大韓機械學會論文集 第15卷 第6號, pp. 1861~1871, 1991.

〈論 文〉

내부에 유체가 흐르는 파이프계의 동적안정성 및 응답해석

이우식* · 박철희* · 홍성철**

(1991년 4월 23일 접수)

Dynamic Stability and Response Analysis of Piping System with Internal Flow

Usik Lee, Chol-Hui Pak and Sung-Chul Hong

Key Words: Flow-induced Vibration(유체 유발 진동), Piping system(파이프 계), Dynamic Instability(동적 불안정성), Unsteady Flow(비정상 유동), Steady Oscillatory Flow(정상 진동 유동) Transient Flow(과도 유동)

Abstract

In this study, the piping system conveying unsteady flow is considered. The effects of coupling between the pipe motion and the velocity and pressure of fluid are included for the dynamic stability and response analysis of the piping system. The dynamic equations for a piping system are derived by Newtonian dynamics. For the momentum and continuity equations, the concept of moving control volume is applied. Thus, the governing equations derived herein are valid for the applications to the vibration problems occured when a piping system starts up or shuts down and also when the valves and pumps operate. For a simply supported straight pipe, the stability analysis is conducted for various nondimensional parameters. The dynamic responses, in both stable and unstable region of stability chart, are numerically tested by the use of central difference method.

1. 서 론

유체가 흐르고 있는 파이프계의 진동 및 안정성에 관한 연구는 Ashley와 Haviland[1] 그리고 Housner[2]에 의한 Trans-Arabian 원유수송 파이프라인의 진동연구에서 시작되었다. 그후 항공 및 원자력등 여러분야에서의 중요성 때문에 지난 40여년 동안 계속 연구되어지고 있다.

초기의 연구들은 유속이 일정하다는 가정하에서 유속이 미치는 파이프의 안정성 및 진동에 대하여 연구되었다. Chen[3]은 유속이 정상진동유동(steady oscillatory flow)이 흐르는 단순지지 파이프의 안정성을 고찰하여 파라메트릭 불안정(parametric instability)이 존재함을 밝혔고 Paidoussis와 Issid[4]도 같은 유동조건하에서 수직으로 매달린 끝단지지 파이프(cantilevered pipe)의 안정성에 관하여 이론적, 실험적으로 조사하였다. 굴곡된 파이프에 대하여는 유한요소법을 이용하여 Pak등[5]이 파이프계의 안정성을 해석하였고 섭동법(perturbation method)으로 진동응답을 얻었다. 그러나 이러한 연구들은 유체의 흐름을 단순히 정상진동유동으로 가정하였고 유속의 변화에 따른 유압의 변동을 고려하지 못하였다. 유속과 유압의 변동을 고려한 연구는 Pak등[6]이 유속 및 유압의 변동과 함께 파이프의 운동을 고찰할 수 있는 운동방정식을 유

*정회원, 인하대학교 공과대학 기계공학과
**정회원, 인하대학교 대학원

도하여 안정성 해석을 수행함으로써 유압의 변동이 파이프의 안정성에 미치는 영향이 큼을 밝혔다. 이 연구에서는 유체가 파이프의 운동에 미치는 영향을 고려하였으나 파이프의 운동이 유체에 미치는 영향은 고려하지 않고 있다.

본 연구에서는 아직까지 연구가 미진한 내용 즉, 유속과 압력이 시간과 위치의 함수인 유동특성과 파이프의 운동이 상호 연계되어 영향을 주는 일반적인 경우의 운동방정식을 유도하였고 단순지지된 직선 파이프를 모델로 설정하여 동적 안정성(dynamic stability)과 진동응답을 수치적으로 고찰하였다.

2. 운동방정식

임의의 평면상에 놓인 파이프계의 운동방정식을 구하기 위하여 먼저 Fig. 1의 점선 형태로 공간상에 α의 기울기로 놓여있는 파이프가 운동을 하여 실선의 위치에 있을때 A 부분의 상세도는 Fig. 2와 같고 미소 요소에 작용하는 힘과 유속 및 압력은 Fig. 3, 4와 같다.

파이프의 운동방정식을 구하기 위해, Fig. 3에서 도시한 파이프 요소에 대한 자유물체도에 Newton의 운동법칙을 적용하면 다음과 같은 평형방정식이 유도된다.

$$T'-Q'w'-Qw''+Nw'+\gamma S-m_pg_x=m_p\ddot{u} \quad (1)$$

$$Q'+T'w'+Tw''-N+\gamma Sw'-m_pg_z=m_p\ddot{w} \quad (2)$$

여기서 T는 인장력, Q는 전단력, N은 유체와 파이프의 상호작용 수직력, γ는 유체와 파이프벽면에서의 전단응력, S는 원주길이, w는 파이프의 횡방향변위, u는 파이프의 종방향 변위이고 m_p은 파이프의 단위 길이당 질량이고, g_x와 g_z는 x와 z 방향 중력가속도 이다. 또한 $\dot{(\ )}=\partial/\partial t$와 $(')=\partial/\partial x$은 각각 시간 t와 위치 x의 편미분 값을 나타낸다.

유체의 운동량방정식(momentum equation)과 연속방정식(continuity equation)을 유도하기 위하여 유체역학적 검사 체적(control volume)의 개념을 이용하고자 한다. 여기서 설정된 검사 체적은 Fig. 4와 같이 파이프에 고정되어 파이프 변형에 따라 변형하면서 움직일수 있는 이동검사체적(moving control volume)이다. 정의된 검사체적에 대한 운동량방정식과 연속방정식은 파이프내의 속도분포가 균일하다고 가정하면, 각각 식(3)과 식(4)로 표현된다[7,8].

