

〈論 文〉

## 고속 연접봉의 응력 변동 — 부하와 마찰의 영향 —

김 재 호\* · 신 영재\*\*  
(1990년 9월 5일 접수)

### Effects of Loads and Friction on Stress Fluctuation in Connecting Rod Mechanism

Chae Ho Kim and Young Jae Shin

**Key Words:** High Speed Mechanism(고속 기구), Stress Fluctuation(응력 변동), Dynamic Force Analysis(동적 힘 해석), Coulomb Friction(콜롱마찰), Slider-Crank Mechanism(슬라이더-크랭크 기구), Non-Dimensional Stress(무차원 응력), Non-Dimensional Principal Stress(무차원 주응력), Alternating Stress(교변 응력), Optimization Method(최적화 방법)

#### Abstract

In the design of high speed machinery, designers must consider the problem of possible structural failure due to excessive dynamically varying stresses, which are induced by the varying external loads and internal inertia forces, in the links of the mechanism. A study of the dynamically induced stresses would indicate what values of the minimum permissible fatigue strength should be for safe mechanism operation. This paper investigates the nature of the stress fluctuation in high speed mechanism on the basis of the effects of both the loads and the friction. The latter is apt to be neglected in the usual analysis in spite of the fact that it is always generated in the operating machinery. The analysis is performed on the coupler of the slider-crank mechanism for illustrative purposes and the results are expressed in a non-dimensional form for design applications.

#### 1. 서 론

최근 기계가 고속화됨에 따라 기계 기구의 동역학 연구에 많은 관심이 모아지고 있다. 기계 기구의 동역학에 관한 연구에는 탄성, 관성효과, 밸런싱, 점성댐핑, 핀틈새 및 충격 등의 영향<sup>(1~4)</sup>, 기구를 이루고 있는 부재의 진동<sup>(5,6)</sup>, 부재의 동적 안

정성에 미치는 탄성의 영향<sup>(7)</sup>, 관성력에 의한 고속 기계부재의 응력변동<sup>(8)</sup>에 관한 연구들이 있다.

그러나 고속 기계기구에 관한 고정도의 운동 해석을 위해서는 작동부하와 부재에 작용하는 관성부하 및 조인트에 발생하는 마찰력과 마찰토오크를 고려해서 동역학적 해석을 해야 한다. 특히 마찰력은 기계의 운동에 의해 결정되는 조인트의 구속력 혹은 반력에 의해 결정이 되고, 이를 마찰력은 다시 기계운동에 영향을 주기 때문에 사정이 매우 복잡하게 된다.

\* 정희원, 경북대학교 공과대학 기계공학과

\*\* 정희원, 대구공업전문대학 자동차과

따라서 마찰의 영향을 고려한 계의 운동방정식은 비선형 방정식으로 되어 해석 또한 복잡하게 된다.

본 연구에서는 고속으로 운전되는 기계 기구의 부재에 발생하는 응력변동을 부하와 마찰의 영향을 동시에 고려하여 해석하였다. 부재의 응력변동 현상은 피로에 의한 기계기구의 파괴 예측 및 수명 평가에 반드시 고려되어야 할 사항이다. 연구 대상의 실례로서는 슬라이더-크랭크기구의 연접봉 링크에 발생하는 응력변동을 조사하였다. 연접봉의 응력변동에 관한 결과들은 응용의 편의를 위하여 무차원 형태로 표현하였다.

## 2. 동적 해석

Fig. 1은 A 및 B지점에서 회전조인트로 연결되어 있는 슬라이더-크랭크 기구의 개략적인 그림이다. 그림에서 L과 R은 크랭크와 연접봉의 길이이고,  $\phi$ 와  $\theta$ 는 크랭크와 연접봉의 회전각이다. 그리고 s는 슬라이더의 변위이다.

크랭크가 일정한 각속도  $\omega_2$ 로 회전할 때 슬라이더의 속도  $v_4$ 와 가속도  $a_4$ 는 다음과 같다.

$$v_4 = -R\omega_2 \sin(\phi + \theta) / \cos \theta \quad (1)$$

$$a_4 = -R\omega_2^2 [\cos(\phi + \theta) + (\omega_3/\omega_2)^2 L/R] / \cos \theta \quad (2)$$

여기서  $\sin \theta = (R/L) \sin \phi$ 이고  $\omega_3$ 는 연접봉의 각속도로서  $\omega_3 = -\omega_2(R \cos \phi) / (L \cos \theta)$ 이다.

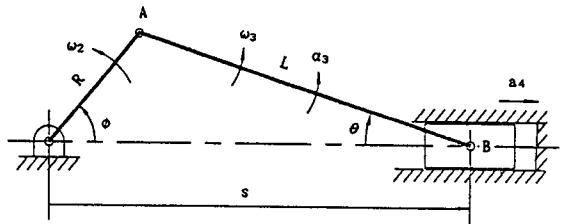


Fig. 1 Schematic diagram of the slider-crank mechanism

균일한 단면을 갖는 연접봉의 질량중심의 가속도를 연접봉에 고정된 x-y좌표계 (Fig. 2)로 표현하면

$$a_{gx} = -R\omega_2^2 \cos(\phi + \theta) - L\omega_3^2/2 \quad (3)$$

$$a_{gy} = -R\omega_2^2 \sin(\phi + \theta) + L\alpha_3/2$$

로 된다. 여기서  $a_{gx}$ 와  $a_{gy}$ 는 Fig. 2에서 보는 바와 같이 연접봉의 중립축 AB에 각각 평행 및 수직한 가속도성분들이고,  $\alpha_3$ 는 연접봉의 각 가속도로서  $\alpha_3 = \omega_2^2 [(R \sin \phi) / (L \cos \theta) - (\omega_3 / \omega_2)^2 \tan \theta]$ 이다.

