

〈論 文〉

단순인장을 받는 복합 적층재 중앙균열의 응력확대계수

김성호* · 오재협** · 오장우**

(1991년 5월 7일 접수)

Stress Intensity Factors for Center Cracked Laminated Composites under Uniaxial Tension

Sung Ho Kim, Jae Hyup Oh and Jang Woo Ong

Key Words : Stress Intensity Factor(응력확대계수), Composite Materials(복합재료), Center crack(중앙균열), Dual Integral Equation(복합적분방정식)

Abstract

The objective of the study is to provide a theoretical tools for analyzing the fracture of layered composites. It is assumed that the composite is composed of successive accumulation of the fiber layer and resin layer with the fiber layer being perfectly bonded to the resin layer except the region of a center crack. A plane strain type loading (Mode I) is considered. Boundary value problem by following a plane theory of elasticity is formulated and the governing equation is reduced to a Fredholm integral equation of a second kind. The equation is solved numerically and the stress intensity factors are obtained. The normalized stress intensity factors for various combinations of material properties and for various geometrical parameters are evaluated for a center cracked laminated composites.

기 호 설 명

$2a$: 균열길이	F_I : 응력확대계수의 형상함수(모드 I)
$2h$: 레진의 두께	K_I : 모드 I하의 응력확대계수
h_2-h_1 : 섬유 두께	$\nu(j)$: 프와송비
ξ : Fourier적분 변환 변수	$E(j)$: 탄성계수
$\sigma_{xx}(j)(x,y)$: x방향 응력	$\mu(j)$: 전단탄성계수
$\sigma_{yy}(j)(x,y)$: y방향 응력	[단, 첨자 (j)는 j번째 층을 나타냄.]
$\sigma_{xy}(j)(x,y)$: xy방향 응력	
$u(j)(x,y)$: x방향 변위	
$v(j)(x,y)$: y방향 변위	
$G(j)(\xi, y)$: Airy응력함수의 Fourier적분 변환 함수	
α_0 : 균열면에서의 응력	
J_0 : 제 1 차 Bessel 함수	

1. 서 론

섬유강화 복합재료는 일반적으로 기존의 금속재료에 비하여 비강도와 비강성이 높으며 고강도, 경량화를 위해 개발된 재료로서 내마멸성, 내부식성 등이 좋으며 경제적인 측면에서 우수한 장점을 갖고 있다. 또한, 적층각 및 적층순서에 따라 적절한 강도와 강성을 갖는 재료로 설계, 제작할 수 있는 장점을 지니고 있기 때문에 항공우주 산업 및 자동

* 국방과학연구소

** 정희원, 충남대학교 기계설계공학과

차, 선박, 스포츠레저 용품등에 걸쳐 이차 구조재로서 대체가 증가하고 있다. 그러나, 일반적으로 복합재료는 파괴메카니즘의 복잡하고 재료물성에 대한 데이터가 부족하기 때문에 항공기 부품등 높은 신뢰성을 요구하는 구조에의 응용에는 제약을 받고 있는 실정이다. 따라서, 복합재료의 장점을 충분히 활용할 수 있기 위하여는 복합재료의 파괴역학적 특성 특히, 파손 및 파괴특성은 재료의 이방성 및 비균질성 때문에 기존재료와는 해석 및 설계방법이 다르고 매우 복잡한 파손특성을 가지고 있어 파손과정 (failure process)에 대한 규명이 매우 중요하다.

이러한 복합재료에 대한 연구방향은 다음의 두가지로 대별할 수 있다. 첫째는, 복합 재료의 전체적인 거동과 관련하여 국부적으로 결함이 없다고 가정하여 전체적인 응력 분포등과 같은 역학적 특성을 분석하는 것이다. 그러나, 복합재료 구조물의 고전 적층판 이론에서는 "각 단층사이에는 완전히 접착되었다."고 가정하므로 복합재료에 있어서 재료의 이방성, 기하학적 불연속등에 의하여 층간분리 (delamination)가 개시된 이후에는 유효 (valid)하지 않다. 두번째는, 재료의 미시적인 측면에서 보아 복합재료내의 국부적 결함부위의 파괴역학적 거동에 중점을 두어 분석하는 것이다. 이들 결함의 일반적인 형태로는 접합 경계면의 분리, 가공, 불순물과 전위 등을 들 수 있다. 일반적으로 이러한 복합재료에 내재된 결함은 균열개시 (crack initiation) 및 균열진전 (crack propagation)의 핵이 되기 때문에 복합재료의 파괴역학적인 특성분석이 매우 중요하다.

대부분의 고분자 연속섬유강화 복합재료는 두께 방향 접착강도가 면내 섬유강도에 비해서 매우 작기 때문에 인접층간은 부하시에 층간분리가 되어 취약한 파손을 일으키기 쉽다. 이러한 복합재료 내부의 결함은 가공시에 불충분한 성형 및 외부의 불순물에 기인하여 발생하며, 충격하중⁽¹⁾과 불연속형상^(2,3)에서 층간응력에 의하여 층간분리가 발생하여 구조재의 수명을 감소 시킨다⁽⁴⁾. 따라서, 복합재료를 사용한 구조물의 안전설계를 위하여 층간균열의 특성을 규명하는 것이 매우 중요하며, 이러한 층간 파괴 현상은 모드 (mode) I 변형에 의해 지배적 영향을 받으며 모드 II 변형에 의해서 파괴가 유발되기도 한다.

