

〈論 文〉

천이온도 상태에서의 J적분

이강용* · 박정수**

(1991년 2월 9일 접수)

J-Integral under Transient Temperature State

Kang Yong Lee and Jeong Soo Park

Key Words : Transient Temperature(천이온도), Thermal Shock(열충격), J-Integral(J적분), Glass(유리), Steel(강)

Abstract

For the cracked plate under transient temperature distribution, *J*-integral is expressed in the form of line integral by using convolution integral. The J_1 integral is calculated for a through line center cracked steel plate under thermal and mechanical loading conditions and the calculated values are in good agreement with previous results. The effect of inertia term on the J_1 integral is not negligible for a glass but for a steel. For the glass plate, the rates of J_1 integral value to time increase if the values of material properties such as specific heat, thermal conductivity, thermal diffusivity and Young's modulus as well as crack length and temperature difference in cracked edge increase.

1. 서 론

천이 온도분포(transient temperature distribution)에서의 균열 거동에 관한 응력세기계수(stress intensity factor) 연구는 1960년대 후반부터 시도되었다. Emery 등^(1,2)은 가장자리 균열을 가진 직사각형 평판에 열하중이 가해질때 1 차원 온도 분포를 계산하고 Green함수를 이용하여 열응력세기계수를 구하는 연구⁽¹⁾, 담금질 시편의 모서리 균열(corner crack)에 대해 열 응력세기계수를 유한요소법을 사용하여 계산하는 연구⁽²⁾를 발표하였다. Blauel 등⁽³⁾은 가장자리 균열을 가진 유리평판의 열응력세기계수를 1차원 온도분포로부터 유한요소법으로 계산하고, 열응력세기계수가 임계값에 도달

하는 파괴시간을 측정하였다. Grebner 등⁽⁴⁾은 열충격을 받는 파이프에 존재하는 반타원형 표면균열의 가장 깊은 부분과 표면에서의 열응력세기계수를 계산하기 위해서 가중합수법을 적용한 후 유한요소법을 이용하여 해석하였으며 1차원 온도분포를 이용하였다. Nied^(5,6)는 가장자리 균열을 가진 평판이 열충격을 받을 때 시간 경과에 따른 열응력세기계수를 적분방정식을 풀어서 계산하는 연구⁽⁵⁾와 가장자리 균열을 가진 띠판(strip)의, 가장자리가 갑자기 가열될때 적분방정식을 풀어서 균열의 단형 현상을 해석하는 연구⁽⁶⁾를 수행한 바 있다. 비슷한 모델에 대해 이 강용 등⁽⁷⁾이 가중합수법을 적용하여 열응력세기계수의 이론식을 제시하였다. Ishida 등⁽⁸⁾은 열충격을 받는 실린더내에 존재하는 동전형 균열(penny shaped crack)의 열응력세기계수의 시간적 변화를 연구하기 위해서 1차원 온도분포를 이용하여 적분방정식을 유도하였다. Kokini^(9,10)는 열충격하에 있는 가장자리 균열에 대한 열응력 세기

*정회원, 연세대학교 기계공학과

**정회원, 삼성전자주식회사 종합연구소 기초기술 연구실

계수를 구하기 위하여 변형균열닫힘적분(modified crack closure integral)을 구하고 이 적분을 유한 요소법을 사용하여 계산하는 연구⁽⁹⁾와 재료상수의 시간에 따른 변화를 고려하여 열충격하에 있는 가장자리 균열에 대하여 열응력세기계수를 계산하는 연구⁽¹⁰⁾의 결과를 보고하였다. 재료의 온도분포가 천이상태인 경우에 J 적분을 계산한것은 1970년대 후반부터이다. Jung 등⁽¹¹⁾은 가압열충격을 받는 원통형 용기내에 존재하는 균열의 거동을 해석하기 위해 유한요소법을 이용하여 면적분항을 포함하는 J 적분을 계산하였다. Hsu 등⁽¹²⁾은 온도가 급강하하는 강판에 존재하는 관통균열을 강판에 존재하는 중앙균열로 이상화하여 J 적분을 계산하였으나 J 적분식에 온도에 관한 면적분항을 포함하고 있다. J 적분의 선적분화에 관한 연구로는 Nilson⁽¹³⁾이 기계적 동하중을 받는 균열에 대해 Laplace 변환을 이용하여 선적분 형태의 J 적분을 유도하였다. Gurtin⁽¹⁴⁾은 합성적분(convolution integral)을 이용하여 기계적 동하중을 받는 균열주위에서 선적분 형태의 J 적분을 유도하였다.

세라믹 재료의 열충격 파괴연구로써 Hasselman⁽¹⁵⁾은 열충격을 받는 세라믹 재료의 탄성에너지를 계산하고, 재료상수의 영향을 검토하였으며, 열충격을 받는 균열의 안정 조건식을 유도하였으나 파괴역학의 매개변수는 연구하지 않았다. Davis 등⁽¹⁶⁾은 열충격을 받는 이중 외팔보 시편의 1차원 온도 분포를 이용하여 에너지 해방률을 계산하여 균열진전과 멈춤을 해석하였으며 실험결과와 비교하였다.

본 연구에서는 천이온도하에 있는 물체의 균열의 거동을 연구하기 위하여 선적분 형태의 J 적분을 유도하고 유한요소법으로 수치계산하여 기존의 결과와 비교한다. 한편 관성항과 재료의 물성치가 J 적분값에 미치는 영향을 검토한다.