Fig. 2는 연접봉과 슬라이더에 작용하는 관성력, 부하, 중력, 구속력, 마찰력 및 마찰토오크를 나타낸 자유물체도이다. 마찰부위에는 쿨롱 마찰이 작용하는 것으로 가정하여 연접봉과 슬라이더에 대한 운동방정식을 세우면, 연접봉의 조인트 A에 작용하는 횡방향힘  $f_a$ 와 축방향힘  $p_a$ , 조인트 B에 작용하는 횡방향힘  $f_b$ 와 축방향힘  $p_b$  그리고 슬라이

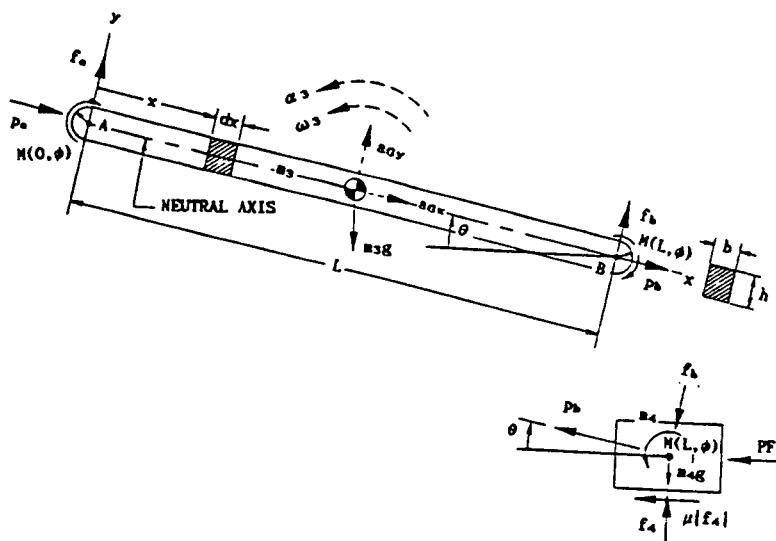


Fig. 2 Free-body diagrams of the coupler and slider

더에 작용하는 수직반력  $f_4$ 들로 구성된 다음과 같은 방정식들을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} f_a + f_b &= m_3(a_{\theta} + g \cos \theta) \\ p_a + p_b &= m_3(a_{\theta} - g \sin \theta) \\ f_b \sin \theta + p_b \cos \theta + \operatorname{sgn}(v_4) \mu |f_4| & \\ + PF &= -m_4 a_4 \\ f_b \cos \theta - p_b \sin \theta - f_4 + m_4 g &= 0 \\ f_b(L/2) - f_a(L/2) - \operatorname{sgn}(\omega_3 - \omega_2) \mu r_a \sqrt{f_a^2 + p_a^2} & \\ - \operatorname{sgn}(\omega_3) \mu r_b \sqrt{f_b^2 + p_b^2} &= (m_3 L^2 / 12) a_3 \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $m_3$ 과  $m_4$ 는 연접봉과 슬라이더의 질량이고  $\mu$ 는 조인트부의 마찰계수이며,  $r_a$ 과  $r_b$ 는 A와 B지점 회전조인트의 조인트 반경들이다.  $g$ 는 중력가속도이고  $\operatorname{sgn}(\omega) = \omega / |\omega|$ 이다. 또한  $PF$ 는 실린더압력에 의한 작용력이다.

각 조인트부의 상대 각속도와 구속력들로 이루어진 무차원값들을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \sin \varphi_a &= \operatorname{sgn}(\omega_3 - \omega_2) f_a / \sqrt{f_a^2 + p_a^2} \\ \cos \varphi_a &= \operatorname{sgn}(\omega_3 - \omega_2) p_a / \sqrt{f_a^2 + p_a^2} \\ \sin \varphi_b &= \operatorname{sgn}(\omega_3) f_b / \sqrt{f_b^2 + p_b^2} \\ \cos \varphi_b &= \operatorname{sgn}(\omega_3) p_b / \sqrt{f_b^2 + p_b^2} \\ v &= \operatorname{sgn}(v_4) f_4 / |f_4| \end{aligned} \quad (5)$$

식 (3)과 (5)를 이용해서 식 (4)의 해를 구하면 연접봉의 조인트 A에 작용하는 횡방향힘  $f_a$ 과 축방향힘  $p_a$ , 조인트 B에 작용하는 횡방향힘  $f_b$ 와 축방향힘  $p_b$  그리고 슬라이더에 작용하는 수직반력  $f_4$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} f_a &= m_3(-R\omega_2^2 \sin(\phi + \theta) + La_3/2 + g \cos \theta) \\ &- \{[m_4(a_4 + \mu v g) + PF][\mu r_b \cos \varphi_b \\ &- \mu r_a \cos \varphi_a] - (\cos \theta - \nu \mu \sin \theta)\} \{ (m_3 L^2 / 12) a_3 \\ &+ m_3(-R\omega_2^2 \sin(\phi + \theta) + La_3/2 + g \cos \theta)[L/2 \\ &+ \mu r_a \sin \varphi_a] - m_3 \mu r_a \cos \varphi_a (R\omega_2^2 \cos(\phi + \theta) \\ &+ L\omega_3^2/2 + g \sin \theta)\} \} / AA \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} p_a &= -m_3(R\omega_2^2 \cos(\phi + \theta) + L\omega_3^2/2 + g \sin \theta) \\ &+ \{[m_4(a_4 + \mu v g) + PF][\mu r_b \sin \varphi_b - \mu r_a \sin \varphi_a \\ &- L] - (\sin \theta + \nu \mu \cos \theta)\} \{ (m_3 L^2 / 12) a_3 \\ &+ m_3(-R\omega_2^2 \sin(\phi + \theta) + La_3/2 + g \cos \theta)[L/2 \\ &+ \mu r_a \sin \varphi_a] - m_3 \mu r_a \cos \varphi_a (R\omega_2^2 \cos(\phi + \theta) \\ &+ L\omega_3^2/2 + g \sin \theta)\} \} / AA \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} f_b &= \{(m_4(a_4 + \mu v g) + PF)(\mu r_b \cos \varphi_b \\ &- \mu r_a \cos \varphi_a) - (\cos \theta - \nu \mu \sin \theta)\} \{ (m_3 L^2 / 12) a_3 \\ &+ m_3(-R\omega_2^2 \sin(\phi + \theta) + La_3/2 + g \cos \theta) \\ &(L/2 + \mu r_a \sin \varphi_a) - m_3 \mu r_a \cos \varphi_a (R\omega_2^2 \cos(\phi + \theta) \\ &+ L\omega_3^2/2 + g \sin \theta)\} \} / AA \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} p_b &= \{-[m_4(a_4 + \mu v g) + PF][\mu r_b \sin \varphi_b - \mu r_a \\ &\sin \varphi_a - L] + (\sin \theta + \nu \mu \cos \theta)\} \{ (m_3 L^2 / 12) a_3 \\ &+ m_3(-R\omega_2^2 \sin(\phi + \theta) + La_3/2 + g \cos \theta) \\ &[L/2 + \mu r_a \sin \varphi_a] - m_3 \mu r_a \cos \varphi_a (R\omega_2^2 \cos(\phi + \theta) \\ &+ L\omega_3^2/2 + g \sin \theta)\} \} / AA \end{aligned} \quad (9)$$