Hilton과 Sih는 Fig. 1(a)와 같이 2개의 반무한

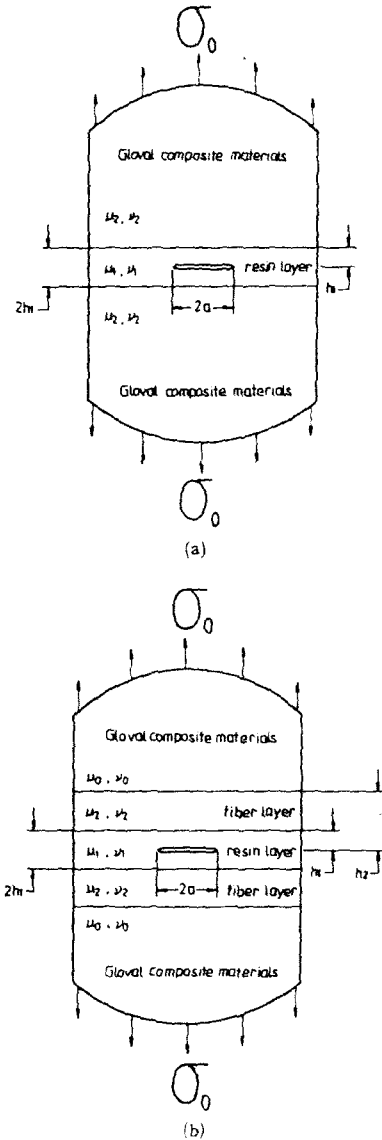


Fig. 1 (a) Hilton and Sih⁽¹⁰⁾'s model
(b) Extended model

체와 1개의 탄성층으로 이루어진 복합체가 인장하중을 받는 탄성층 내부의 균열이 접합면에 평행한 경우⁽¹⁰⁾와 수직인 경우⁽¹¹⁾에 대해 각각 연구를 수행하였다. 또한, Chen과 Sih⁽¹²⁾는 반평면 전단의 경우에 대하여 연구를 수행한 바 있다. Arin과 Erdogan⁽¹³⁾는 단순인장하의 원형균열을 갖는 경우에 대해, Sih과 Chen⁽¹⁴⁾은 비틀림하중을 받는 경우에 대하여 연구를 수행하였다. 복합재료의 물성을 이방성으로 가정하면 해석이 좀더 복잡하게 되며

이러한 이방성의 영향에 대하여 Sih⁽¹⁵⁾과 Chen과 Sih⁽¹⁶⁾가 연구하였다.

그러나, 위 연구들의 경우 균열을 갖는 복합재료를, 균열을 갖는 1개의 탄성층과 탄성층 이외의 모든층을 2개의 반무한체로 단순화 하였기 때문에, 탄성층에 인접한 섬유층의 물성변화에 따른 연구에는 유용하지 못하다.

따라서, 본 연구에서는 Hilton과 Sih의 경우를 확장 적용하여 Fig. 1(b)와 같이 탄성층 내부에 존재하는 중앙균열선단의 응력확대계수 산출을 위하여 균열부위를 제외하고는 섬유층과 레진층이 완전히 접착되었다고 가정한 모델을 다음과 같이 설정하였다. 중앙균열을 내재하고 있는 복합재료의 역학적 거동을 해석하기 위하여, 접착레진을 주로하는 층(resin rich layer)을 중심으로 하여 상하 각 1개의 섬유(fiber)층과 균질한 특성을 갖는 복합재료의 층으로 단순화 하였으며, 이러한 단순화는 적층재에서의 균열주위의 국부응력을 해석하기 위한 것으로서 복합재료는 레진층이나 섬유층에 비하여 매우 두꺼우므로 반무한체로 이상화 하였다. 선형탄성 이론에 의하여 혼합 경계조건 문제(mixed boundary value problem)로부터 제2종 Fredholm 적분방정식(fredholm integral equation of a second kind)을 유도하였으며 수치해석적인 방법에 의하여 응력확대계수를 구하였다.

여러가지 복합재료의 재료물성 및 균열길이, 섬유두께등의 기하학적 변수에 대하여 응력확대계수를 산출하였다.

2. 본 론

2.1 기본방정식

Fig. 1(b)와 같이 균열을 내재하고 있는 복합재료 적층재의 응력확대계수를 산출 하기위해, 탄성층(레진층)이 탄성 반무한체(복합재료)에 완전하게 접합된 두 탄성 이종재료층(섬유층) 사이에 있다고 가정한다. 형상 및 좌표는 Fig. 1(b)와 같이 레진층의 중앙에 길이 2a의 균열이 있으며 두께 2h₁의 레진층은 두께 h₂-h₁의 섬유층과 평행하게 경계를 이루고 있다. 하층은 레진층의 균열내부에 단순인장으로 균일하게 작용한다.