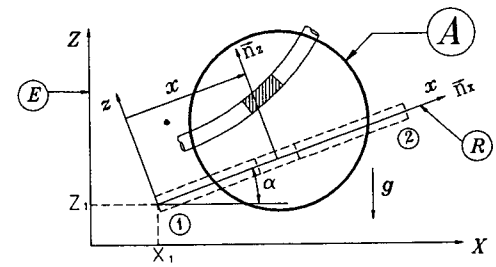

Fig. 1 Diagram of a pipe

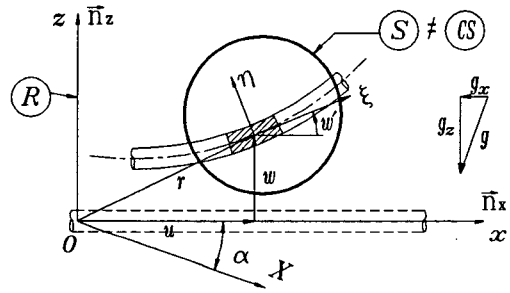

Fig. 2 Details of Ⓐ in Fig. 1

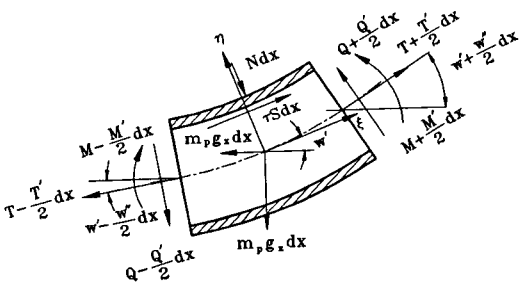

Fig. 3 Free body diagram of a pipe element

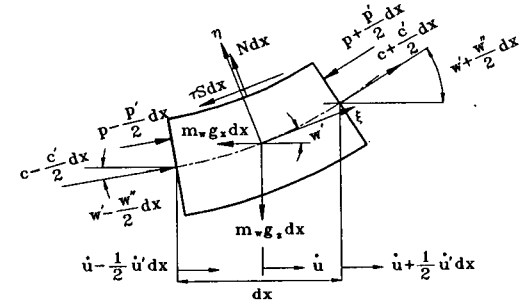

Fig. 4 Moving control volume of fluid

$$\sum \vec{F} - \int_{CV} [{}^R\vec{a}_c^s + {}^R\vec{\omega}^s \times {}^s\vec{V}_c^f] \rho_w dv = {}^s\vec{a}_c^f M_{cv} + \dot{m}_{in}({}^s\vec{V}_c^f - {}^s\vec{V}_{in}^f) + \dot{m}_{out}({}^s\vec{V}_{out}^f - {}^s\vec{V}_c^f) \quad (3)$$

$$\frac{dM_{cv}}{dt} + \dot{m}_{out} - \dot{m}_{in} = 0 \quad (4)$$

여기서 M는 검사체적 내의 평균 유체질량이고 $\dot{m}$는 단위시간당 질량유량(mass flow rate)이며, 식 (3)과 (4)에 나타나는 항들은 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} {}^s\vec{V}_c^f &= c\vec{n}_x + cw'\vec{n}_z \\ {}^R\vec{\omega}^S &= -\dot{w}'\vec{n}_y \\ {}^R\vec{V}_c^S &= \dot{u}\vec{n}_x + \dot{w}\vec{n}_z \\ {}^s\dot{\vec{V}}_c^f &= \dot{c}\vec{n}_x + \dot{c}w'\vec{n}_z \\ M_{cv} &= m_w dx \\ \dot{m}_{in} &= (\rho_w {}^{cs}\vec{V}^f \cdot \vec{A})_{in} \\ \dot{m}_{out} &= (\rho_w {}^{cs}\vec{V}^f \cdot \vec{A})_{out} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, 첨자 ®과 Ⓢ는 각각 기준좌표(reference coordinate)와 검사체적 중심Ⓒ에 위치한 이동좌표(moving coordinate)를 나타내며 ⓕ 는 유체를 나타낸다. 상첨자의 의미는 좌상첨자 좌표계에 대한 우상첨자의 속도 또는 가속도를 나타낸다. 하첨자는 그 위치를 나다낸다. 예로서 ${}^R\vec{V}_c^f$는 검사체적의 중심 c를 통과하는 유체의 기준좌표에 대한 속도를 의미한다. 또한 ρ_w는 유체의 밀도이고 ${}^{cs}\vec{V}^f$는 검사표면(control surface)에 대한 유체의 속도이다. 식 (5)를 이용하여 식(3)의 운동량방정식을 정리하면, 다음과 같은 두 방정식을 얻을 수 있다.

$$(pA)' + Nw' + \gamma S + m_w(g_x + \ddot{u} + \dot{c} + cc' + c\dot{u}') = 0 \quad (6)$$

$$(pAw')' - N + \gamma S w' + m_w(g_z + \ddot{w} + \dot{c}w' + 2c\dot{w}' + 2c\dot{w}' + cc'w' + c^2w'') = 0 \quad (7)$$

여기서, m_w는 유체의 단위 길이당 질량이다.

또한, 파이프의 길이방향 속도 $\dot{u}$가 유속에 비하여 작으므로 이를 무시하고 식 (5)을 식 (4)에 대입 정리하면, 다음과 같은 유체의 연속방정식의 유도된다.

$$\frac{\mathring{\rho}_w}{\rho_w} + \frac{\mathring{A}}{A} + c' = 0 \quad (8)$$

여기서, ρ_w는 유체의 밀도이고 $(\mathring{\ }) = \partial/\partial t + c\partial/\partial x$인 연산자(substantial derivative)이다.