$$f_4 = f_b \cos \theta - p_b \sin \theta + m_4 g \quad (10)$$

여기서

$$\begin{aligned} AA &= -\cos \theta L + \mu \sin \theta [-r_b \cos \varphi_b + r_a \cos \varphi_a \\ &- \nu \mu r_b \sin \varphi_b + \nu \mu r_a \sin \varphi_a + vL] \\ &+ \mu \cos \theta [r_b \sin \varphi_b - r_a \sin \varphi_a \\ &- \nu \mu r_b \cos \varphi_b + \nu \mu r_a \cos \varphi_a] \end{aligned}$$

이다.

Fig. 3은 연접봉의 임의 위치  $x$ 에 있는 미소요소에 대한 자유물체도이다. 미소요소의 회전관성과 2차항들을 무시하면, 미소요소에 대하여 다음과 같은 운동방정식을 얻는다.

$$f - (f + (\partial f / \partial x) dx) - (m_3 / L) g dx \cos \theta = (m_3 / L) dx a_{3y} \quad (11)$$

$$-p + (p + (\partial p / \partial x) dx) + (m_3 / L) g dx \sin \theta = (m_3 / L) dx a_{3x} \quad (12)$$

$$(M + (\partial M / \partial x) dx) - M - f dx = 0 \quad (13)$$

여기서  $f$ ,  $p$ 와  $M$ 은 연접봉의 조인트 A로부터 임의의 위치  $x$ 만큼 멀어져 있는 미소요소의 단면  $q$ 에 작용하는 횡방향힘, 축방향힘 및 굽힘모멘트이고  $a_{3x}$ 와  $a_{3y}$ 는 미소요소의  $x$ ,  $y$ 방향의 가속도로서 다음과으로 표현된다.

$$a_{3x} = -R\omega_2^2 \cos(\phi + \theta) - x\omega_3^2 \quad (14)$$

$$a_{3y} = -R\omega_2^2 \sin(\phi + \theta) + x\alpha_3 \quad (15)$$

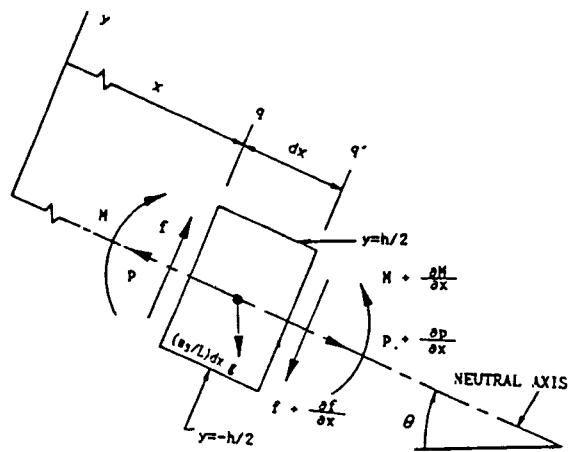


Fig. 3 Free-body diagram of a differential mass element of the coupler

식 (14)와 (15)을 식 (11)~(13)에 대입하면 다음과 같은 연접봉의 미소요소에 대한 미분 운동방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned}\partial f / \partial x &= (m_3/L)[R\omega_2^2 \sin(\phi + \theta) \\ &\quad + g \cos \theta - x \alpha_3]\end{aligned}\quad (16)$$

$$\begin{aligned}\partial p / \partial x &= -(m_3/L)[R\omega_2^2 \cos(\phi + \theta) \\ &\quad - g \sin \theta + x \omega_3^2]\end{aligned}\quad (17)$$

$$\partial M / \partial x = f \quad (18)$$

상기 미분방정식의 경계조건은

$$f(0, \phi) = f_a, \quad p(0, \phi) = -p_a,$$

$$M(0, \phi) = \mu r_a \sin \varphi_a f_a + \mu r_a \cos \varphi_a p_a$$

$$f(L, \phi) = -f_b, \quad p(L, \phi) = p_b,$$

$$M(L, \phi) = -\mu r_b \sin \varphi_b f_b - \mu r_b \cos \varphi_b p_b$$

로 표현되고, 이들을 이용하여 식 (16)~(18)의 해를 구하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}f &= f_a + (m_3 x / L)[R\omega_2^2 \sin(\phi + \theta) \\ &\quad + g \cos \theta - x \alpha_3 / 2]\end{aligned}\quad (19)$$

$$\begin{aligned}p &= -p_a - (m_3 x / L)[R\omega_2^2 \cos(\phi + \theta) \\ &\quad - g \sin \theta + x \omega_3^2 / 2]\end{aligned}\quad (20)$$

$$\begin{aligned}M &= \mu r_a \sin \varphi_a f_a + \mu r_a \cos \varphi_a p_a + f_a x \\ &\quad + (m_3 x^2 / (2L))[R\omega_2^2 \sin(\phi + \theta) \\ &\quad + g \cos \theta - x \alpha_3 / 3]\end{aligned}\quad (21)$$

Fig. 3에 정의된 방향 표시에 따르면,  $p$ 가 +일 때 연접봉은 단면  $q$ 에서 인장을 받고,  $p$ 가 -일 때 압축을 받게 된다.