2. 이 론

균열선단 앞에는 Fig. 1에서 보는 바와 같이, 실제 파괴가 진행되는 미소 반응지역 A_{end} 가 존재한다. 반응지역에 유입되는 에너지 유입량(energy flux) ϕ 와 엔트로피 유입량(entropy flux) S 는 다음 식으로 표현된다⁽¹⁷⁾.

$$\phi = \int_{\Gamma_{end}} \phi d\Gamma \quad (1)$$

$$S = \int_{\Gamma_{end}} s d\Gamma \quad (2)$$

여기에서

$$\phi = \rho(k+e) V_i \cdot n_i + t_i \cdot \dot{u}_i - q_i \cdot n_i \quad (3)$$

$$s = \rho \eta V_i \cdot n_i - \frac{q_i \cdot n_i}{T} \quad (4)$$

Γ_{end} 는 미소 반응지역 A_{end} 를 싸고 도는 경로 $a-d$ 이고, ρ 는 밀도, k 는 단위 질량당 운동에너지, e 는 단위 질량당 내부에너지, V_i 는 Γ_{end} 의 i 방향 속도, n_i 는 단위 외향 법선 벡터(unit outward normal vector), t_i 는 트랙션(traction), u_i 는 변위, q_i 는 열유동률(heat flow rate), η 는 단위 질량당 엔트로피 밀도, T 는 기준온도(reference temperature)이다. $(\dot{\quad})$ 는 시간 t 에 대한 1차 미분을 나타낸다. 균열선단에서 \dot{u}_i 은 다음 식으로 표현할 수 있다⁽¹⁷⁾.

$$\dot{u}_i = -V_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (5)$$

반응지역에 유입되는 자유에너지 유입량(free energy flux) F 는 다음과 같이 정의된다⁽¹⁷⁾

$$F = \int_{\Gamma_{end}} (\phi - Ts) d\Gamma \quad (6)$$

식 (3), (4), (5)를 식 (6)에 대입하고 Gauss 정리를 적용하면 물체력이 무시되는 경우에

$$F = \iiint_A \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x_k} + \rho \dot{u}_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] V_k dA - \int_{\Gamma+\Gamma_s} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} V_k d\Gamma + \int_{\Gamma_{end}} \rho (k+e-\eta T) V_k n_k d\Gamma \quad (7)$$

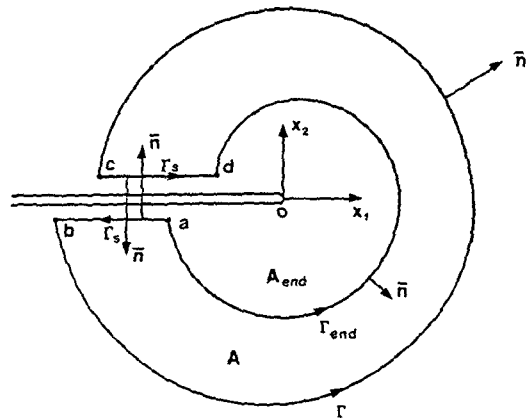


Fig. 1 Fracture process region, A_{end}

여기에서 Γ 는 Fig. 1에서 보는 바와 같이 균열크기에 비해서 충분히 큰 경로 $b-c$ 이며 Γ_s 는 균열면에 따른 경로 $a-b$ 와 $c-d$ 이고 A 는 경로 $a-b-c-d-a$ 로 둘러싸인 영역이다. 경로의 양의 방향은 영역을 왼쪽에 두고 도는 경우로 정의된다. σ_{ij} 는 응력텐서이다.

자유에너지 유입량 F 와 x_k 방향의 자유에너지 해방률(free energy release rate) J_k 의 관계식은 다음과 같다⁽¹⁷⁾.

$$F = J_k V_k \quad (8)$$

식 (7)과 (8)로 부터 자유에너지 해방률 J_k 는 다음 식으로 얻어진다.

$$J_k = \iint_A \left[\sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} + \rho \dot{u}_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] dA - \int_{\Gamma + \Gamma_s} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{end}}} \rho (k + e - \eta T) n_k d\Gamma \quad (9)$$

여기서 ε_{ij} 는 변형률 텐서이다. 식 (9)에서 σ_{ij} 는 다음과 같다.

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{ij} - \beta \delta_{ij} \theta \quad (10)$$

여기에서

$$\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad (11)$$

$$\beta = (3\lambda + 2\mu) \alpha \quad (12)$$

λ 와 μ 는 Lamé 상수, δ_{ij} 는 Kronecker 델타, θ 는 상대온도이고 α 는 선팅창 계수이다. 식 (10)을 식 (9)의 제1항에 대입하면

$$J_k = \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} \lambda \varepsilon^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \right) - \theta \frac{\partial (\beta \varepsilon)}{\partial x_k} + \rho \dot{u}_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] dA - \int_{\Gamma + \Gamma_s} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{end}}} \rho (k + e - \eta T) n_k d\Gamma \quad (13)$$

엔트로피 밀도 η 는 열탄성문제에서 다음과 같이 정의된다.^(18,19)

$$\eta = \frac{C}{T} \theta + \beta \varepsilon \quad (14)$$

여기에서 C 는 단위체적당 비열이다. 엔트로피 밀도 η 와 엔트로피 유동(entropy flow) η_i 의 관계는 다음과 같다.^(20,21)

$$\eta = -\text{div } \bar{\eta} = -\frac{\partial \bar{\eta}_i}{\partial x_i} \quad (15)$$

식 (14)과 식 (15)로 부터 다음식이 얻어진다.

$$\beta \varepsilon = -\frac{\partial \eta_i}{\partial x_i} - \frac{C}{T} \theta \quad (16)$$

식 (16)을 식 (13)에 대입하면 J_k 는 다음과 같다.

$$J_k = \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} \lambda \varepsilon^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \frac{C}{T} \theta^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\theta \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} + \rho \dot{u}_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \right] dA - \int_{\Gamma + \Gamma_s} t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\text{end}}} \rho (k + e - \eta T) n_k d\Gamma \quad (17)$$

식 (17)의 면적분항의 제5항에서 온도기울기 $\partial \theta / \partial x_i$ 는 다음과 같다.⁽²¹⁾

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_i} = -\frac{T}{K} \dot{\eta}_i \quad (18)$$

여기에서 $\dot{\eta}_i$ 는 엔트로피 유동률이다.