앞에서 유도된 방정식 식(1), (2), (6), (7), (8)에 탄성계수(Young's modulus) E와 파이프의 단면 2차 모멘트 I_p로 표현되는 파이프의 전단력과 변위의 관계식.

$$Q = -EI_p w'''$$

파이프의 인장력과 변위의 관계식,

$$T = EA_p u'$$

유체의 체적탄성계수 E_v로 표현되는 밀도와 압력의 고나계식,

$$\frac{\mathring{\rho}_w}{\rho_w} = \frac{\mathring{p}}{E_v}$$

그리고 파이프의 내경 D, 두께 t_k 그리고 프와송비 ν로 표현되는 단면 변화식

$$\frac{\mathring{A}}{A} = \frac{D}{Et}\left(\mathring{p} - \frac{\nu}{2A}\mathring{T}\right)$$

을 대입하여 정리하면 앞에서 유도한 식들을 4개의 미지수 즉, 횡방향 변위 w, 종방향 변위 u, 위치와 시간의 함수인 압력 p와 유속 c로 표현되는 다음과 같은 4개의 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$EA_p u'' - (m_p + m_w)\ddot{u} - (pA)' - m_w(\dot{c} + cc') = (m_p + m_w)g_x \quad (9)$$

$$EI_p w'''' + ((pA - T)w')' + m_w(\dot{c}w' + cc'w') + 2m_w c\dot{w}' + m_w c^2 w'' + (m_p + m_w)\ddot{w} = -(m_p + m_w)g_z \quad (10)$$

$$(pA)' + m_w(g_z w' + g_x) + m_w(\dot{c} + cc') + \frac{f}{2D}m_w|c|c = 0 \quad (11)$$

$$(\dot{p}A) + m_w a^2 c' = 0 \quad (12)$$

여기서 a는 유체의 파동속도(wave speed)로서 다음과 같이 주어진다.

$$a^2 = \frac{E_v/\rho_w}{1 + E_v D/Et_k}$$

식(9)~(12)는 유체가 비정상 유동(unsteady flow)인 경우에 대해 파이프와 유체의 동적현상을 나타내는 지배방정식으로, 유동과 파이프의 운동이 상호 연계된 보다 일반화된 식이라 할 수 있다. 또한 파이프계의 시동 또는 정지(shut-down)시의 과도유동(transient flow)에 의한 파이프의 동적거동 및 밸브, 펌프등의 작동으로 발생한 유동변화가 미치는 파이프의 동적거동에 대한 운동방정식이라 할 수 있다. 유도된 식들중 각항의 물리적 의미를 살

펴보면, 식(9)의 둘째항과 식(10)의 여섯째항은 질량항이고, 식(9)와 식(10)의 첫째항은 강성항이며, 이들 항은 유체의 흐름특성과 무관한 항들이다. 또, 식(9)의 넷째, 식(10)과 식(11)의 셋째, 식(12)의 둘째항은 비정상 유동으로 인해 발생된 항들이고, 식(10)의 넷째, 다섯째항은 각각 코리올리힘(Coriolis force), 원심력항, 식(11)의 넷째항은 항력(drag force)항이며, 식(9)와 식(10)의 우변과 식(11)의 둘째항은 중력항이다. 그리고 나머지 항들은 압력과 장력에 의한 항들이다.

3. 안정성 및 동특성해석

앞에서 유도된 방정식을 해석하고, 비교 검토하기 위하여 Fig. 5와 같은 파이프 모델을 설정한다. 파이프의 경계조건은 단순지지이고, 파이프 끝 부분에서 유속은 $c=c_o(1+\varepsilon\cos\omega t)$로 조절한다. 여기서, c_o는 평균 유속이고 ε는 가진 파라메터(excitation parameter)이다. 실제로 유속 c는 유체의 파동속도 a에 비해 매우 작다고 볼 수 있으므로 식 (12)로 부터 $c'=0$ 즉, 위치의 함수가 아니라 시간만의 함수가 되며, 파이프의 횡방향 운동만을 가정하여 무차원 변수를 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{w}=\frac{w}{l},\quad \xi=\frac{x}{l},\quad \bar{D}=\frac{D}{l}$$

$$\bar{c}=\left(\frac{m_w}{EI_p}\right)^{1/2} lc$$

$$\Omega=\left(\frac{m_w+m_p}{EI_p}\right)^{1/2} l^2\omega,\quad \tau=\left(\frac{EI_p}{m_p+m_w}\right)^{1/2}\frac{t}{l^2}$$

$$\beta=\frac{m_w}{m_w+m_p}=\frac{m_w}{M}$$

$$\bar{p}=\frac{l^2}{EI_p}pA,\quad \bar{g}=\frac{m_w l^3}{EI_p}g$$

위와 같은 무차원 값들을 도입하여 식(10)과 식(11) 그리고 식(12)를 다시 정리하면 다음과 같다.

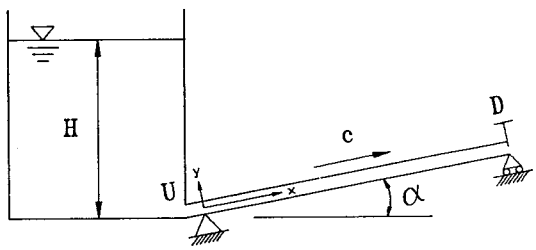

Fig. 5 A model of inclined straight pipe

$$\frac{\partial^4\bar{w}}{\partial\xi^4}+\bar{c}^2\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi^2}+\beta^{1/2}\frac{\partial\bar{c}}{\partial\tau}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}+2\beta^{1/2}\bar{c}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\xi\partial\tau}+\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial\tau^2}+\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\bar{p}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}\right]=-\frac{1}{\beta}\bar{g}\cos\alpha \tag{13}$$

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial\xi}+\bar{g}(\cos\alpha\frac{\partial\bar{w}}{\partial\xi}+\sin\alpha)+\beta^{1/2}\frac{\partial\bar{c}}{\partial\tau}+\frac{f}{2\bar{D}}\bar{c}^2=0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial\bar{c}}{\partial\xi}=0 \tag{15}$$

식(15)을 적분하면 유속은 시간만의 함수이고 파이프 끝에 있는 밸브의 조절 유속과 같으며 그 표현은 아래와 같다.

$$\bar{c}(\tau)=\bar{c}_o(1+\varepsilon\cos\Omega\tau) \tag{16}$$

식(14)을 적분하면, $\bar{p}$는 다음과 같이 된다.

$$\bar{p}=-\bar{g}(\cos\alpha\bar{w}+\sin\alpha\,\xi)-\beta^{1/2}\frac{\partial\bar{c}}{\partial\tau}\xi-\frac{f}{2\bar{D}}\bar{c}^2\xi+p_u(\tau) \tag{17}$$