### 3. 무차원 힘과 굽힘모멘트

횡방향 및 축방향의 굽힘모멘트를 무차원화하기 위하여, 정규화 무차원 변수(normalized non-dimensional variable)들을 식 (22)와 같이 도입한다.

$$\begin{aligned}\eta &= R/L \\ \omega &= \omega_3 / \omega_2 = -\eta \cos \phi / \cos \theta \\ \alpha &= \alpha_3 / \omega_2^2 \\ &= \eta [\sin \phi \cos \theta - \eta (\cos \phi)^2 \tan \theta] / (\cos \theta)^2 \\ a &= a_4 / (R\omega_2^2) = -[\cos(\phi + \theta) (\cos \theta)^2 \\ &\quad + \eta (\cos \phi)^2] / (\cos \theta)^3\end{aligned}\quad (22)$$

$$\pi = m_4 / m_3, \quad \rho = PF / (m_3 R\omega_2^2), \quad \gamma_a = r_a / L$$

$$\gamma_b = r_b / L, \quad \varepsilon = g / (R\omega_2^2), \quad \chi = x / L$$

식 (22)를 이용해서 연접봉의 양단  $A$ 와  $B$ 에 가해지는 횡방향과 축방향의 힘들을 무차원화하면 다음과 같다.

$$F_a = f_a / (m_3 R\omega_2^2)$$

$$\begin{aligned}&= -\sin(\phi + \theta) + \alpha / (2\eta) + \varepsilon \cos \theta \\ &- \{[\pi(a + \mu \varepsilon) + \rho][\mu \gamma_b \cos \varphi_b - \mu \gamma_a \cos \varphi_a] \\ &- (\cos \theta - \nu \mu \sin \theta)\{\alpha / (12\eta) \\ &+ (-\sin(\phi + \theta) + \alpha / (2\eta) \\ &+ \varepsilon \cos \theta)[1/2 + \mu \gamma_a \sin \varphi_a] \\ &- \mu \gamma_a \cos \varphi_a (\cos(\phi + \theta) \\ &+ \omega^2 / (2\eta) + \varepsilon \sin \theta)\}\}/AAA\end{aligned}\quad (23)$$

$$\begin{aligned}F_b &= f_b / (m_3 R\omega_2^2) \\ &= \{[\pi(a + \mu \varepsilon) + \rho][\mu \gamma_b \cos \varphi_b \\ &- \mu \gamma_a \cos \varphi_a] - (\cos \theta - \nu \mu \sin \theta)\{\alpha / (12\eta) \\ &+ (-\sin(\phi + \theta) + \alpha / (2\eta) + \varepsilon \cos \theta)[1/2 \\ &+ \mu \gamma_a \sin \varphi_a] - \mu \gamma_a \cos \varphi_a (\cos(\phi + \theta) \\ &+ \omega^2 / (2\eta) + \varepsilon \sin \theta)\}\}/AAA\end{aligned}\quad (24)$$

$$\begin{aligned}P_a &= p_a / (m_3 R\omega_2^2) \\ &= -\cos(\phi + \theta) - \omega^2 / (2\eta) - \varepsilon \sin \theta \\ &+ \{[\pi(a + \mu \varepsilon) + \rho][\mu \gamma_b \sin \varphi_b - \mu \gamma_a \sin \varphi_a \\ &- 1] - (\sin \theta + \nu \mu \cos \theta)\{\alpha / (12\eta) \\ &+ (-\sin(\phi + \theta) + \alpha / (2\eta) + \varepsilon \cos \theta)[1/2 \\ &+ \mu \gamma_a \sin \varphi_a] - \mu \gamma_a \cos \varphi_a (\cos(\phi + \theta) \\ &+ \omega^2 / (2\eta) + \varepsilon \sin \theta)\}\}/AAA\end{aligned}\quad (25)$$

$$\begin{aligned}P_b &= p_b / (m_3 R\omega_2^2) \\ &= \{-[\pi(a + \mu \varepsilon) + \rho][\mu \gamma_b \sin \varphi_b \\ &- \mu \gamma_a \sin \varphi_a - 1] + (\sin \theta + \nu \mu \cos \theta)\{\alpha / (12\eta) \\ &+ (-\sin(\phi + \theta) + \alpha / (2\eta) + \varepsilon \cos \theta)[1/2 \\ &+ \mu \gamma_a \sin \varphi_a] - \mu \gamma_a \cos \varphi_a (\cos(\phi + \theta) \\ &+ \omega^2 / (2\eta) + \varepsilon \sin \theta)\}\}/AAA\end{aligned}\quad (26)$$

여기서

$$\begin{aligned}AAA &= -\cos \theta + \mu \sin \theta [-\gamma_b \cos \varphi_b \\ &+ \gamma_a \cos \varphi_a - \nu \mu \gamma_b \sin \varphi_b + \nu \mu \gamma_a \sin \varphi_a + \nu] \\ &+ \mu \cos \theta [\gamma_b \sin \varphi_b - \gamma_a \sin \varphi_a - \nu \mu \gamma_b \cos \varphi_b \\ &+ \nu \mu \gamma_a \cos \varphi_a]\end{aligned}$$

이다.

그리고 연접봉의 임의 위치  $x$ 의 단면  $q$ 에 작용하는 횡방향 힘  $f$ , 축방향 힘  $p$  및 굽힘모멘트  $M$ 을 식 (19)~(21)로부터 무차원화하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\begin{aligned}F &= f / (m_3 R\omega_2^2) \\ &= F_a + \chi [\sin(\phi + \theta) + \varepsilon \cos \theta - \alpha \chi / (2\eta)]\end{aligned}\quad (27)$$

$$\begin{aligned}P &= p / (m_3 R\omega_2^2) \\ &= -P_a - \chi [\cos(\phi + \theta) - \varepsilon \sin \theta + \chi \omega^2 / (2\eta)]\end{aligned}\quad (28)$$

$$\begin{aligned}M_n &= M / (m_3 R L \omega_2^2) \\ &= (\chi + \mu \gamma_a \sin \varphi_a) F_a + \mu \gamma_a \cos \varphi_a P_a\end{aligned}$$

$$+ \chi^2 [\sin(\phi + \theta) + \varepsilon \cos \theta - \alpha \chi / (3\eta)] / 2 \quad (29)$$

#### 4. 연접봉의 응력

폭과 높이가  $b$ 와  $h$ 인 연접봉의 축응력은  $\sigma_a = p/(bh)$ 로 되므로 무차원 축응력  $S_a$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$S_a = (bh)\sigma_a / (m_3 R \omega_2^2) = P \quad (30)$$

단면  $q$ 의 중립축 ( $y=0$ )에서  $y$ 만큼 떨어진 위치에 생기는 전단 응력은  $\tau = 6f(h^2/4 - y^2)/(bh^3)$ 로 되며 무차원 전단응력  $\Gamma$ 는 식 (31)로 표현된다.

$$\Gamma = \frac{(bh)\tau}{m_3 R \omega_2^2} = 6F(1/4 - \nu^2) \quad (31)$$

여기서  $\nu$ 는  $y/h$ 이다.