식 (17)의 면적분항의 제4항에 대해 Gauss 발산정리를 적용하고 식 (18)을 식 (17)의 면적분항의 제5항에 대입하면

$$J_k = \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} \lambda \varepsilon^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \frac{C}{T} \theta^2 \right) + \frac{T}{K} \dot{\eta}_i \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} + \rho \dot{u}_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] dA + \int_{\Gamma + \Gamma_s} \left(\theta \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} n_i - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_{\text{end}}} \left[\theta \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} n_i - \rho (k + e - \eta T) n_k \right] d\Gamma \quad (19)$$

식 (19)를 Laplace 변환시키면 다음과 같다.

$$\bar{J}_k = \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} \lambda \bar{\varepsilon} \bar{\varepsilon} + \mu \bar{\varepsilon}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \frac{C}{T} \bar{\theta} \bar{\theta} + \frac{T}{K} p \eta_i \frac{\partial \bar{\eta}_i}{\partial x_k} + \rho p^2 \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) \right] dA + \int_{\Gamma + \Gamma_s} \left(\bar{\theta} \frac{\partial \bar{\eta}_i}{\partial x_k} n_i - \bar{t}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_{\text{end}}} \left[\bar{\theta} \frac{\partial \bar{\eta}_i}{\partial x_k} n_i - \rho (\bar{k} + \bar{e} - \bar{\eta} T) n_k \right] d\Gamma \quad (20)$$

여기에서 $(\bar{\quad})$ 는 (\quad) 의 Laplace 변환을 뜻하며 p 는 Laplace 변환매개변수이다. 식 (20)을 역 Laplace 변환시킨 후에 합성이론을 적용하면 J_k 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 J_k = & \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} \lambda \varepsilon^* \varepsilon + \mu \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \frac{C}{T} \theta^* \theta \right) \right. \\
 & + \frac{T}{K} \dot{\eta}_i^* \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} + \rho \dot{u}_i^* \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Big] dA \\
 & + \int_{\Gamma+rs} \left(\theta^* \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} n_i - t_i^* \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) d\Gamma \\
 & - \int_{\Gamma_{end}} \left[\theta^* \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} n_i - \rho (k + e - \eta T) n_k \right] d\Gamma \quad (20)
 \end{aligned}$$

여기서 () * ()는 합성적분을 의미한다. 식(21)의 면적적분항 중 제4항에 초기조건 $\eta_i(x_m, 0) = 0$ 인 경우에 Leibnitz 적분공식과 합성적분의 교환법칙을 적용하면

$$\frac{T}{K} \dot{\eta}_i^* \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \frac{T}{K} \frac{\partial}{\partial x_k} (\dot{\eta}_i^* \eta_i) \quad (22)$$

유사한 방법으로 식(21)의 면적분항중 제5항은 초기조건 $\frac{\partial u_i(x_m, 0)}{\partial t} = u_i(x_m, 0) = 0$ 인 경우에

$$\rho \dot{u}_i^* \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \rho \frac{\partial}{\partial x_k} (\dot{u}_i^* u_i) \quad (23)$$

식(22)와 식(23)을 식(21)에 대입하면 J_k 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 J_k = & \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} \lambda \varepsilon^* \varepsilon + \mu \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \frac{C}{T} \theta^* \theta \right) \right. \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{T}{K} \dot{\eta}_i^* \eta_i + \rho \dot{u}_i^* u_i \right) \Big] dA \\
 & + \int_{\Gamma+rs} \left(\theta^* \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} n_i - t_i^* \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) d\Gamma \quad (24) \\
 & - \int_{\Gamma_{end}} \left[\theta^* \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} n_i - \rho (k + e - \eta T) n_k \right] d\Gamma
 \end{aligned}$$

식(18)로부터

$$\eta_i = \int_0^t \dot{\eta}_i dt = - \int_0^t \frac{K}{T} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} dt \quad (25)$$

식(25)에 Laplace 변환 및 합성적분의 정의를 적용하여 식(24)의 면적분항중 제4항과 식(24)의 $\Gamma+rs$ 와 Γ_{end} 상에서 선적분 중 제1항에 대하여 그 결과에 Gauss발산 정리를 적용하면

$$\begin{aligned}
 J_k = & \int_{\Gamma+rs-\Gamma_{end}} \left\{ \frac{1}{2} \lambda \varepsilon^* \varepsilon + \mu \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \frac{C}{T} \theta^* \theta \right. \\
 & + \frac{1}{2} \frac{K}{T} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} (1^* \frac{\partial \theta}{\partial x_i}) + \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i^* u_i \Big\} n_k d\Gamma \\
 & - \int_{\Gamma+rs} \left\{ \frac{K}{T} \theta^* \frac{\partial}{\partial x_k} (1^* \frac{\partial \theta}{\partial x_i}) n_i + t_i^* \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\} d\Gamma \\
 & + \int_{\Gamma_{end}} \left\{ \frac{K}{T} \theta^* \frac{\partial}{\partial x_k} (1^* \frac{\partial \theta}{\partial x_i}) n_i \right. \\
 & \left. + \rho (k + e - \eta T) n_k \right\} d\Gamma \quad (26)
 \end{aligned}$$

식(26)에서 반응지역 A_{end} 의 면적이 A 에 비교해서 매우 작으므로, Γ_{end} 에 관한 선적분항를 무시하는 경우에 에너지 해방률 J_k 는 다음과 같은 선적분만으로 표현된다.

$$\begin{aligned}
 J_k = & \iint_{\Gamma+rs} \left(\frac{1}{2} \lambda \varepsilon^* \varepsilon + \mu \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \frac{C}{T} \theta^* \theta \right. \\
 & + \frac{1}{2} \frac{K}{T} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} (1^* \frac{\partial \theta}{\partial x_i}) + \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i^* u_i \Big\} n_k d\Gamma \quad (27) \\
 & - \int_{\Gamma+rs} \left\{ \frac{K}{T} \theta^* \frac{\partial}{\partial x_k} (1^* \frac{\partial \theta}{\partial x_i}) n_i + t_i^* \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\} d\Gamma
 \end{aligned}$$

윗 식으로 부터 Gurtin⁽¹⁴⁾의 기계적 하중하에서의 선적분 J_k 가 얻어질수 있다.