선형탄성 이론에 의하여 경계조건문제는 다음과 같이 Airy 응력함수 U(j)를 Fourier 적분 변환한 함수 G(j)의 적분형으로 표시된다.

$$\sigma_{xx}(j)(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 G(j)}{\partial y^2} e^{-ix} d\xi \quad (1.1)$$

$$\sigma_{yy}(j)(x, y) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 G(j) e^{-ix} d\xi \quad (1.2)$$

$$\sigma_{xy}(j)(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi \frac{\partial G(j)}{\partial y} e^{-ix} d\xi \quad (1.3)$$

$$u(j)(x, y) = \frac{(1+\nu(j))}{2\pi E(j)} i \int_{-\infty}^{\infty} ((1-\nu(j)) \frac{\partial^2 G(j)}{\partial y^2} + \nu(j) \xi^2 G(j)) e^{-ix} d\xi / \xi \quad (1.4)$$

$$v(j)(x, y) = \frac{(1+\nu(j))}{2\pi i(j)} \int_{-\infty}^{\infty} ((1-\nu(j)) \frac{\partial^2 G(j)}{\partial y^3} + (\nu(j)-2) \xi^2 \frac{\partial G(j)}{\partial y}) e^{-ix} d\xi / \xi^2 \quad (1.5)$$

$$G(1)(\xi, y) = \{A(1)(\xi) + \xi B(1)(\xi)y\} \text{Cosh}(\xi y) + \{C(1)(\xi) + \xi D(1)(\xi)y\} \text{Sinh}(\xi y) \quad (1.6)$$

$$G(2)(\xi, y) = \{A(2)(\xi) + \xi B(2)(\xi)y\} \text{Cosh}(\xi y) + \{C(2)(\xi) + \xi D(2)(\xi)y\} \text{Sinh}(\xi y) \quad (1.7)$$

$$G(0)(\xi, y) = \{A(0)(\xi) + \xi B(0)(\xi)y\} e^{-\xi y} \quad (1.8)$$

여기서, G(1), G(2), G(0)는 각각 레진층, 섬유층, 반무한 복합재료에 대한 Airy 응력함수인 U(1), U(2), U(0)을 각각 Fourier 적분변환한 것으로서 아래와 같다.

$$G(j)(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} U(j)(x, y) e^{ix} dx \quad (1.9)$$

2.2 경계 조건

Fig. 1(b)의 직교좌표계에서 해당 경계조건은 기하학적인 대칭으로 인하여 반평면 만을 고려하기로 한다.

$$(1) \sigma_{yy}(1) = \sigma_0, y=0, |x| \leq a \quad (2.1)$$

$$v(1) = 0, y=0, |x| > a \quad (2.2)$$

$$(2) \sigma_{xx}(1) = 0, y=0, -\infty < x < \infty \quad (2.3)$$

$$(3) \sigma_{yy}(1) = \sigma_{yy}(2), y=h_1, -\infty < x < \infty \quad (2.4)$$

$$(4) \sigma_{xy}(1) = \sigma_{xy}(2), y=h_1, -\infty < x < \infty \quad (2.5)$$

$$(5) \sigma_{yy}(0) = \sigma_{yy}(2), y=h_2, -\infty < x < \infty \quad (2.6)$$

$$(6) \sigma_{xy}(0) = \sigma_{xy}(2), y=h_2, -\infty < x < \infty \quad (2.7)$$

$$(7) u(1) = u(2), y=h_1, -\infty < x < \infty \quad (2.8)$$

$$(8) v(1) = v(2), y=h_1, -\infty < x < \infty \quad (2.9)$$

$$(9) u(0) = u(2), y=h_2, -\infty < x < \infty \quad (2.10)$$

$$(10) v(0) = v(2), y=h_2, -\infty < x < \infty \quad (2.11)$$

식(2.1)~(2.11)의 경계조건은 다음의 복합적분방정식(dual integral equations)을 만족하는 1개의 미지수, A(ξ)를 갖는 문제로 귀결된다.

$$\int_0^\infty A(\xi) \cos \xi x \, d\xi = 0, \quad |x| > a \quad (2.12a)$$

$$\int_0^\infty \xi F_I(\xi) A(\xi) \cos \xi x \, d\xi = -\pi \sigma_0, \quad |x| \leq a \quad (2.12b)$$

여기서, $F_I(\xi)$ 는 레진층, 섬유층, 반무한복합재료의 형상에 따른 함수로서 부록에 명시되어 있다.