단면  $q$ 에 작용하는 굽힘모멘트  $M$ 에 의해, 중립축에서  $y$ 만큼 떨어진 위치에 발생하는 굽힘 응력  $\sigma_b$ 는 Fig. 3의 부호표시에 따르면  $\sigma_b = -12My/(bh^3)$ 로 나타낼 수 있다. 무차원 굽힘 응력  $S_b$ 는

$$S_b = \frac{(bh)\sigma_b}{m_3 R \omega_2^2} = -\frac{12M_n}{\lambda} \nu \quad (32)$$

로 되고, 여기서  $\lambda = h/L$ 은 연접봉의 세장비 (slenderness ratio)이다.

식 (30)과 (32)를 이용하면 무차원 합성 축응력  $S$ 는

$$S = S_a + S_b = P - 12M_n \nu / \lambda \quad (33)$$

로 된다.

합성 축응력  $S$ 는 시스템 변수  $\eta, \pi, \gamma_a, \gamma_b, \nu$ 와 운전변수인  $\mu, \omega, \phi, \theta, \varepsilon$  그리고 위치  $\chi$ 의 함수임을 알 수 있다.

연접봉에 작용하는 무차원 최대 주응력  $S_1$ 과 최소 주응력  $S_2$ 는

$$S_{1,2} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 + (\Gamma)^2} \quad (34)$$

이고, 두 주응력의 방향  $\zeta$ 는  $\tan(2\zeta) = -2\Gamma/S$ 로 된다.

무차원 최대 전단응력  $\Gamma_{\max}$ 은 식 (35)와 같다.

$$\Gamma_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 + (\Gamma)^2} \quad (35)$$

그리고 연접봉 단면상의 임의 위치  $y$ 에서의 최대 주응력  $\sigma_1$ 과 최소 주응력  $\sigma_2$ 는 다음식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (m_3 R \omega_2^2) S_1 / (bh) \\ \sigma_2 &= (m_3 R \omega_2^2) S_2 / (bh) \end{aligned} \quad (36)$$

또한 최대 전단응력  $\tau_0$ 은 다음식으로 주어진다.

$$\tau_0 = m_3 R \omega_2^2 \Gamma_{\max} / (bh) \quad (37)$$

#### 5. 수치해석 결과 및 고찰

마찰력과 마찰토크의 영향을 반영하는 식 (5)의 항들을 포함하고 있는 식 (6)~(10), 식 (19)~(21)과 식 (23)~(26)은 비선형 방정식들이다.

반복법을 사용하여 이들 방정식의 해를 구한다. 먼저 마찰계수  $\mu$ 가 0 즉 마찰이 없는 경우로 상기 각 방정식의 해를 구하고, 이 값들을 식 (5)에 대입하여  $\varphi_a, \varphi_b$ 와  $v$ 를 구한다. 그리고 이들  $\varphi_a, \varphi_b$ 와  $v$ 를 다시 상기 각 방정식에 대입하여 각 방정식의 새로운 해를 구한다<sup>(9)</sup>. 이런 계산과정을 반복 수행하여 얻게 되는 해의 오차가 허용한도내에 들면 계산을 중지하고 그 때의 해를 방정식의 해로 한다.

이상의 수행과정을 통하여 마찰과 부하가 작용하는 경우 조인트와 연접봉에 작용하는 힘들과 연접봉의 임의 위치에 작용하는 힘과 모멘트들을 식 (6)~(10)과 식 (19)~(21)에서 구할 수 있다.

식 (5)의  $\varphi_a, \varphi_b$ 와  $v$ 는 식 (22)~(26)에 주어진 용어들을 사용하면 다음과 같이 무차원으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \sin^{-1} [\operatorname{sgn}(-\eta \cos \phi / \cos \theta - 1) F_a / \sqrt{F_a^2 + P_a^2}] \\ \varphi_b &= \sin^{-1} [\operatorname{sgn}(-\cos \phi / \cos \theta) F_b / \sqrt{F_b^2 + P_b^2}] \\ v &= \operatorname{sgn}(\sin \phi + \cos \phi \tan \theta) (P_b \sin \theta - F_b \cos \theta - \pi \varepsilon) \end{aligned} \quad (38)$$

무차원 힘과 굽힘모멘트들은 식 (5) 대신 식 (38)을 이용하여 전술한 과정의 수치계산을 수행하면 부하와 마찰을 고려한 경우의 무차원 힘과 굽힘모멘트들을 식 (23)~(26)에서 얻을 수 있다.

최대 주응력  $S_1, S_2$ 와  $\Gamma_{\max}$ 의 최대값을 결정하는 것은 기계 기구의 설계자료로서 중요하다. 설계변수  $\eta, \pi, \lambda, \mu, \rho, \gamma_a$ 와  $\gamma_b$ 가 정의된 기구에 있어서  $S_1, S_2$ 와  $\Gamma_{\max}$ 의 최대값은 다음과 같은 최적화 방법 (optimization method)을 사용하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{Maximize } |S_1 \text{ or } S_2 \text{ or } \Gamma_{\max}| \\ &\quad \chi, \nu, \phi \\ &\text{Subject to } 0 \leq \chi \leq 1, \quad -0.5 \leq \nu \leq 0.5, \\ &\quad 0 \leq \phi \leq 360^\circ \\ &\text{Given data } \eta, \pi, \lambda, \mu, \rho, \gamma_a, \gamma_b \end{aligned} \quad (39)$$

수치 해석례로  $R=7\text{cm}, L=28\text{cm}, b=1\text{cm}, h=3\text{cm}, m_3=m_4=1.5\text{kg}, r_a=r_b=1.5\text{cm}$ 인 슬라이더