3. 수치해석

시간변화에 따른 온도분포는 ADINAT로 부터 얻어진다. 이 온도분포는 ADINA에 입력되어 열 충격에 의한 응력, 변형률, 가속도가 출력된다. 이 출력중에서 J_I 적분을 수행하는 경로에 있는 데이터만 선택한다. 이 데이터와 ADINAT에서 출력된 온도, 온도구배를 이용하여 식(27)로부터 J_I 적분을 수행한다. 수치해석에 사용한 요소는 2차원 등매개요소(quadratic isoparametric element)이다.

3.1 기존 논문과의 비교

수치해석 모델은 Hsu 등⁽¹²⁾이 선정한 것으로 Fig. 2에서 보는 바와 같다. 균열면에 트래션이 작용하지 않는 관통 선 중앙 균열(through line

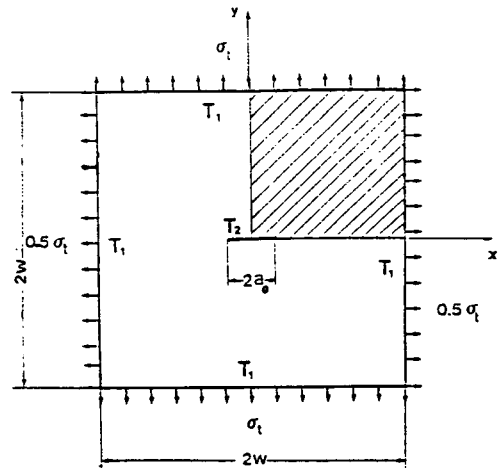


Fig. 2 Through line center crack model ($a_0 = 2.5\text{mm}$ and $W = 16\text{mm}$)

center crack)을 가진 얇은 평판에 x, y 방향으로 각각 인장응력 $0.5\sigma_t$ 와 σ_t (여기에서 σ_t 는 항복응력 σ_{ys} 의 반으로 정의된다.)가 작용하며 균열표면의 온도 T_2 는 Fig. 3과 같이 시간에 따라 변화한다. 평판경계의 온도 T_1 은 350°C 로 고정되어 있다. 이 평판의 재료상수는 Table 1과 같다.

이 모델은 x, y 축에 대해 하중과 형상이 대칭이므로 평판의 1/4만을 수치해석 모델로 한다. 이 부분을 8개의 절점(node)을 가진 2차원 등매개요소로 분할하며 총요소의 갯수는 284개이고, 총절점의 갯수는 921개 이다(Fig. 4). 기준온도 T 는 20°C 로 한다.

Fig. 5에서 E 는 Young 계수이다. Fig. 5와 Table 2는 관성항을 고려한 J_I 적분값과 관성항을

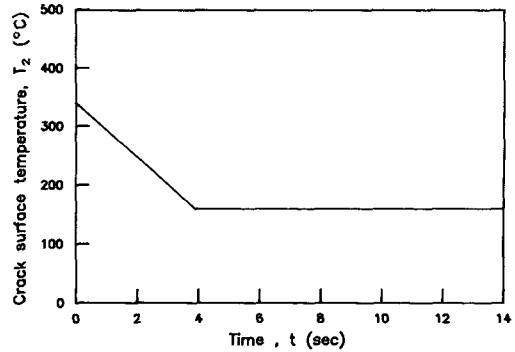


Fig. 3 Variation of crack surface temperature T_2

Table 1 Mechanical properties of through line center crack model

Specific heat per unit mass	$C=504.4\text{J/kg}^\circ\text{C}$
Thermal conductivity	$K=20.424\text{W/m}^\circ\text{C}$
Thermal expansion coefficient	$\alpha=1.0\times 10^{-6}/^\circ\text{C}$
Young's modulus	$E=140\text{GPa}$
Density	$\rho=8027\text{kg/m}^3$
Poisson's ratio	$\nu=0.3$
Initial yield stress	$\sigma_{ys}=145\text{MPa}$

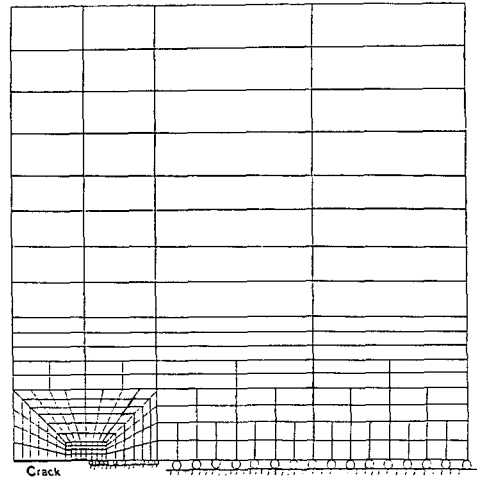


Fig. 4 Finite element mesh for J_I integral calculation

Table 2 Variation of dimensionless J_I integral values with and without inertia term

Time t(sec)	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0			
σ_t/σ_{ys}	0.50	0.50	0.50	0.50	0.00	0.20	0.40	0.60
Ref.(12) (a)	0.12	0.21	0.32	0.46	0.20	0.30	0.49	0.75
J_I value without inertia term (B)	0.12	0.20	0.32	0.46	0.20	0.30	0.49	0.74
J_I value with inertia term (C)	0.12	0.21	0.33	0.46	0.21	0.31	0.50	0.75
Error (%) = $\{(B-A)/A\}\times 100$	0.00	-4.76	0.00	-2.17	0.00	0.00	0.00	-1.33
Error (%) = $\{(C-A)/A\}\times 100$	0.00	0.00	3.12	0.00	5.00	3.33	2.04	0.00
Error (%) = $\{(B-C)/C\}\times 100$	0.00	-4.76	-3.03	-2.17	-4.76	-3.22	-2.00	-1.33