3. Fredholm 적분방정식

Copson⁽¹⁹⁾의 방법에 의하여,

$$A(\xi) = \int_0^a \phi(t) J_0(\xi t) \, dt \quad (3.1)$$

로 가정하면 식(3.1)은 식(2.12a)를 자동적으로 만족한다. 또한, 식(2.12b)는 식(3.1)로부터 아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \phi(s) + \int_0^a \phi(t) \, dt \cdot (s \int_0^\infty \xi [F_I(\xi) - 1] \\ J_0(\xi t) J_0(\xi s) \, d\xi) = \pi \sigma_0 s \end{aligned} \quad (3.2)$$

다음에 정의된 무차원 변수를 사용하면

$$\begin{aligned} t = a\eta, \quad s = a\omega, \quad \xi = \alpha/a \\ \phi(s) = \pi a \sqrt{\omega} \sigma_0 \Phi(\omega), \end{aligned} \quad (3.3)$$

식(3.2)는 아래와 같은 제 2종 Fredholm 적분방정식(Fredholm integral equation of a second kind)이 된다.

$$\Phi(\omega) + \int_0^1 \Phi(\eta) K(\omega, \eta) \, d\eta = \sqrt{\omega} \quad (3.4)$$

여기서,

$$K(\omega, \eta) = \sqrt{\omega\eta} \int_0^\infty [F\left(\frac{\alpha}{a}\right) - 1] \cdot J_0(\alpha\eta) J_0(\alpha\omega) \, d\alpha \quad (3.5)$$

식(3.4)로부터 수치해석적인 방법에 의하여 $\Phi(\xi)$ 를 산출할 수 있으며 부록의 식에 의하여 식(1.6)~(1.8)에 사용된 미지수 $A(1), B(1), C(1), D(1), A(2), B(2), C(2), D(2), A(0), B(0)$ 를 구할 수 있다. 또한, 레진층, 섬유층, 반무한체 내부의 응력과 변위분포를 식(1.1~1.5)로부터 구할 수 있다.

응력확대계수는 정의에 의하여,

$$K_I = \lim_{x \rightarrow a^+} \sigma_{yy(1)}(x, 0) \sqrt{2(x-a)} \quad (3.6)$$

이며 이는 아래와 같이 식(3.4)의 해인 $\Phi(1)$ 의 함수로 다음과 같이 귀결된다.

$$K_I = \Phi(1) \sigma_0 \sqrt{a} \quad (3.7)$$

여기서, 레진층과 섬유층이 반무한 복합재료와 동일한 재료로 구성된 경우 식(3.7)은 균일한 응력을 받는 동방성 재료의 경우인 $K_I = \sigma_0 \sqrt{a}$ 가 된다. 일반적으로 함수 $\Phi(1)$ 은 재료물성 $\mu_2, \mu_1, \nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_0$ 및 기하학적 변수 h_1, h_2, a 에 의존하는 무차원 응력확대계수 즉, 응력확대계수에 대한 형상계수가 된다.

3. 수치 해석 및 고찰

섬유층과 반평면(복합재료)의 여러 조합에 대하여 수치해석을 수행하였다. 레진(μ_1), 섬유(μ_2),

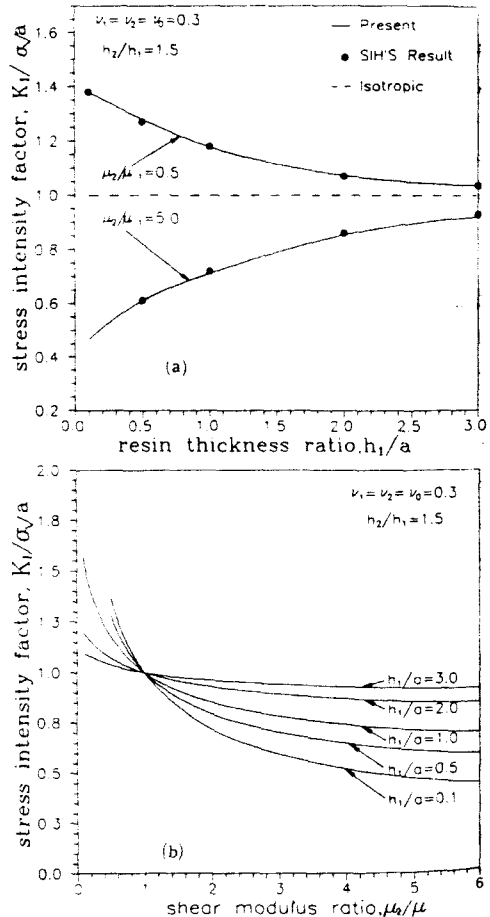


Fig. 2 (a) Nondimensional stress intensity factor for various crack length at $\mu_2/\mu_0=1.0$ (b) Nondimensional stress intensity factor for various shear modulus ratios at $\mu_2/\mu_0=1.0$