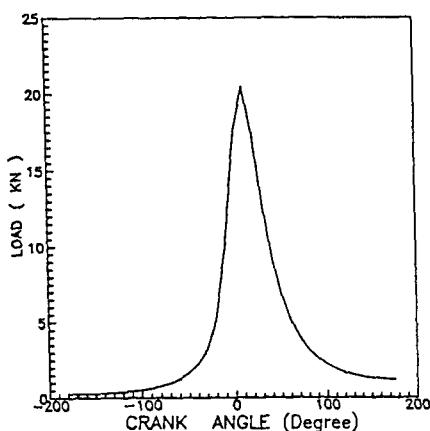


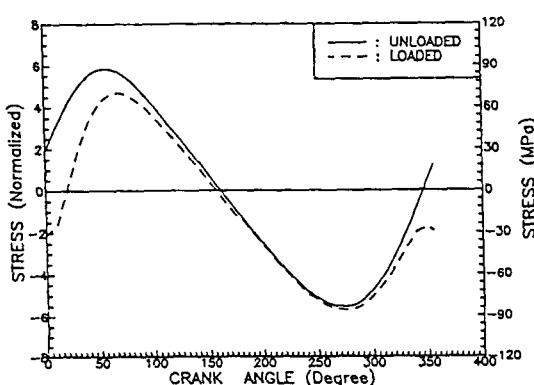
Fig. 4 Load on slider head

-크랭크기구를 택하였다. 무부하 상태( $\rho=0$ )에서 마찰계수  $\mu=0.02$ , 크랭크 회전수 4000rpm인 경우, 식 (39)의 해석 결과로 부터 최대 주응력  $S_1$ 은  $\chi=0.5235$ ,  $\nu=0.50$ ,  $\phi=55.8383^\circ$ 에서 최대 값 5.9093을, 최소 주응력  $S_2$ 는  $\chi=0.5535$ ,  $\nu=0.50$ ,  $\phi=271.4404^\circ$ 에서 최소값 -5.5176을 얻었다. 그리고 최대 전단응력  $\Gamma_{\max}$ 는 최대 주응력과 같은 상태에서 최대값 2.9546을 얻었다. 연접봉내의 최대 응력은 연접봉의 바깥면인  $y=h/2$ 에서 생기고, 그 작용방향은 연접봉의 축방향과 일치한다.

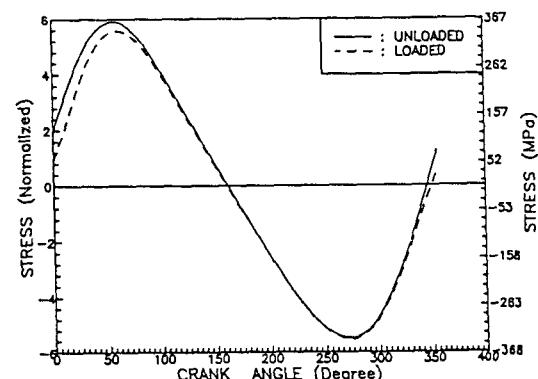
상기 기구의 슬라이더에 내연기관의 실린더압력에 의한 Fig. 4와 같은 부하가 작용하는 것으로 가정하여 작동부하가 연접봉의 응력변동에 미치는 영향을 고찰한다. 크랭크가 2000rpm으로 회전할 때

부하 및 무부하 상태에서  $\chi=0.5535$ ,  $\nu=0.50$ 지점의 연접봉에 발생하는 응력변동을 Fig. 5(a)에 표시하였다. 무부하시에는 최고응력 89.91MPa, 교번응력 87.54MPa, 평균응력 2.38MPa, 응력비 -0.95인데 반하여, 부하시에는 교번하중이 최고응력 71.89MPa, 교번응력 79.81MPa, 평균응력 -7.91MPa, 응력비 -1.22인 교번응력으로 변화되었다. 즉 슬라이더에 작용하는 부하의 영향으로 연접봉의 최대응력은 무부하시의 최대응력보다 20.04%감소하고, 최소응력은 3.0%증가하였다. 또 최대응력이 작용하는 크랭크 회전각은 55°부근에서 70°부근으로 옮겨진 반면 최소응력의 작용위치는 크랭크 회전각 275°로 일정하다. 특히 큰 부하가 작용하는 0°부근에서는 부하에 의해 응력의 작용방향이 바뀌고 응력이 약 61.20MPa정도 증가했다. Fig. 5(b)는 4000rpm에서의 응력변동을 표시한다. 무부하시에는 최고응력이 362.84MPa, 교번응력 350.14MPa, 평균응력 12.71MPa, 응력비 -0.93인데 반하여, 부하시에는 최고응력이 342.53MPa, 교번응력 341.25MPa, 평균응력 1.29MPa, 응력비 -0.99인 교번응력상태로 변화되었다. 즉 작용부하의 영향으로 연접봉의 최대응력은 5.6%감소하고, 최소응력은 0.75%증가하였지만 2000rpm의 경우보다는 변화정도가 적다.

Fig. 5(a)와 (b)의 결과로부터 작용부하가 부재의 응력변동에 미치는 영향은 고속상태에서 보다 저속상태에서 그 영향이 크게 나타나고, 고속이 될 수록 부하보다는 기구의 물리적 특성들에 의해 부재의 응력변동이 크게 좌우된다고 생각된다.



(a) 2000rpm



(b) 4000rpm

Fig. 5 Stress fluctuation ( $\eta=0.25$ ,  $\pi=1$ ,  $\lambda=0.107$ ,  $\mu=0.01$ ,  $\gamma_a=0.054$ ,  $\gamma_b=0.054$ ,  $\nu=0.5$ ,  $\chi=0.5235$ )