여기서 $p_u(\tau)$는 유압의 경계조건으로, Fig. 5의 모델에서 저수조(reservior)의 수두 높이는 일정하게 유지되므로 $p_u(\tau)$는 일정한 값을 갖는다. 또한, 변위 $\bar{w}$를 정적변위 $\bar{w}_o$와 동적변위 $\bar{w}_d$로 나누면,

$$\bar{w}(\xi,\tau)=\bar{w}_o(\xi)+\bar{w}_d(\xi,\tau) \tag{18}$$

이 되고 식(16), 식(17) 그리고 식(18)을 식(13)에 대입하면 아래와 같이 정적 평형방정식(19)와 동적 평형방정식(20)을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial^4\bar{w}_o}{\partial\xi^4}+\left[\bar{c}_o^2(1-\frac{f}{2\bar{D}}\xi)+p_{uo}-\bar{g}(\sin\alpha\,\xi)\right]\frac{\partial^2\bar{w}_o}{\partial\xi^2}-(\bar{g}\sin\alpha+\frac{f}{2\bar{D}}\bar{c}_o^2)\frac{\partial\bar{w}_o}{\partial\xi}=-\frac{1}{\beta}\bar{g}\cos\alpha \tag{19}$$

$$\frac{\partial^4\bar{w}_d}{\partial\xi^4}+\left[\bar{c}^2(1-\frac{f}{2\bar{D}}\xi)+p_u(\tau)-\bar{g}(\cos\alpha\bar{w}_o+\sin\alpha\xi)-\beta^{1/2}\frac{\partial\bar{c}}{\partial\tau}\xi\right]\frac{\partial^2\bar{w}_d}{\partial\xi^2}-(\bar{g}\cos\alpha\frac{\partial\bar{w}_o}{\partial\xi}+\bar{g}\sin\alpha+\frac{f}{2\bar{D}}\bar{c}^2)\frac{\partial\bar{w}_d}{\partial\xi}+2\beta^{1/2}\bar{c}\frac{\partial^2\bar{w}_d}{\partial\xi\partial\tau}+\frac{\partial^2\bar{w}_d}{\partial\tau^2}=0 \tag{20}$$

식(19)와 식(20)의 근사해를 단순지지보의 정규모드를 중첩하여 아래와 같이 가정한다.

$$\bar{w}_o=\sum_{n=1}^{\infty}q_{on}W_{on}(\xi),\quad W_{on}(\xi)=\sin(n\pi\xi)$$
$$(n=1,2,3)\cdots \quad (21)$$
$$\bar{w}_d=\sum_{n=1}^{\infty}q_n(\tau)\,W_{dn}(\xi),\quad W_{dn}(\xi)=\sin(n\pi\xi)$$

여기서, $W_{on}(\xi)$, $W_{dn}(\xi)$는 단순지지보의 정규모드이고, q_{on}, $q_n(\tau)$는 결정해야 될 값이다. 식(21)을 식(19)와 식(20)에 대입하고 Galerkin 방법에 의해 W_{om}, $W_{dm}(m=1,2,3,\cdots)$을 각각 곱하여, $0\le\xi\le1$의 구간에 대해 적분하면 행렬식으로된 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$$\Big[[K_1]+(\bar{c}_o{}^2+p_{uo})[K_2]-(\frac{f}{2\bar{D}}\bar{c}_o{}^2+\bar{g}\cos\alpha)[K_3]-(\frac{f}{2\bar{D}}\bar{c}_o{}^2+\bar{g}\cos\alpha)[K_4]\Big]\{q_o\}=\{f_o\} \quad (22)$$

$$\Big[[K_1]+(\bar{c}^2+p_u(\tau))[K_2]-(\frac{f}{2\bar{D}}\bar{c}^2+\bar{g}\cos\alpha+\beta^{1/2}\frac{\partial\bar{c}}{\partial\tau})[K_3]-(\frac{f}{2\bar{D}}\bar{c}^2+\bar{g}\cos\alpha)[K_4]-\bar{g}\cos\alpha[K_5]-\bar{g}\cos\alpha[K_6]\Big]\{q\}+2\beta^{1/2}\bar{c}[K_4]\{\dot{q}\}+[M]\{\ddot{q}\}=0 \quad (23)$$

식(23)에 식(22)에 해와 식(16)을 대입하고 정리하면, 다음과 같은 파이프의 동적 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$\{[Q_1]+\cos\Omega\tau[Q_2]+\cos2\Omega\tau[Q_3]+\Omega\sin\Omega\tau[Q_4]\}\{q\}+\{[Q_5]+\cos\Omega\tau[Q_6]\}\{\dot{q}\}+[M]\{\ddot{q}\}=0 \quad (24)$$

식(24)는 Mathieu-Hill 형태의 방정식으로써, 이

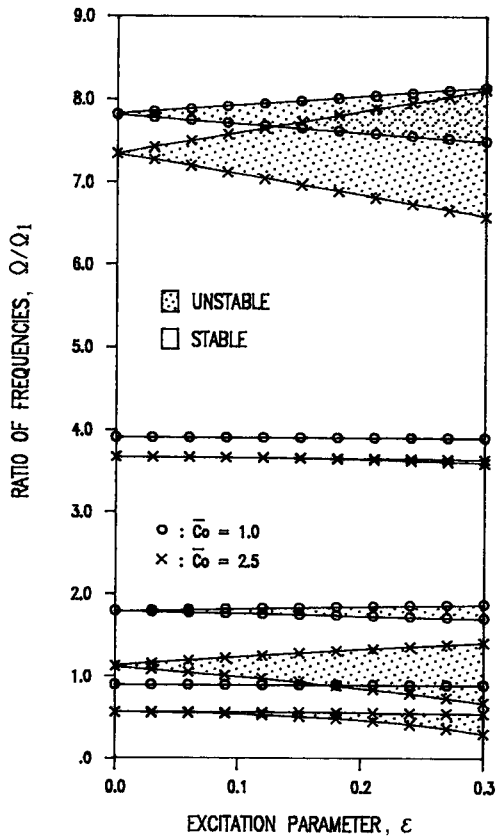

Fig. 6 Stability chart : $\Omega_1=9.8696$ ($f=0.02$, $\bar{g}=0.05$, $\bar{p}_o=1.0$ $\alpha=0.3$, $\bar{D}=0.05$, $\beta=0.3$)

