3.535	7.070	3.535
2.655	2.925	8.550	4.275
2.783	2.500	10.000	10.000
2.948	1.737	10.000	10.000
3.100	0.000	10.000	10.000

**Table 3** Ellipsoidal dome shape without buckling under constant pressure

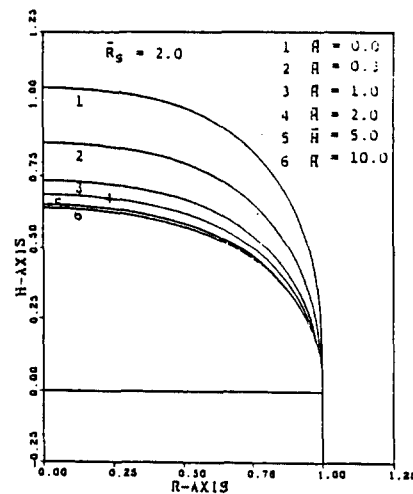
$h$ (m)	$r$ (m)	$R_o$ (m)	$R_s$ (m)
0.435	4.962	5.038	2.557
0.865	4.848	5.148	2.727
1.280	4.661	5.318	3.007
1.675	4.403	5.533	3.387
2.040	4.083	5.773	3.847
2.370	3.710	6.020	4.362
2.655	3.300	6.253	4.889
2.875	2.909	6.445	5.353
2.948	2.759	6.511	5.519
3.200	2.215	6.745	6.136
3.535	0.000	7.072	7.072

**Table 4** Torispherical dome shape without buckling under constant pressure

$R_c = 5m$	$R_s^* = 3.125m$
$R_o^* = 6.25m$	$\phi^* = 36.87^\circ$



**Fig. 6** Comparisons of reservoir dome shapes without buckling ( $\bar{R} = 1.3$ )



**Fig. 7** Comparisons of reservoir dome shapes without buckling ( $\bar{R} = 2.0$ )

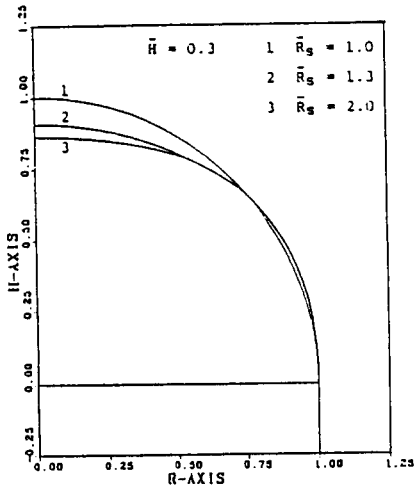


Fig. 8 Comparisons of reservoir dome shapes without buckling ( $\bar{H}=0.3$ )

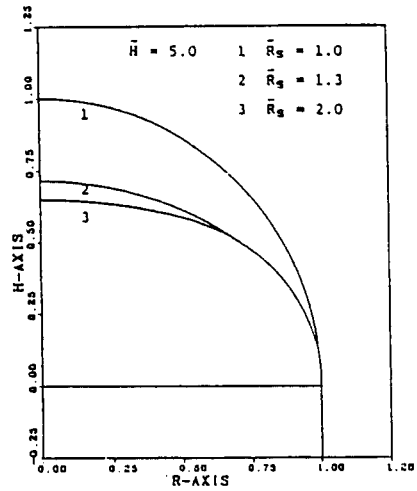


Fig. 10 Comparisons of reservoir dome shapes without buckling ( $\bar{H}=5.0$ )

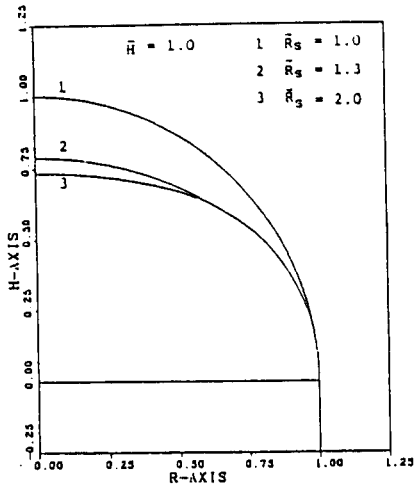


Fig. 9 Comparisons of reservoir dome shapes without buckling ( $\bar{H}=1.0$ )

(3) 수조의 경우 수압(수두높이)과 반경의 함수로 고찰함으로써 실용적으로 간단히 설계에 적용 가능하다.

참고 문헌

(1) Timoshenko, S.P., and Woinowsky-Krieger, 1959,

“Theory of Plates and Shells”, 2nd ed. McGraw-Hill.  
 (2) Kirk, A., and Gill, S.S., 1975, “The Failure of Torispherical Ends of Pressure Vessels Due to Instability and Plastic Deformation-An Experimental Investigation”, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 17, pp. 525~544.  
 (3) Patel, P.R., and Gill, S.S., 1978, “Experiments on the Buckling Under Internal Pressure of Thin Torispherical Ends of Cylindrical Pressure Vessels,” International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 20, pp. 159~175.  
 (4) Bushnell, D., and Galletly, G.D., 1977, “Stress and Buckling of Internally Pressurized Elastic-Plastic Torispherical Vessel Heads-Comparisons of Test and Theory”, Trans. of ASME Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 99, pp. 39~53.  
 (5) Bushnell, D., 1977, “Nonsymmetric Buckling of Internally Pressurized Ellipsoidal and Torispherical Elastic-Plastic Pressure Vessel Heads”, Trans. of ASME, Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 99, pp. 54~63.  
 (6) Szyszkonwski, W., and Glocker, P.G., 1985, “Design for Buckle-Free Shapes in Pressure Vessels”, Trans. of ASME Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 107, pp. 387~393.