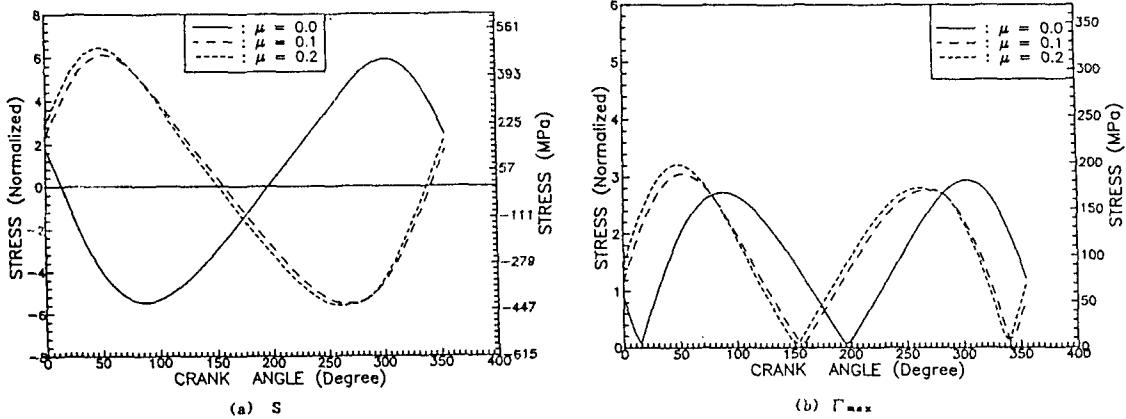


Fig. 6 The effect of friction on the stress fluctuation. ( $\eta=0.25$ ,  $\pi=2$ ,  $\lambda=0.107$ ,  $\gamma_a=0.054$ ,  $\gamma_b=0.054$ , 4000 rpm and unloaded)

Fig. 6(a)와 (b)는 무부하 상태하에서 마찰이 없는 경우와 마찰이 있는 경우 무차원 최대 주응력이 생기는 위치에서의 연접봉에 발생하는 무차원 축방향 응력 및 전단응력의 변동을  $\phi$ 에 대해 나타냈다. 그 결과 마찰이 없는 경우에 비해서 마찰계수가 0.10과 0.20인 경우 최대 무차원 축방향 응력 및 전단응력은 3.76%, 9.23% 및 3.69%, 9.27%씩 각각 증가하고, 교변응력은 2.58%, 6.20%씩 증가하였지만 응력비는  $-0.87\sim-0.93$ 정도이었다. 그리고 이들 마찰의 영향에 의해서 연접봉의 최대 주응력이 발생하는 위치의 크랭크 각변위의 위상이 약 110도 정도 늦어졌다.

Fig. 7(a)와 (b)는 부하 상태하에서 마찰이 없는 경우와 마찰이 있는 경우 무차원 최대 주응력이 생

기는 위치에서 연접봉에 발생하는 무차원 축방향 응력 및 전단응력의 변동을 나타냈다. 그 결과 마찰이 없는 경우에 비해서 마찰계수가 0.10과 0.20인 경우 최대 무차원 축방향 응력 및 전단응력은 0.92%, 4.27% 및 2.16%, 3.84%씩 각각 증가하고, 교변응력은  $-6.81\%$ , 4.05%씩 증가하였지만 응력비는  $-0.99$ 로 일정하였다. 연접봉의 최대 주응력이 발생하는 위치의 크랭크 각변위의 위상변화는 무부하 상태와 같은 현상을 보였다.

Table 1과 2는 무부하 및 부하상태에서 마찰계수의 변화에 따른 무차원 최대주응력  $S_1$ 의 최대값과 그 발생위치를 나타냈다. 무부하 상태에서는 마찰계수  $\mu$ 가 0.05, 0.1, 0.15, 0.2인 경우는 마찰이 없는 경우보다 무차원 응력변동의 최대값이

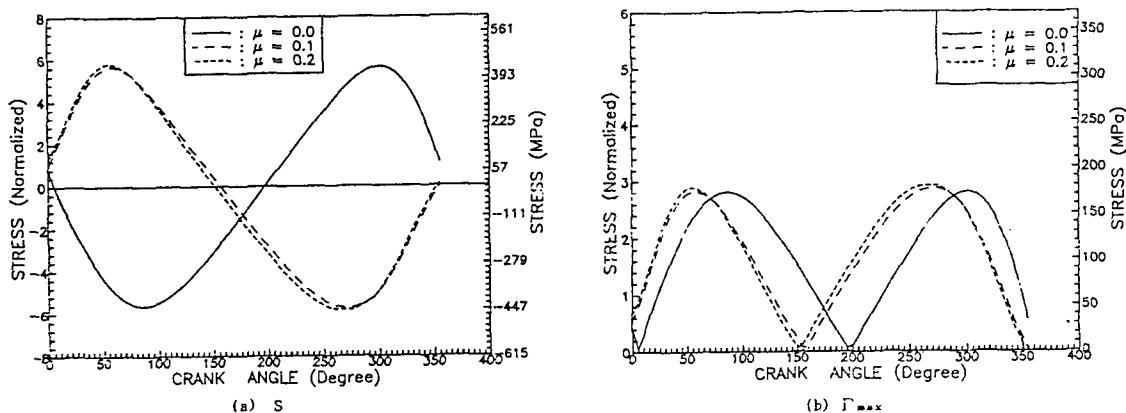


Fig. 7 The effect of friction on the stress fluctuation. ( $\eta=0.25$ ,  $\pi=1$ ,  $\lambda=0.107$ ,  $\gamma_a=0.054$ ,  $\gamma_b=0.054$ , 4000 rpm and loaded)

Table 1 The effect of the coefficient of friction on the stress

Coeff. of friction	Normalized stress ( $S_1$ )	$\chi$	$\nu$
0.00	5.8982	0.529226	-0.5
0.01	5.8859	0.524700	0.5
0.05	5.9833	0.519746	0.5
0.10	6.1202	0.513465	0.5
0.15	6.2735	0.507039	0.5
0.20	6.4428	0.500442	0.5

(4000rpm and unloaded)

Table 2 The effect of the coefficient of friction on the stress

Coeff. of friction	Normalized Stress ( $S_1$ )	$\chi$	$\nu$
0.00	5.6506	0.553161	-0.5
0.01	5.6603	0.553473	0.5
0.05	5.7025	0.554350	0.5
0.10	5.7620	0.554683	0.5
0.15	5.7701	0.548244	0.5
0.20	5.8916	0.549641	0.5

(4000rpm and loaded)

1.44%, 3.76%, 6.36%, 9.23% 증가하고 발생위치는  $\chi$ 는 0.5292에서 0.5197, 0.5135, 0.5070, 0.5004로 변하였다. 그리고 부하 상태에서는 마찰계수가  $\mu$ 가 0.05, 0.1, 0.15, 0.2인 경우는 마찰이 없는 경우보다 무차원 응력변동의 최대값이 0.92%, 1.97%, 2.12%, 4.27% 증가하고 발생위치  $\chi$ 는 0.5532에서 0.5544, 0.5547, 0.5482, 0.5496으로 변한다. 그리고 무차원 최대 주응력의 최대값이 발생하는 단면위치  $\nu$ 는 마찰이 없는 경우는 -0.5이였고 마찰이 있는 모든 경우는 0.5이였다. 이들 결과로부터 마찰이 증가하면 부재에 발생하는 변동응력이 증가하고 최대 주응력이 발생하는 크랭크 각변위의 위상도 변함을 알 수 있으며, 그 정도는 본 기구의 경우에서는 부하 상태보다 무부하 상태에서 마찰의 영향이 더 크다.