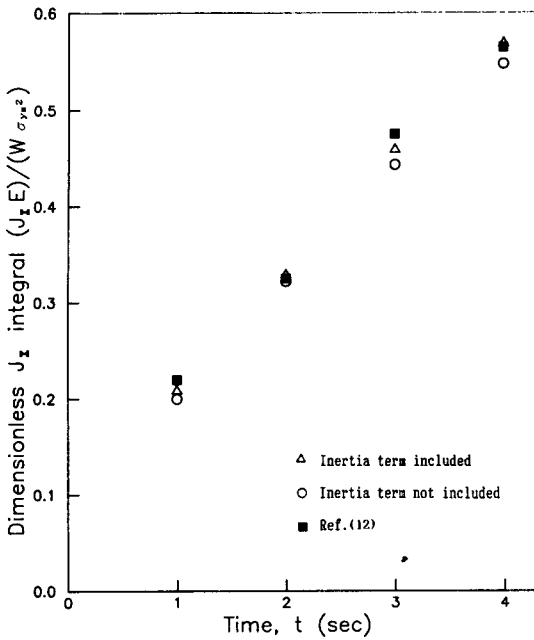


Fig. 5 Variation of dimensionless J_I integral values $(J_I E) / (W \sigma_{ys}^2)$ with time t

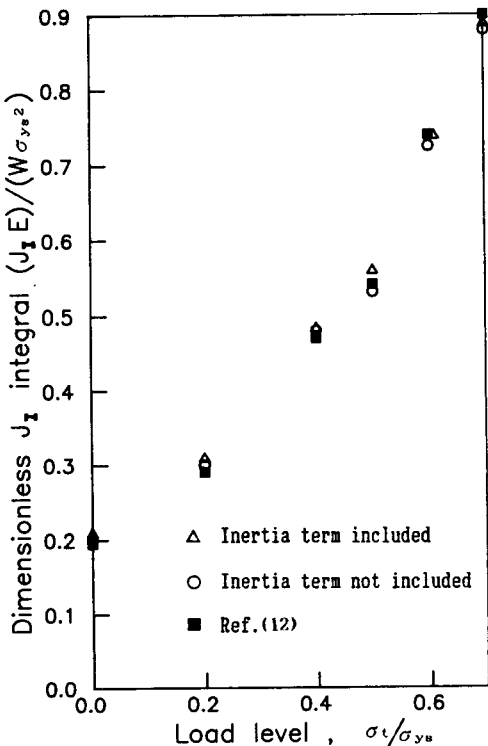


Fig. 6 Variation of dimensionless J_I integral values $(J_I E) / (W \sigma_{ys}^2)$ with load level σ_t / σ_{ys}

고려하지 않은 J_I 적분값을 Hsu 등⁽¹²⁾의 관성항을 고려하지 않은 J_I 적분값과 비교하고 있다.

관성항을 제외하고 계산한 J_I 적분값은 Hsu 등⁽¹²⁾의 J_I 적분값과 비교한 결과 최대 오차가 -4.76%이다. 관성항을 포함한 경우에 최대 오차는 3.12%이다. 관성항을 포함한 경우와 포함하지 않은 경우에 J_I 적분값을 비교한 결과, 최대 오차는 -4.76%이다.

Fig.6은 $t=4$ 초 일때 σ_t / σ_{ys} 의 비율을 0에서 0.6까지 변환시켜 무차원 J_I 적분값을 Hsu 등⁽¹²⁾의 결과와 비교한 것이다.

Table 2에서 보는 바와같이 관성항을 제외하고 J_I 적분값을 계산한 결과는, Hsu 등⁽¹²⁾의 J_I 적분값과의 최대 오차는 -1.33%이고, 관성항을 포함한 경우 Hsu 등의 J_I 적분값과의 최대 오차가 5.00%이다. 관성항을 고려한 적분값과 고려하지 않은 J_I 적분값의 최대 오차는 -4.76%이다. 이러한 결과로 보아서 재료가 강판인 경우에 관성항은 J_I 적분값의 큰 영향을 미치지 못함을 알 수 있다.

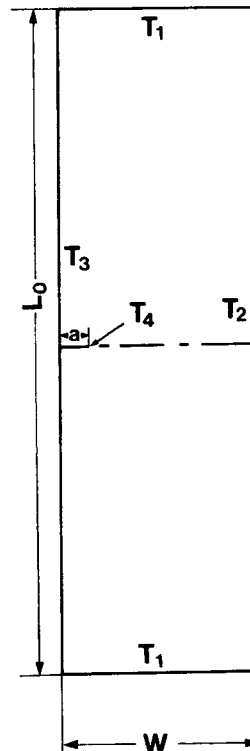


Fig. 7 Edge cracked-plate under thermal shock loading ($L_0=250$ mm, $W=75$ mm)

3.2 열충격하에 있는 유리 평판의 J_I 적분 값

수치해석 모델은 Fig. 7과 같은 가장자리 균열을 가진 평판이다. 평판의 기하학적 형상과 온도분포의 균열평면에 대한 대칭을 고려하여, Fig. 8에서 보는 바와 같이 균열의 연장선을 중심으로 평판의 절반 윗부분만을 요소 분할하였다. 사용된 요소의 갯수는 284개이고, 절점의 수는 921개이다.

열경계조건은 Fig. 8과 같이 평판의 가장자리 온도로 주어지며 균열면에서의 온도는 가장자리 온도 T_3 에서 균열선단온도 T_4 까지 선형으로 변화시켰다. 평판재료는 유리(soda lime silicate glass)이며 재료상수는 Table 3에서 보는 바와 같다.