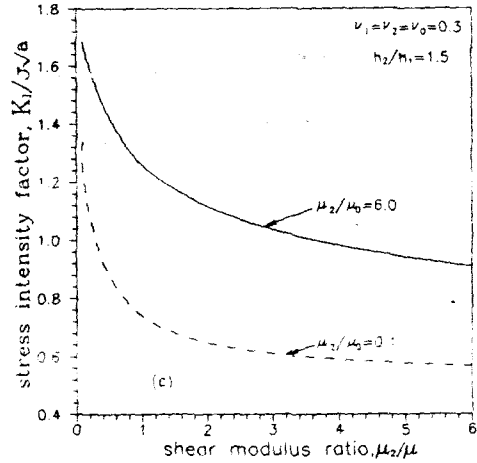
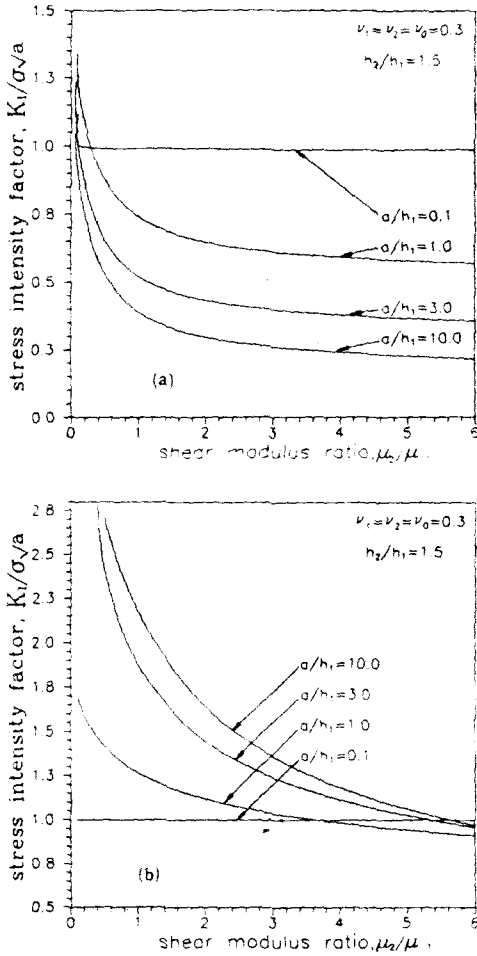


Fig. 3 (a) Nondimensionalized stress intensity factor for various shear modulus ratios at $\mu_2/\mu_0 = 0.1$
 (b) Nondimensionalized stress intensity factor for various shear modulus ratios at $\mu_2/\mu_0 = 0.1$
 (c) Nondimensionalized stress intensity factor for various shear modulus ratios at $a/h_1 = 1.0$

복합재료(μ_0)의 전단탄성계수, 균열길이비(a/h_1), 섬유두께비(h_2/h_1)가 주된 변수로 사용된다. (레진층의 두께가 일정할 경우 a/h_1 는 균열길이를 나타내는 변수가 되므로 이후부터는 a/h_1 를 균열길이비라 하고, 균열길이비 a/h_1 가 일정할 경우 h_1/a 는 레진층의 두께를 나타내는 변수이므로 h_1/a 는 레진두께비라 하기로 함.)

수치해석의 타당성 검토를 위하여, 균열이 있는 복합재료를 레진층과 복합재료층으로 단순화한 Sih⁽²¹⁾의 결과와 비교하였다. 본 해석에서 섬유와 복합재료의 재료물성치가 같은 경우($\mu_2/\mu_0 = 1.0$, $\nu_2 = \nu_0 = 0.3$), Fig. 2(a)와 같이 Sih의 결과와 잘 일치하였으며, 따라서 수치해석의 타당성이 입증되었다.

균열길이비가 무한히 작은 경우($a/h_1 \rightarrow 0$)와 균열

길이비가 무한히 큰 경우($a/h_1 \rightarrow \infty$)에 대하여 해석적인 해를 구할수 있다. 레진층 내부의 균열이 두께에 비하여 무한히 작거나 레진층이 매우 두꺼운 경우($a/h_1 \rightarrow 0$), $K_I/\sigma\sqrt{a} = 1.0$ 이 되어 등방성재료의 해석으로 귀결된다. 그리고, 반대의 경우인 $a/h_1 \rightarrow \infty$ 에서 함수 $F_I(\xi)$ 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \lim_{a/h_1 \rightarrow \infty} F_I(\xi) &= \frac{(1-\nu_1)\mu_0}{(1-\nu_0)\mu_1} \end{aligned} \quad (4.1)$$

즉, 레진층 내부의 균열길이비가 레진층의 두께에 비하여 무한히 크거나 레진층의 두께가 매우 얇은 경우($a/h_1 \rightarrow \infty$) 응력확대계수는 다음과 같이 된다.

$$K_I = \frac{(1-\nu_0)\mu_1}{(1-\nu_1)\mu_0} \sigma_0 \sqrt{a} \quad (4.2)$$

일반적으로, $F_2(\xi)$ 는 a/h_1 의 함수로서 정의되며 Fredholm 적분방정식의 해로부터 결정된다. Fig. 2(b)는 반무한 복합재료의 전단탄성계수가 섬유층의 전단탄성계수와 같고 ($\mu_2/\mu_0=1.0$) 프와송비가 같은 경우, 레진층 두께비(h_1/a)에 대한 무차원 응력확대계수로써 모든 곡선이 $\mu_2/\mu_1=1.0$ 에서 교차한다. 즉, 균열을 갖는 복합재료의 응력확대 계수는 $\mu_2/\mu_1 < 1$ 의 경우 등방성 재료보다 크고, $\mu_2/\mu_1 > 1$ 의 경우 등방성 재료보다 작다. 이 μ_2/μ_1 의 영향은 레진층의 두께가 감소함에 따라 더욱 현저히 나타난다.