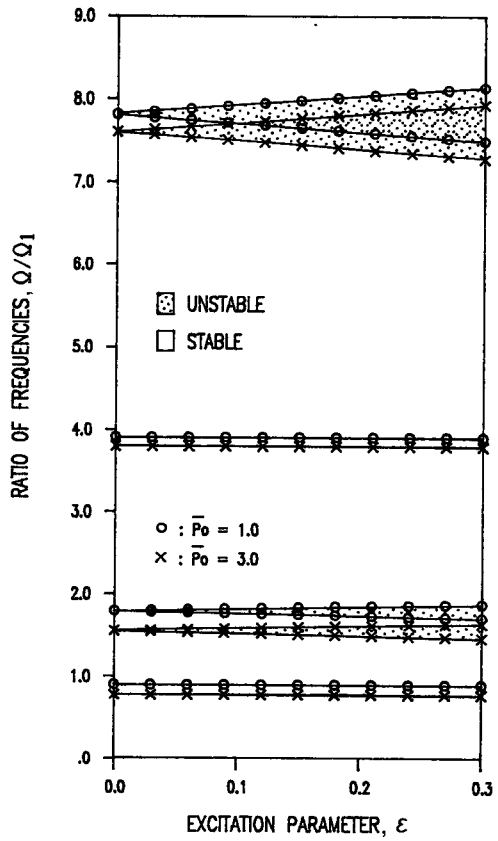

Fig. 7 Stability chart : $\Omega_1=9.8696$ ($f=0.02$, $\bar{g}=0.05$, $\bar{c}_o=1.0$ $\alpha=0.3$, $\bar{D}=0.05$, $\beta=0.3$)

식을 통해 파이프의 동적거동을 고찰할 수 있다.

3.1 안정성(stability) 해석

식(21)에서 4번째 이상의 모드는 무시하고 3번째 모드 까지를 고려하기로 한다. 또한, 식(24)는 Mathieu-Hill 형태의 방정식으로, 안정성해석은 Floquet 이론[9]을 이용하여 Bolotin[10]에 의하여 제시되었으며, 이 방법으로 주기 $2T$와 T의 주기해에 의하여 안정과 불안정의 경계를 계산할 수 있는 방정식을 얻을 수 있다. 식(24)에서 주기 $2T$의 주기해가 나타나는 제1차 불안정(primary instability) 영역의 경계를 구하기 위해, 주기 $2T$의 주기해

$$\{q\}=\sum_{k=1,3,5.}^{\infty}\left[\{a_k\}\sin\frac{k\Omega\tau}{2}+\{b_k\}\cos\frac{k\Omega\tau}{2}\right] \quad (25)$$

와 주기 T의 주기해가 나타나는 제2차 불안정(secondary instability) 영역의 경계를 구하기 위해, 주기 T의 주기해

$$\{q\}=\frac{1}{2}\{b_o\}+\sum_{k=2,4,6}^{\infty}\left[\{a_k\}\sin\frac{k\Omega\tau}{2}+\{b_k\}\cos\frac{k\Omega\tau}{2}\right] \quad (26)$$

을 식(24)에 대입한 후 $\sin\frac{k\Omega\tau}{2}$와 $\cos\frac{k\Omega\tau}{2}$의 계수들을 영(zero)으로 놓으면, $\{a_k\}$와 $\{b_k\}$에 대한 대수방정식을 얻게되며, 이 대수방정식이 근을 갖기 위해서는 행렬식은 영(zero)이어야 하고 이 행렬식의 값은 수렴한다[10]. 따라서, 제1차 불안정 영역의 경계를 근사적으로 얻기위해 $k=1$인 경우의 경계방정식 식(27)과 제2차 불안정 영역의 경계를 근사적으로 얻기위한 $k=2$인 경우의 경계방정식 식(28)을 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix}=0 \quad (27)$$

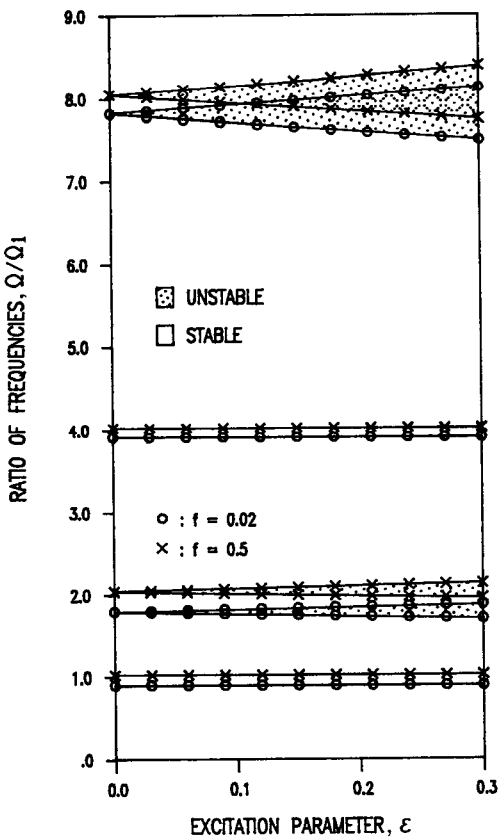

Fig. 8 Stability chart ; $\Omega_1=9.8696$ ($\bar{c}_0=1.0$, $\bar{g}=0.05$, $\bar{p}_o=1.0$ $\alpha=0.3$, $\bar{D}=0.05$, $\beta=0.3$)