따라서 마찰이 부재의 응력변동에 미치는 영향은 결코 무시할 수 없다고 하겠다.

Fig. 8은 크랭크 회전수에 따른 무차원 주응력의 최대값의 변화를 나타낸 것이다. 본 모델의 기구에

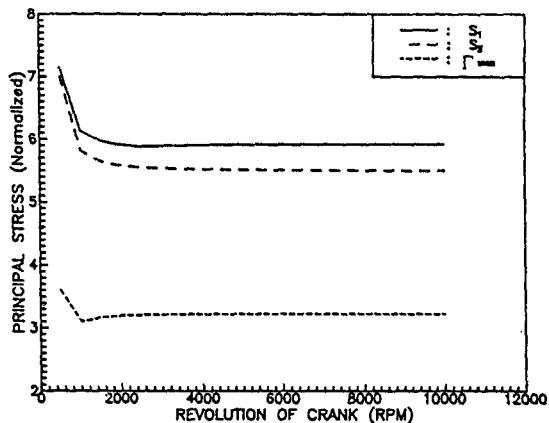


Fig. 8 The effect of the crank revolution of the stress. ( $\eta=0.25$ ,  $\pi=1$ ,  $\lambda=0.107$ ,  $\mu=0.02$ ,  $\gamma_a=0.054$ ,  $\gamma_b=0.054$ ,  $\nu=0.5$  and  $\chi=0.5235$ )

있어서는 저속운전과 고속운전의 임계치라고 할 수 있을 만한 약 1000rpm을 경계로 하여, 그 이상의 고속운전 영역에서는 무차원 변동응력의 최대값이 일정하게 유지된다. 그러나 무차원 응력은 크랭크 회전 각속도의 제곱항( $m_3 R \omega_z^2$ )으로 normalized되어 있기 때문에 Fig. 8의 고속회전 영역에서와 같이 일정한 무차원 응력을 갖는 경우 실제 변동응력의 최대값은 운전속도의 제곱에 비례하여 증가한다. 이는 역시 저속운전 영역에서는 중력과 부하가 변동응력에 크게 영향을 미치나, 고속운전영역에서는 이들의 영향보다 기계 기구의 물리적 특성들에 의해 응력변동이 크게 좌우됨을 의미한다.

이상의 해석 결과는 슬라이더-크랭크기구의 연접봉 링크에 발생하는 응력변동에 관한 것이기는 하지만, 일반 기계 기구의 부재에도 유사한 경향이 나타날 것임에는 틀림이 없다. 기계 기구의 부재에 발생하는 응력변동은 부재의 피로파괴에 영향을 미치므로, 이들 변동응력에 대한 최대응력, 최소응력, 평균응력, 교번응력 및 응력비 등에 대한 검토가 설계전에 반드시 이루어져야 할 것으로 생각한다.

## 6. 결 론

부하와 마찰을 고려한 고속기구의 부재에 작용하는 응력변동의 특성을 고찰하기 위하여, 슬라이더-크랭크기구의 연접봉을 수치해석의 대상으로 하여

이론해석한 결과, 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 마찰은 기계부재의 변동응력을 증가시키는 경향이 있으며, 응력변동 해석에서는 반드시 마찰의 영향을 고려하여야 한다.
- (2) 고속운전의 영역에서는 변동응력값은 운전속도의 제곱에 비례한다.
- (3) 고속운전의 영역에서는 부하보다는 기구의 물리적 특성에 의해 부재의 응력변동이 크게 좌우된다.

### 참 고 문 헌

- (1) Berkof, R. S. and Lowen, G.C., 1971, "Theory of Shaking Moment Optimization of Force-Balanced Four-Bar Linkages", ASME, Journal of Engineering for Industry, Series B, Vol.93, No.1, pp. 53~60.
- (2) Ogawa, K., and Funabashi, H., 1969, "On the Balancing of the Fluctuating Input Torque Caused by Intertia Forces in Crank and Rocker Mechanisms", ASME, Journal of Engineering for Industry, Series B, Vol.91, No.1, pp. 97~102.
- (3) Dubowsky, S., and Freudenstein, F., 1971, "Dynamic Analysis of Mechanical Systems with Clearances", ASME, Journal of Engineering for Industry, Series B, Vol.93, No.1, pp. 305~316.
- (4) Iman, I., Sandor, G.N., and Kramer, S.N., 1973, "Deflection and Stress Analysis in High Speed Planar Mechanisms with Elastic Links", ASME, Journal of Engineering for Industry, Series B, Vol.95, No.2, pp. 549~557.
- (5) Chu, S.C. and Pan, K.C., 1975, "Dynamic Response of High Speed Slider-Crank Mechanism with an Elastic Connecting Rod", ASME, Journal of Engineering for Industry, Series B, Vol.97, No.2, pp. 542~550.
- (6) Jasinski, P.W., Lee, H.C., and Sandor, G.N., 1971, "Vibrations of Elastic Connecting Rod of a High Speed Slider-Crank Mechanism", ASME, Journal of Engineering for Industry, Series B, Vol.93, No.2, pp. 636~644.
- (7) Badlani, M., and Kleinhenz, W., 1979, "Dynamic Stability of Elastic Mechanisms", ASME, Journal of Mechanical Design, Vol.101, No.1, pp. 149~153.
- (8) Yang, A.T., Pennock, G.R. and Hsia, L.M., 1981, "Stress Fluctuation in High Speed Mechanisms", ASME, Journal of Mechanical Design, Vol.103, pp. 736~742.
- (9) Kim, C.H., Kim, S.S. and Shin, Y.J., 1990, "A New Solution for Mechanisms Including Coulomb Friction," KSME Journal, Vol.4, No.2, pp. 136~140.