Fig. 3(a)는 반무한 복합재료의 전단탄성계수가 섬유층의 전단탄성계수보다 매우 큰 경우($\mu_2/\mu_0=0.1$)로서, 무차원 응력확대계수는 균열길이비(a/h_1)가 증가함에 따라 감소하고, 균열길이비가 감소함($a/h_1=0.1$)에 따라 등방성재료의 경우에 근접한다.

Fig. 3(b)는 반무한 복합재료의 전단탄성계수가 섬유층의 전단탄성계수보다 매우 작은 경우($\mu_2/\mu_0=6.0$)로서, 무차원 응력확대계수는 균열길이비가 증가함에 따라 증가하며, Fig. 3(a)의 경우와 마찬가지로 균열길이비가 감소함($a/h_1=0.1$)에 따라 등방성재료의 경우에 근접한다.

Fig. 3(c)는 균열길이비가 1.0인 경우($a/h_1=1.0$), 반무한 복합재료의 전단탄성계수와 섬유층의 전단탄성계수비(μ_2/μ_0)의 영향을 나타낸 것으로 μ_2/μ_0 가 무차원 응력 확대계수에 가장 큰 영향을 미치는 것을 알 수 있다.

Fig. 4(a), (b)는 레진층, 섬유층, 복합재료층의 프와송비의 영향을 나타낸 것이다.

Fig. 5는 섬유층과 레진층의 두께비(h_2/h_1)의 영향을 나타낸 것으로, 섬유층의 두께가 증가함에 따라 ($h_2/h_1 > 10$), 복합재료의 전단탄성계수비(μ_2/μ_0)의 영향이 감소한다. 즉, 섬유층이 두꺼운 경우, 반무한 복합재료의 물성치는 응력확대계수에 큰 영향을 미치지 않음을 알 수 있다.

Fig. 6은 레진층의 두께비(h_1/a)가 응력확대계수에 미치는 영향을 나타낸 것으로서 레진층의 두께비($h_1/a \rightarrow \infty$)가 증가 할수록 등방성재료의 경우

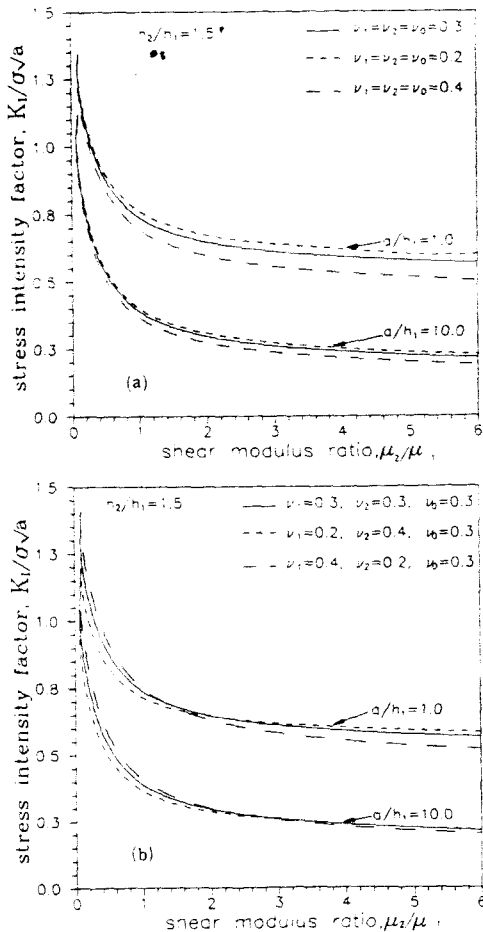


Fig. 4 (a) Nondimensionalized stress intensity factor for various shear modulus ratios at $\mu_2/\mu_0=0.1$
(b) Nondimensionalized stress intensity factor for various shear modulus ratios at $\mu_2/\mu_0=0.1$

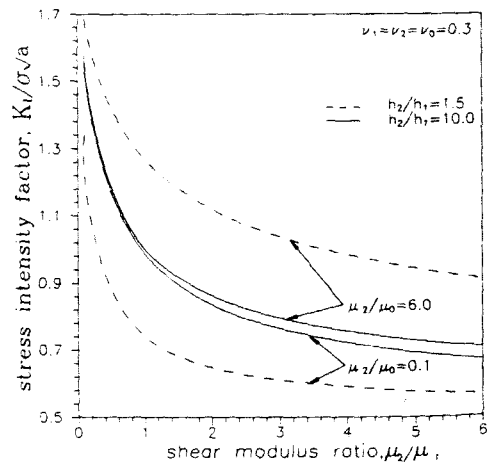


Fig. 5 Nondimensionalized stress intensity factor for various shear modulus ratios at $a/h_1=1.0$