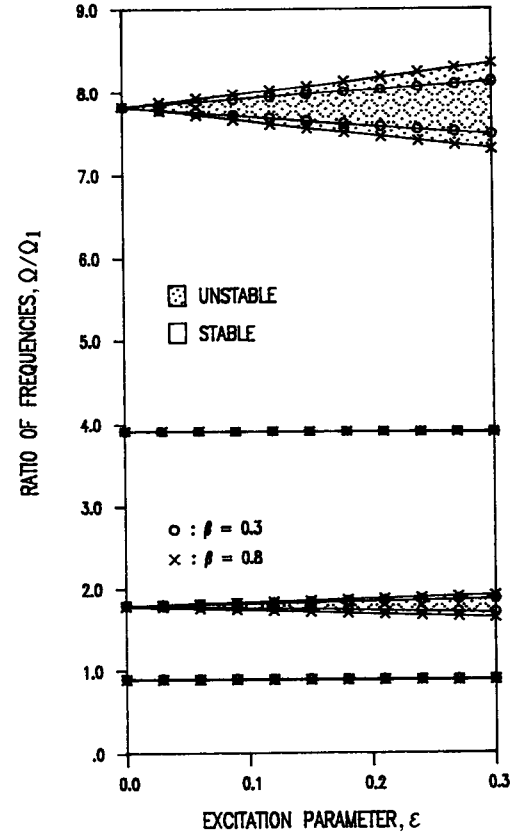

Fig. 9 Stability chart ; $\Omega_1=9.8696$ ($\bar{c}_o=1.0$, $\bar{g}=0.05$, $\bar{p}_o=1.0$ $\alpha=0.3$, $\bar{D}=0.05$, $f=0.02$)

$$\begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{vmatrix} = 0 \tag{28}$$

Bolotin 방법[10]으로 구한 불안정영역의 경계방정식 식(27)과 식(28)을 이용하여 Fig. 5의 모델과 같은 직선파이프에 대하여 각 무차원 파라메터를 변화시키면서, 세로축은 밸브조절 주파수 Ω와 단순지지파이프의 고유진동수 Ω_1의 비로, 가로축은 밸브조절 유속과 평균유속의 비, ε으로 안정성에 미치는 영향을 Fig. 6~11에 나타내었다. Fig. 6은 유속의 영향으로 이전의 연구[3]에서도 볼 수 있듯이 유속이 커질수록 고유진동수 값이 작아지고 불안정영역이 내려옴을 본 연구에서도 확인할 수 있었다. Fig. 8은 마찰 계수의 영향으로 값이 커짐에 따라 고유진동수와 불안정영역이 약간 올라감을 관찰할 수 있는데, 이는 파이프에서 유체의 항력으로 인한 인장력을 받아 파이프의 운동을 억제하려고 하기 때문이라고 해석된다. 그리고, Fig. 9는 질량비의 영향으로, 유속과 압력을 주어진 값으로 가정하여 연구[3]되었을 때는 질량비의 값이 증가하면 불안정 영역에는 영향이 없이 고유진동수의 값만 적어 졌는데 본 연구에서는 질량비의 값이 커짐 즉, 파이프의 단위 길이당 질량 m_p가 적어짐에 따라 또는 유체의 단위길이당 질량 m_w가 커짐에 따라 고유진동수는 약간 내려오고, 불안정영역이 커짐을 알 수 있었다. 이는 본 연구에서 고려된 유속에 의한 압력의 영향이 파이프의 운동과 상호연계되어 나타나기 때문으로 판단된다. 또한, 중력에 의한 초기처짐(Fig. 10)과 파이프가 초기에 기울어진 각도 등에 의한 영향(Fig. 11)은 거의 없는 것으로 관찰되었다.

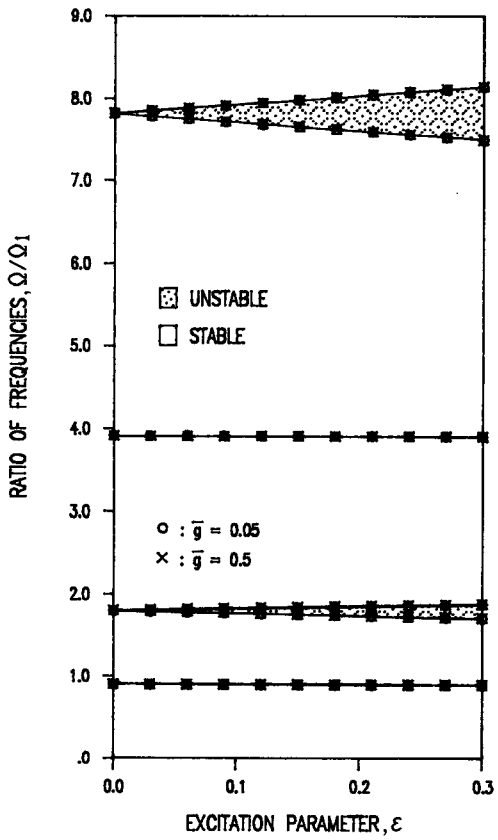

Fig. 10 Stability chart ; $\Omega_1=9.8696$ ($\bar{c}_o=1.0$, $f=0.02$, $\bar{p}_o=1.0$ $\alpha=0.3$, $\bar{D}=0.05$, $\beta=0.3$)

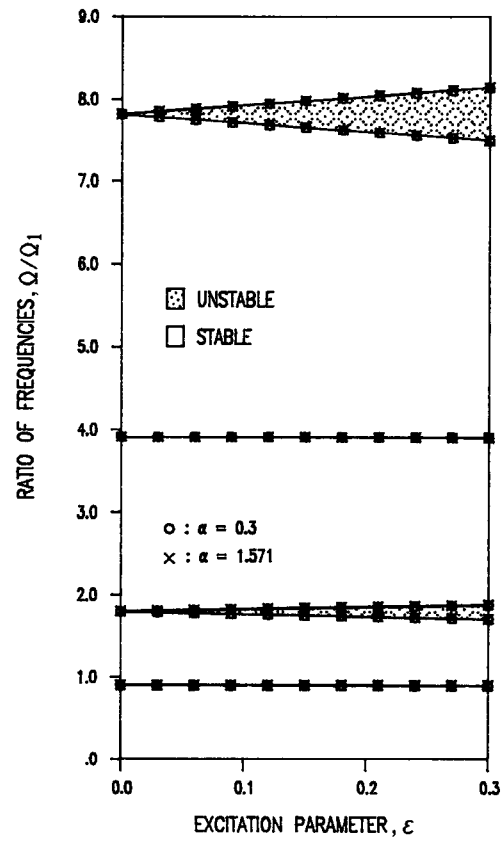

Fig. 11 Stability chart ; $\Omega_1=9.8696$ ($\bar{c}_o=1.0$, $\bar{g}=0.05$, $\bar{p}_o=1.0$ $f=0.02$, $\bar{D}=0.05$, $\beta=0.3$)