Table 4는 균열길이 a_0 가 1mm와 4mm인 시편에 $\Theta=140^\circ\text{C}$ 와 110°C 로 열충격을 가했을 때 시간경과에 따른 J_I 적분값의 변화를 나타낸 것이다. 여기서 H 는 T_3 를 순간적으로 0°C 로 급강하할때 온도차를 의미한다. 관성항을 고려하여 계산한 J_I 적분값의 시간에 대한 증가율이 관성항을 고려하지 않

은 경우보다 크고 오차는 관성항을 고려한 경우를 기준으로 했을때 최대 -12.0% 이므로 관성항의 영향이 크다. 재료가 유리인 경우에는 관성항을 무시할 수 없으므로 이후 J_I 적분계산에서는 관성항의 영향을 고려하여 J_I 적분을 계산한다. Θ 가 140°C 와 110°C 일때 a_0 를 변화시켜가면서 시간에 따른 J_I 적분값의 변화를 계산할 결과를 Fig. 9에서 보여주고 있다. a_0 가 증가할수록 J_I 적분값의 시간에 대한 증가율이 커짐을 알수있다.

가장자리 온도차 Θ 의 변화가 시간에 대해 J_I 적분값의 증가율에 미치는 영향을 보기위하여 균열길이 a_0 가 1mm와 4mm일때 J_I 적분값을 계산한 결과를 Fig.10에서 보여주고있다. 가장자리 온도차 Θ 와 균열길이 a_0 가 증가할수록 J_I 적분값의 시간에 대한 증가율이 커진다.

재료물성치의 변화가 J_I 적분값의 증가율에 미치는 영향을 Fig. 11~13에서 볼 수 있다.

Fig. 11은 단위 부피당 비열 ρC 가 증가하면 J_I 적분값의 증가율이 커지는 것을 보여준다. $t=0.02$ 초와 $t=0.07$ 초일때, J_I 적분값과 단위부피당 비열 ρC 의 관계를 보면, $t=0.02$ 초일때에는 단위부피당 비열 ρC 증가에 따른 J_I 적분값의 증가율이 작

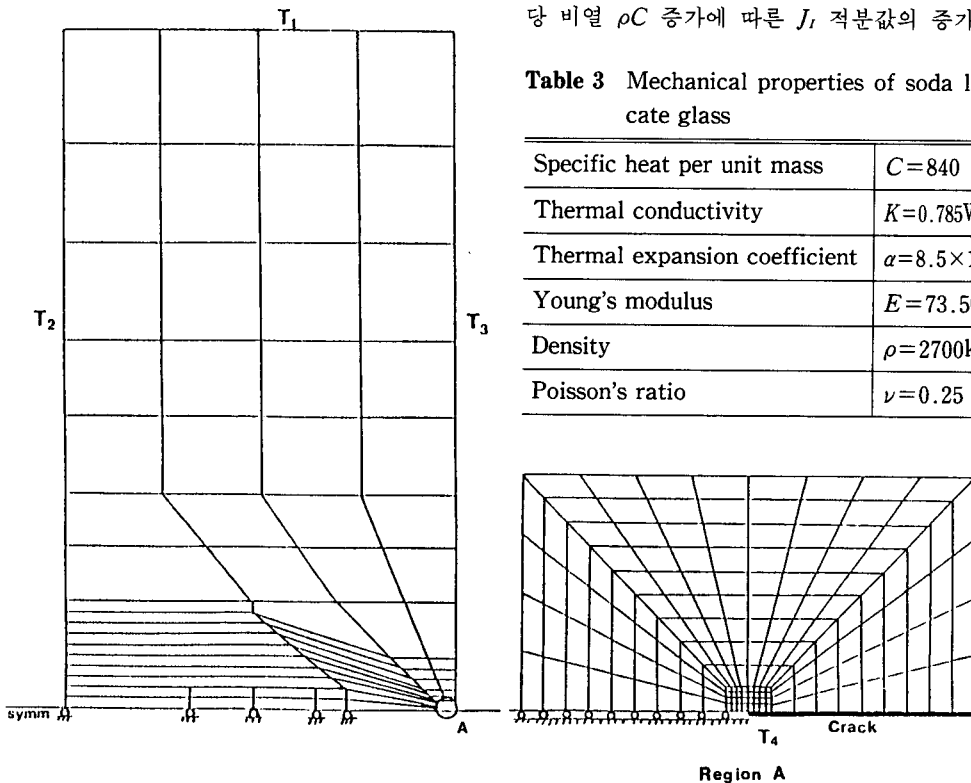


Fig. 8 Finite element mesh of a half of edge cracked-plate ($T_1 = T_3 + 10^\circ\text{C}$, $T_2 = T_3 + 50^\circ\text{C}$, $T_4 = T_3 + 5^\circ\text{C}$)

Table 3 Mechanical properties of soda lime silicate glass

Specific heat per unit mass	$C = 840 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$
Thermal conductivity	$K = 0.785 \text{ W/m}^\circ\text{C}$
Thermal expansion coefficient	$\alpha = 8.5 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$
Young's modulus	$E = 73.5 \text{ Gpa}$
Density	$\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$
Poisson's ratio	$\nu = 0.25$

지만, $t=0.07$ 초일때에는 J_I 적분값의 증가율이 커진다.

Fig. 12에서는 열전달계수 K 가 증가해도 시간에 대한 J_I 적분값의 증가율이 미소하게 증가하는 것을 알 수 있다. Fig. 13은 열확산계수 K 가 증가하면 시간에 대한 J_I 적분값의 증가율이 커지는 것을 보여주며 $t=0.02$ 초일때와 $t=0.07$ 초일때 J_I 적

분값과 열확산계수 K 의 관계는 $t=0.07$ 초일때가 $t=0.02$ 초일때보다 J_I 적분값이 열확산계수 K 의 증가에 더욱 민감한 증가율을 보이고 있다.

Fig. 14는 Young계수 E 가 증가하면 J_I 적분값의 증가율이 급격히 커지는 것을 보여주고 있다.