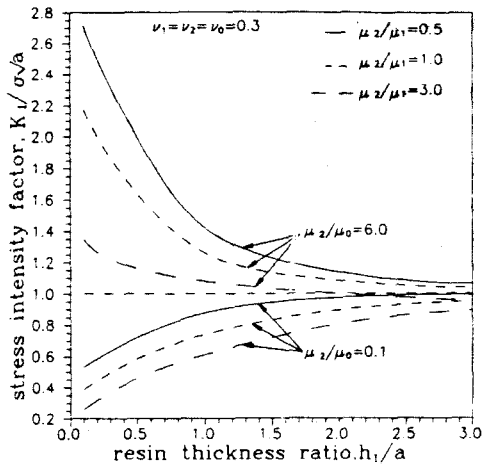


Fig. 6 Nondimensionalized stress intensity factor for various crack length at $h_2/h_1=1.5$

에 접근하며, 레진층의 두께비가 매우 작은 경우 ($h_1/a \rightarrow 0$)는 식(4.2)의 극한값에 수렴한다.

4. 결론

여러가지 재료물성 및 균열길이등의 조합에 대하여 응력확대계수를 산출하였다. 복합재료의 단순인장하의 층간내부에 존재하는 균열의 응력확대계수에 대한 형상계수의 영향을 고찰한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 지배변수 a/h_1 , μ_2/μ_1 , h_2/h_1 , ν_1 , ν_2 , ν_0 중에서 a/h_1 , μ_2/μ_1 , μ_0/μ_1 의 영향이 지배적이며 h_2/h_1 와 ν_1 , ν_2 , ν_0 의 영향은 미소하다.

(2) 섬유층과 레진층의 전단탄성계수비 (μ_2/μ_1)가 크며, 반무한 복합재료와 섬유층의 전단탄성계수의 비 (μ_2/μ_0)가 작고, 균열길이 및 레진층 두께비 (a/h_1)가 작은 경우 무차원 응력확대계수 값이 가장 작다.

(3) 섬유층의 두께가 증가하면, 반평면 탄성체의 전단탄성률의 영향이 감소한다.

이상의 결과로써, 복합재료의 적층 및 이종재료의 접합시에 균열이 존재할 경우 파괴역학적 측면에서 유리한 적층조합을 알수 있었다. 또한, 복합재료의 층간파괴인성 평가시, 응력확대계수 (K_I)의 산출을 위하여 적층재료의 물성변수 및 균열길이 따른 기하학적변수로서 산출된 무차원응력확대계수는 유용하게 사용될 것으로 생각된다.

참고문헌

- (1) Rhodes, M.D., Williams, J.G. and Stares, J.H., Jr., 1979, "Low Velocity Impact Damage in Graphite-Fiber Reinforced Laminates," Presented at the 34th Annual Conference, Reinforced Plastic/Composites Institute, New Orleans, L.A.
- (2) Wang, A.S.D. and Crossman, F.W., 1979, "Some New Results on Free Edge Effects in Symmetric Composite Laminates," Journal of Composite Materials, Vol.11.
- (3) Wang, S.S. and Choi, I., 1982, "Boundary Layer Effects in Composite Laminates," Journal of Applied Mechanics, Vol.49.
- (4) Ramkumar, R.L., 1982, "Compression Fatigue Behavior of Composite in the Presence of Delaminations," Damage in Composite Materials, ASTM STP 775, K.L. Reifsneider, Ed., pp. 184~210.
- (5) Mail, S., Ramamurthy, G. and Rezaizdeh, M.A., 1987, "Stress Ratio Effect on Cyclic Debonding in Adhesively Bonded Composite Joints," Composite Structures, No.8, pp.31~45.
- (6) Pipes, R.B. and Pagano, N.J., 1970, "Interlaminar Stress in Composite Laminates Under Uniform Axial Extension," Journal of Composite Materials, Vol.4.
- (7) Pagano, N.J. and Pipes, R.B., 1971, "The Influence of Stacking Sequence on the Laminate Strength," Journal of Composite Materials, Vol. 5.
- (8) Pagano, N.J., 1974, "On the Calculation of Interlaminar Normal Stresses in Composite Materials," Journal of Composite Materials, Vol.8.
- (9) Shivakumar, K.N. and Whitcomb, J.D., 1985, "Buckling of Sublaminates in a Quasi-Isotropic Composite Laminate," Journal of Composite Materials, Vol.19, pp.2~18.
- (10) Hilton, P.D. and Sih, G.C., 1970, "A Sandwiched Layer of Dissimilar Material Weakened by Crack Like Imperfections," Proceedings of the Fifth South-Eastern on the Theoretical and Applied Mechanics, edited by G.L. Rogers, S.C.

Kranc and E.G.Henneke, 5, pp.123~149.