3.2 응답곡선

응답곡선을 얻기 위한 수치해석 방법으로는 여러 방법이 있으나, 중앙차분법(central difference method)과 Runge-Kutta 방법이 선형 또는 비선형계에서 모두 수렴성이 좋은 것으로 알려져 있다[11]. 따라서 본 연구에서는 비교적 간편한 중앙차분법을 이용하여 $\Delta\tau=0.01$일 때, 식(24)의 수치해석을 수행하였으며, Fig. 11의 안정과 불안정 영역에서 $\varepsilon=0.15$일때 파이프의 횡방향 변위 $\bar{w}_d$와 일반화좌표(generalized coordinate) q_1, q_2 그리고 $\bar{p}$의 시간에 따른 변화를 Fig. 12~15에 도시하였다. 그림의 가로축은 무차원 시간이고 세로축은 진동응답의 크기이고 횡방향 변위 $\bar{w}_d$와 $\bar{p}$는 $\xi=0.25$에서의 응답이다.

Fig. 12는 $\Omega=16.5$인 안정한 구간에서의 응답으로 비트(beat)현상을 일으키면서 주기운동을 하고 있으며 응답도 안정하다. Fig. 13은 $\Omega=17.7$일 때인 불안정영역에서의 응답으로 q_1, q_2 모두 발산한다. Fig. 14은 $\Omega=40$일때인 경우로 응답은 안정하다. Fig. 15은 $\Omega=77.0$에서의 응답으로 q_2가 먼저 발산하여 불안정하여진다.

4. 결 론

본 연구의 결과를 종합하면 다음과 같다.

(1) 내부유동을 포함하는 파이프계의 진동해석을 위하여 아직까지 연구가 미진한 내용 즉, 유속과 압력이 시간과 위치의 함수인 유동특성을 고려하고, 이 유동특성과 파이프의 운동이 상호 연계되어 영향을 주는 일반적인 경우의 운동방정식을 유도하였다. 이 결과 파이프계의 시동 또는 정지시는 물론 밸브, 펌프등의 부하변동시에도 본 연구에서 유도된 운동방정식을 활용할 수 있게 되었다.

(2) 본 연구에서는 간단한 파이프계의 모델 즉, 단순지지된 파이프를 대상으로 이론해석을 수행한 결과, 유속이 증가할수록 고유진동수가 감소하며 불안정 영역이 커지고, 압력이 증가할수록 고유진동수는 작아짐을 볼 수 있었다. 그리고 마찰력의 증가로 인하여 파이프에 인장력을 받기 때문에 고유진동수는 올라감을 알 수 있었고, 질량비의 값이 증가할수록 고유진동수 값은 약간 작아지고 Chen의 연구[3]와는 달리 불안정 영역이 커짐을 보았는데, 본 연구에서는 Chen의 연구에서 고려하지 않은 즉, 유체의 유속, 압력과 파이프의 운동이 서로 파이프의 지배방정식에 영향을 주었기 때문으로 해석된다. 또한, 파이프의 경계조건이 단순지지 되었을 때는 중력으로 인한 초기처짐과 파이프의 기울어진 각도등이 안정성에 미치는 영향은 거의 없는 것으로 관찰되었다.

(3) 또한 파이프계의 진동응답을 구하여 봄으로써 안정성 선도(stability chart)의 타당성을 확인할 수 있었고, 운동의 양상을 관측하여 각각의 초기 상태에 따른 운동의 변화를 예측할 수 있었다.

후 기

본 연구는 1990년도 한국과학재단 연구비 지원(과제번호 : 901-0910-033-2)으로 수행되었습니다. 이에 관계자 여러분에게 감사를 드립니다.

참고문헌

(1) Ashley, H. and Haviland, G., 1950, "Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid," Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol.72, pp.229~232.

(2) Housner, G.W., 1952, "Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid," Jounal of Applied Mechanics, Vol. 19, pp.205~209.

(3) Chen, S.S., 1971, "Dynamic Stability of a Tube Conveying Fluid," Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. of ASCE, Vol.97, pp. 1469~1485.

(4) Paidoussis, M.P. and Issid, N.T., 1974, "Dynamic Stability of Pipes Conveying fluid," Journal of Sound and Vibration, Vol.33, pp.267~294.

(5) Pak C.H., Yun Y.S., Hong S.C., and Kim T.R., 1989, "On the Parametrically Excited Vibration of a Three Dimensionally Curved Piping System Containing Pulsating Flow," Proceedings of International Symposium on Pressure Vessel Technology and Nuclear Codes & Standards, Sec. 4, pp.20~31.

(6) 박철희, 이우식, 홍성철, 김태룡, 1991, "비정상 유동을 포함한 파이프계의 안정성 해석", 대한 기계학회 논문집, 제15권 5호, pp. 1512~

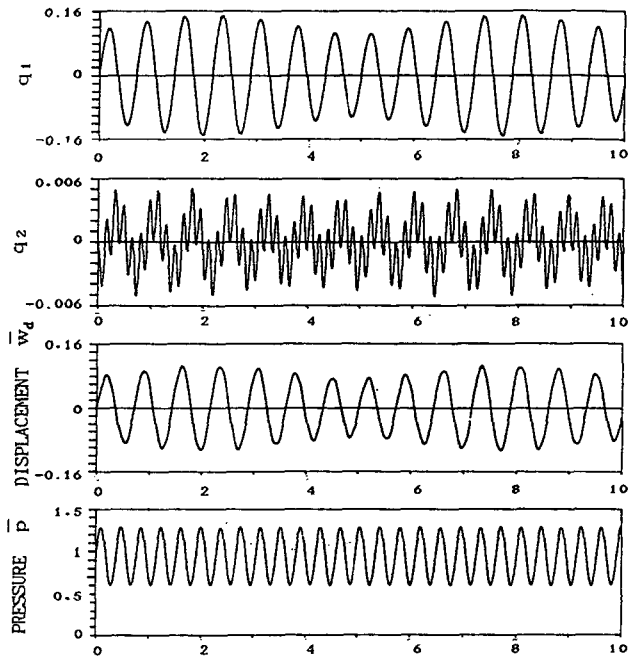

Fig. 12 Dynamic response curves ; $\Omega=16.5$
($\bar{c}_o=1.0$, $\bar{g}=0.05$, $\bar{p}_o=1.0$, $\alpha=0.3$, $f=0.02$, $D=0.05$, $\beta=0.3$)