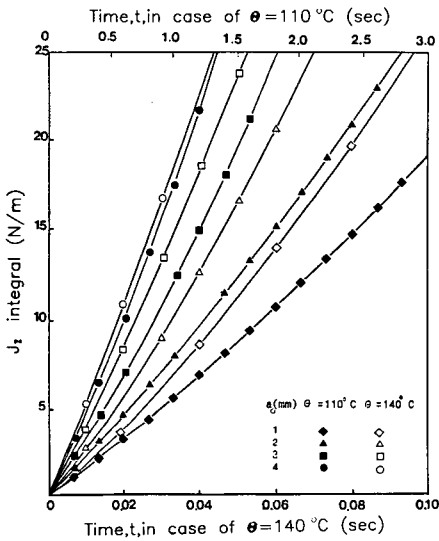


Fig. 9 Variation of J_I integral values with time t and edge crack length a_0 ($\theta=140^\circ\text{C}$, 110°C)

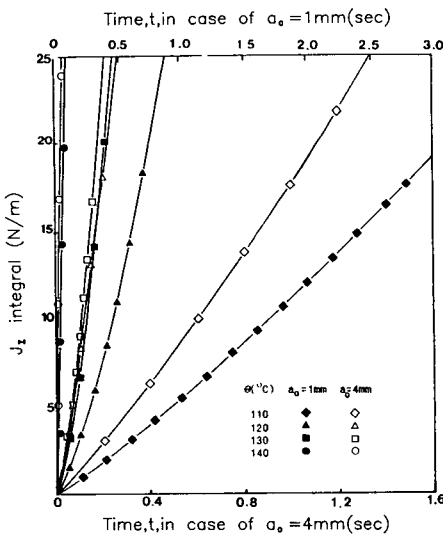


Fig. 10 Variation of J_I integral values with time t and edge temperature difference θ ($a_0=1\text{mm}$, 4mm)

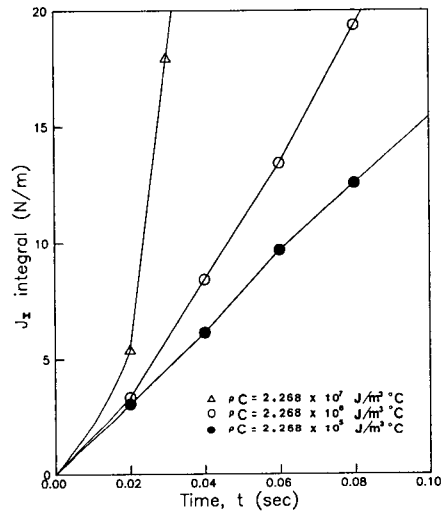


Fig. 11 Variation of J_I integral values with specific heat per unit volume ρC and time t ($a_0=1\text{mm}$, $\theta=140^\circ\text{C}$)

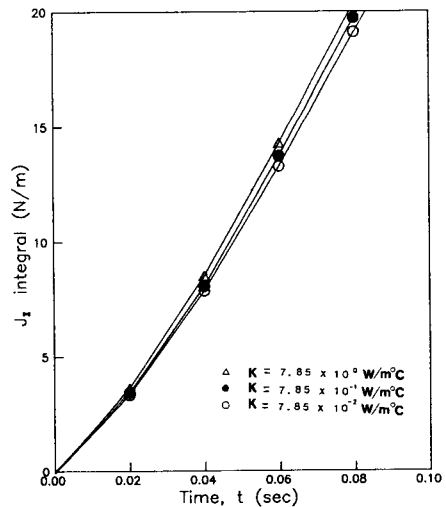


Fig. 12 Variation of J_I integral values with thermal conductivity K and time t ($a_0=1\text{mm}$, $\theta=140^\circ\text{C}$)

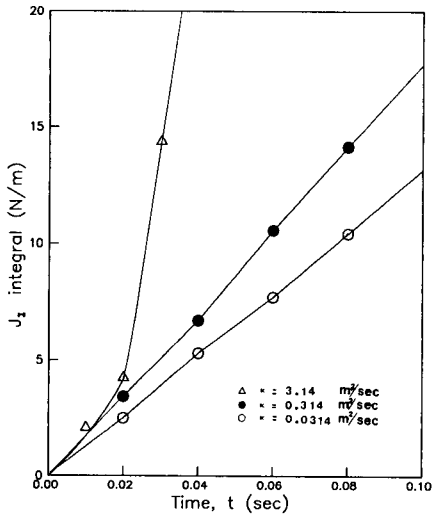


Fig. 13 Variation of J_I integral values with thermal diffusivity K and time t ($a_0=1\text{mm}$, $\theta=140^\circ\text{C}$)

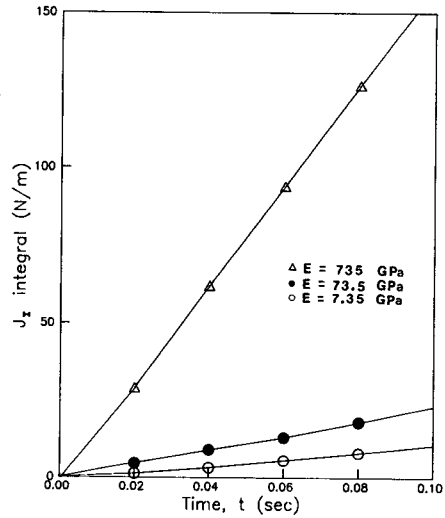


Fig. 14 Variation of J_I integral values with Young's modulus E and time t ($a_0=1\text{mm}$, $\theta=140^\circ\text{C}$)

4. 결 론

천이온도하에 있는 재료에 존재하는 균열의 거동을 연구하기 위하여 경로 독립적분인 J 적분을 유도하고 유한요소법으로 수치계산한 결과 다음의 결론을 얻었다.