(11) Hilton,P.D. and Sih,G.C.,1970, "A Laminated Composite with a Crack Normal to the Interface," International Journal of Solids and Structures, 7,pp.913~930.

(12) Chen,E.P. and Sih,G.C.,1971, "Interfacial Delamination of a Layered Composite under Anti Plane Shear," Journal of Composite Materials, 5,pp.12~13.

(13) Arin,K. and Erodogan,F., 1971, "Penny-Shaped Crack in an Elastic Layer Bonded to Dissimilar Half Spaces, International Journal of Engineering Science,9, pp.213~232.

(14) Sih,G.C., and Chen,ErP.,1972. "Torsion of a Laminar Composite Debonded over a Penny-Shaped Area," Journal of the Franklin Institute, 293, pp.251~261.

(15) Sih,G.C.,Hilton,P.D.,Badaliance,R.,Shenberger,P.S. and Villarreal, G.,1971, "Fracture Mechanics Studies of Composite Systems," Institute of Fracture and Solid Mechanics, Technical Report IFSM-71-9.

(16) Chen,E.P.and Sih,G.C., 1973, "Torsional and Anti-Plane Strain Delamination of an Orthotropic Layered Composite," Proceedings of the 13th Midwestern Mechanics Conference,7,pp.763~776.

(17) Gupta,G.D. and Erdogan,F.,1971, "Stress Analysis of Multi-Layered Composite with a Flaw," International Journal of Solids and Structure,7,pp.39~61.

(18) Sneddon,I.N., 1951. "Fourier Transforms," McGraw-Hill Book Co., Inc., New York.

(19) Copson,E.T.,1961, "On Certain Dual Integral Equations," Proceeding Glasgow Mathematical Association,5,pp.19~24.

(20) Carnahan,B. and Luther H. and Wilkes,J., 1969, "Applied Numerical Methods," John Wiley & Sons, Inc.

(21) Sih,G.C., 1981, "Mechanics of Fracture 6-Crack in Composite Materials," Martinus Nijhoff Publishers.

(22) Kim, S.H., Ong, J.W. and Oh, J.H., 1991, "The Analysis of a Cracked Layer in Laminated Composites. (Part 1. : Plane-Extension (Mode I)," KSME, 제 15 회 및 파괴부문 학술강연회 초록집, pp.16~26.

부 록

$$\xi B(1) = A(\xi), \quad B(1) = -C(1) \tag{A.1}$$

$$F_1(\xi) = \frac{A(1)}{A(\xi)} \tag{A.2}$$

$$\begin{bmatrix} A(1) \\ B(1) \\ A(2) \\ B(2) \\ C(2) \\ D(2) \\ A(0) \\ B(0) \end{bmatrix} = \frac{A(\xi)}{\xi} \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} THz-z \\ -zTHz \\ (2\nu_1-1)THz-z \\ zTHz-2(1-\nu_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

$$z = \xi h_1$$

$$z_2 = \xi h_2$$

$$THz = \tanh(z)$$

$$THz_2 = \tanh(z_2)$$

$$R_2 = \frac{e^{-z_2}}{\cosh(z_2)}$$

$$P_1 = \frac{\mu(1)}{\mu(2)}$$

$$P_2 = \frac{\mu(2)}{\mu(0)}$$

여기서,

$$\underline{M} = \begin{bmatrix}
 1 & z\text{THz} & -1 & -z & -\text{THz} & -z\text{THz} \\
 \text{THz} & z+\text{THz} & -\text{THz} & -(z\text{THz}+1) & -1 & -z-\text{THz} \\
 1 & 2(1-\nu_1)+z\text{THz} & -P_1 & -P_1(2(1-\nu_2)\text{THz}+z) & -P_1\text{THz} & -P_1(z\text{THz}+2(1-2\nu_2)) \\
 -\text{THz} \{(1-2\nu_1)\text{THz}-z\} & P_1\text{THz} \{(2\nu_2-2\nu_1)+z\text{THz}\} & P_1 & -P_1\{-z+(1-2\nu_2)\text{THz}\} & & \\
 0 & 0 & \text{THz}_2 & z_2\text{THz}_2+1 & 1 & \text{THz}_2+z_2 \\
 0 & 0 & 1 & z_2 & \text{THz}_2 & z_2\text{THz}_2 \\
 0 & 0 & -\text{THz}_2(1-2\nu_2)-z_2\text{THz}_2 & & -1 & -z_2+(1-2\nu_2)\text{THz}_2 \\
 0 & 0 & 1 & z_2+2(1-\nu_2)\text{THz}_2 & \text{THz}_2 & 2(1-\nu_2)+z_2\text{THz}_2 \\
 & & & & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 \\
 & & & & R_2 & (z_2-1)R_2 \\
 & & & & -R_2 & -z_2R_2 \\
 & & & & -P_2R_2 & -P_2R_2(1-2\nu_0+z_2) \\
 & & & & -P_2R_2 & -P_2R_2\{z_2-2(1-\nu_0)\}
 \end{bmatrix}$$