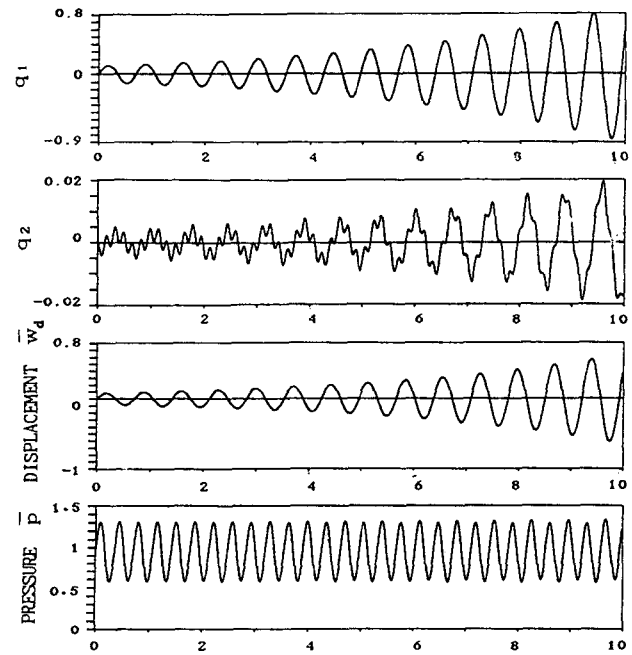

Fig. 13 Dynamic response curves ; $\Omega=17.7$
($\bar{c}_o=1.0$, $\bar{g}=0.05$, $\bar{p}_o=1.0$, $\alpha=0.3$, $f=0.02$, $D=0.05$, $\beta=0.3$)

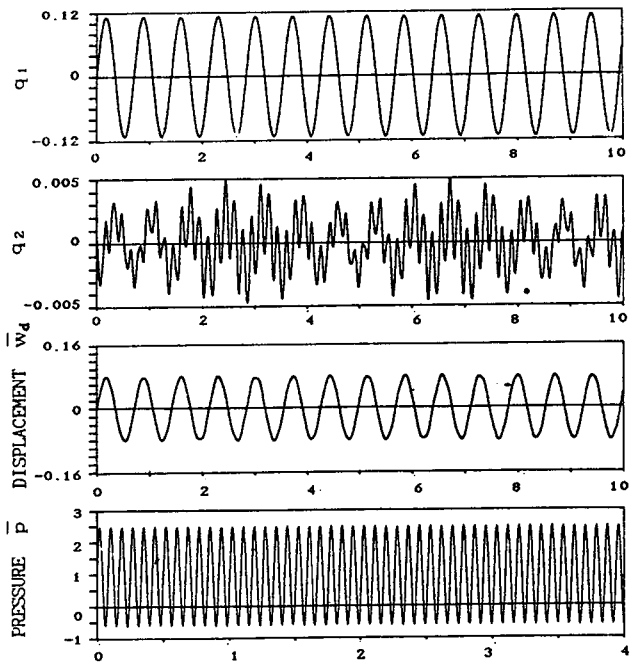

Fig. 14 Dynamic response curves ; $\Omega=75.0$
($\bar{c}_o=1.0$, $\bar{g}=0.05$, $\bar{p}_o=1.0$, $\alpha=0.3$, $f=0.02$, $\bar{D}=0.05$, $\beta=0.3$)

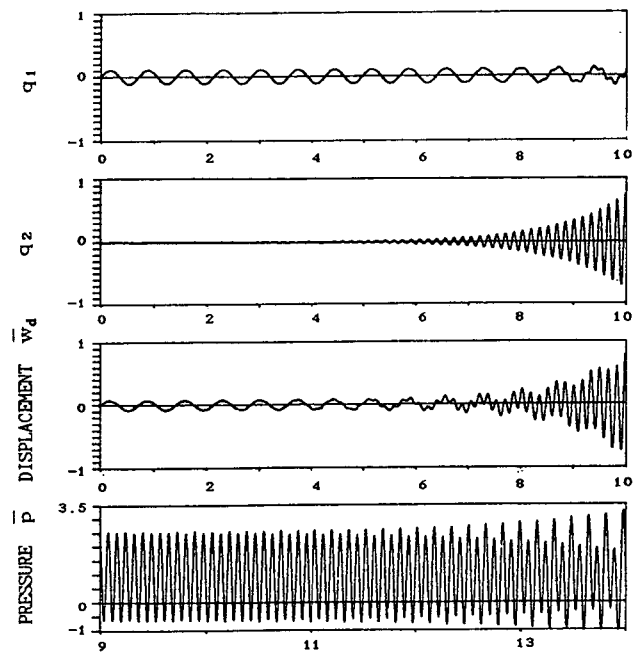

Fig. 15 Dynamic response curves ; $\Omega=77.0$
($\bar{c}_o=1.0$, $\bar{g}=0.05$, $\bar{p}_o=1.0$, $\alpha=0.3$, $f=0.02$, $\bar{D}=0.05$, $\beta=0.3$)

1521.
(7) White, F.M., 1986, Fluid Mechanics, McGraw-Hill Co.
(8) Hansen, A.G., 1967, fluid Mechanics, Wiley.
(9) Magnus, W. and Winkler, S., 1966, Hill's Equation. Dover Publications Inc.
(10) Bolotin, V.V., 1964, The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden Day Inc.
(11) D'Souza, A.F. and Garg, V.K., 1984, Advanced Dynamics; Modeling and Analysis, Prentice-Hall, inc.