- (1) 합성적분 방법에 의해 유도된 J 적분은 선적분 형태로 표현된다.
- (2) 유한요소법에 의해 계산한 J 적분값은 기존 결과와 잘 일치한다.
- (3) 모드 I 열충격을 받는 강판인 경우에는 J 적분값에 대한 판성향의 영향을 무시할 수 있으나 유리판인 경우에는 무시할 수 없다.
- (4) 가장자리 균열을 가진 유리판이 모드 I 열충격을 받을때 재료상수인 비열, 열전달계수, 열확산계수, 탄성계수 등과 균열축 가장자리온도차 및 균열 길이가 증가하면 J 적분값의 시간에 따른 증가율이 커진다.

참고문헌

(1) Emery, A.F., Walker, G.E. Jr. and Williams, J. A., 1969, "A Green's function for the Stress Intensity Factors of Edge Cracks and its Application to the Thermal Stresses," Trans. ASME, J. Basic

Eng., Vol.91, pp.618~624.

- (2) Emery, A.F. and Kobayashi, A.S., 1979, "Transient Stress Intensity Factors for Edge and Corner Cracks in Quench-test Specimens," J. Am. Ceram. Soc., Vol.63, pp.410~415.
- (3) Blauel, J.G., Khaltoff, J.F. and Sthan, D., 1974, "Model Experiments for Thermal Shock Behavior," Trans. ASME, J. Eng. Mat. Tech., Vol.96, pp. 299~308.
- (4) Grebner, H. and Strathmeier, U., 1985, "Stress Intensity Factors for Longitudinal Semi-Elliptical Surface Cracks in a Pipe Under Thermal Loading," Eng. Fracture Mech., Vol.21, pp.383~389.
- (5) Nied, H.F., 1983, "Thermal Shock Fracture in an Edge-Cracked Plate," J. Thermal Stress, Vol. 6, pp. 217~229.
- (6) Nied, H.F., 1987, "Thermal Shock in an Edge-Cracked Plate Subjected to Uniform Surface Heating," Eng. Fracture Mech., Vol.25, pp.239~246.
- (7) 이강용, 심관보, 1990, "열충격 응력세기계수와 파괴실험", 대한기계학회논문집, 제14권, 제1호, pp.130~137.
- (8) Ishida, R., 1986, "On a Crack Problem in an Infinite Circular Cylinder with a Penny-Shaped Crack Under a Transient Thermal Loading," Int.

Table 4 Comparison of J_I integral value with and without inertia term

unit : N/m

Temperature difference θ (°C)	Crack length a_0 (mm)	Tiem t (sec)	J_I values Inertia term included (A)	J_I values Inertia term not included (B)	Error* (%)
110	1	0.5	2.72	2.65	-2.51
		1.0	5.65	5.50	-2.60
		1.5	8.75	8.43	-3.57
		2.0	12.08	11.56	-4.30
		2.5	15.55	14.85	-4.50
	4	0.2	3.13	3.05	-2.51
		0.4	6.35	6.15	-3.14
		0.6	10.00	9.57	-4.30
		0.8	13.75	13.05	-5.03
		1.0	17.50	16.45	-5.99
140	1	0.02	3.12	3.01	-3.37
		0.04	8.54	8.16	-4.37
		0.06	13.91	13.19	-5.11
		0.08	19.42	18.13	-6.61
		0.10	25.07	23.12	-7.77
	4	0.01	5.21	4.78	-8.09
		0.02	10.83	9.80	-9.48
		0.03	16.67	15.01	-10.01
		0.04	23.75	21.06	-11.29
		0.05	29.12	25.61	-12.06

* Error (%) = $\{(B-A)/A\} \times 100$

J.Fracture, Vol.32, pp.35~45.

(9) Kokini, K., 1986, "On the Use of the Finite Element Method for Solution of a Cracked Strip Under Thermal Shock," Eng.Fracture Mech., Vol. 24, pp.843~850.

(10) Kokini, K., 1986, "Thermal Shock of a Cracked Strip: Effect of Temperature-Dependent Material Properties," Eng.Fracture Mech., Vol.25, pp.167~176.

(11) Jung, J. and Kanninen, M.F., 1983, "On Analysis of Dynamic Crack Propagation and Arrest in

a Nuclear Pressure Vessel Under Thermal Shock Condition," Trans.ASME, J.Pres.Ves. Tech., Vol.105, pp.111~116.

(12) Hsu, T.R., Chen, G.C., Gong, Z.L. and Sun, N.S., 1986, "On Thermo-Fracture Behavior of Leaking Thin-Wall Pipes," Int.J.Pres.Ves.Piping, Vol.24, pp.269~281.

(13) Nilson, F., 1973, "A Path Independent Integral for Transient Crack Problems," Int.J.Solid Struc., Vol.9, pp.1107~1115.

(14) Gurtin, M.E., 1976, "On a Path-Independent

- Integral for Elastodynamics," *Int.J.Fracture*, Vol.12, pp. 643~644.
- 15) Hasselman, D.P.H., 1963, "Elastic Energy at Fracture and Surface Energy as Design Criteria for Thermal Shock," *J.Am.Ceram.Soc.*, Vol.46, pp.535~540.
- 6) Davis, M.W., Popelar, C.H. and Advani, S.H., 1988, "Thermally Induced Fast Fracture in a Glass Double Cantilver Beam Specimen," *J.Am. Ceram.Soc.*, Vol.71, pp.64~69.
- 7) Aoki, S., Kishimoto, K. and Sakata, M., 1984, "Energy Flux into Process Region in Elastic-plastic Fracture Problems," *Eng. Fracture Mech.*, Vol.19, No.5, pp.827~836.
- (18) Atkinson, C. and Eshelby, J.D., 1968, "The Flow of Energy into the Tip of Moving Crack," *Int.J.Fracture*, Vol.4, pp.3~8.
- (19) Biot, M.A., 1956, "Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics," *J.Appl.phys.*, Vol. 27, pp.240~253.
- (20) Sneddon, I.N., 1974, *The Linear Thermoelasticity*. Spriner-verlag, Wien.
- (21) Rafalsky, P., 1968, "A Variational Principle for the Coupled Thermoelasticity," *Int.J.Eng. Sci.*, Vol.6, pp.465~471.