

〈論 文〉

내부공진을 가진 보의 비선형 강제진동해석

이원경* · 소강영**

(1991년 5월 14일 접수)

Nonlinear Analysis of a Forced Beam with Internal Resonances

Won Kyoung Lee and Kang Young Soh

Key Words : Internal Resonance(내부공진), Mode Interaction(모드상호영향), Primary Resonance(주공진), Mid-Plane Stretching(중간평면신장), Method of Multiple Scales(다중시간법)

Abstract

An analysis is presented for the primary resonance of a clamped-hinged beam, which occurs when the frequency of excitation is near one of the natural frequencies, ω_n . Three mode interactions, $\omega_2 \approx 3\omega_1$, and $\omega_3 \approx \omega_1 + 2\omega_2$, are considered and their influence on the response is studied. The case of two mode interaction, $\omega_2 \approx 3\omega_1$, is also considered in order to compare it with the case of three mode interactions. The straight beam experiencing mid-plane stretching is governed by a nonlinear partial differential equation. By using Galerkin's method the governing equation is reduced to a system of nonautonomous nonlinear ordinary differential equations. The method of multiple scales is applied to obtain steady-state responses of the system. Results of numerical investigations show that there exists no significant difference between both modal interactions.

1. 서 론

양단이 고정된 보가 변형할 때에는 중간 평면의 신장을 수반하게 된다. 운동의 진폭이 증가함에 따라 이 신장이 보의 동적 응답에 미치는 영향은 심각하게 된다. 이러한 현상은 응력과 변형도와의 관계가 선형적이라 하더라도 변형도와 변위와의 관계식은 비선형이 되며 결국은 보의 비선형 운동방정식을 낳게된다. 보는 연속계이나 근사를 위하여 다자유도계로 간주할 수 있다. 비선형 다자유도계에 있어서는 선형화된 계의 고유진동수끼리 적절한 관계를 가질 때 내부공진이 발생할 수 있다.

양단이 고정된 끝은 보의 비선형 동적응답이 그

동안 많이 연구되어 오고 있으며^(1~7), 집중질량을 가지고 직각으로 굽은 보의 해석을 위하여 내부공진을 고려한 해석적 혹은 실험적 연구가 이루어져 왔다^(8~10). 그 중에서도 Nayfeh 등은^(6~7) 조화가진하의 핀과 격쇠로 고정된(hinged clamped) 보의 정상상태응답을 해석하기 위해 두 모드 사이의 내부공진을 고려하였다.

본 연구에서는 세 모드 사이의 내부공진을 고려하여 강제진동 중인 보의 비선형 해석을 다루고자 한다. 이 문제에 관심을 갖게 된 동기는 "연속계의 비선형해석에서 더 많은 모드를 포함시키면 어떤 결과를 낳게 될 것인가?" 라는 질문에서 생겨난 것이다.

갤러킨 법을 이용하여 비선형 편미분 방정식과 경계조건으로 표현되는 이 문제를 연립 비선형 상미분 방정식으로 변환한다. 다중시간법(the

*정회원, 영남대학교 정밀기계공학과
**정회원, 현대 자동차 상용차엔진기술부

method of multiple scales)을 이용하여 이 상미분 방정식을 정상상태에서의 세 모드의 진폭과 위상에 대한 연립비선형 대수방정식으로 변환한다. 이 대수방정식을 수치적으로 풀어서 정상상태 응답을 구하고 Nayfeh 등⁽⁵⁾의 결과와 비교하였다.

2. 보의 운동 방정식

핀과 격쇠로 고정된(hinged-clamped) 보가 Fig. 1에 나타나 있다. 중간 평면의 신장을 고려하면 보의 운동 방정식과 경계조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다⁽⁶⁾.

$$EI \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} + m \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} = -2\bar{c} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \bar{H} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{p}(\bar{x}, \bar{t})$$

$$\bar{w}(0, \bar{t}) = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{w}(0, \bar{t})}{\partial \bar{x}^2} = 0$$

$$\bar{w}(\bar{l}, \bar{t}) = 0, \quad \frac{\partial \bar{w}(\bar{l}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} = 0$$

여기서

$$\bar{H} = \frac{EA}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x}$$

E =탄성계수; $I = bh^3/12$ =면적 관성모멘트; b =보의 너비; h =보의 두께; m =단위길이당 질량; \bar{c} =감쇠계수; \bar{H} =보의 단면에 작용하는 인장력⁽¹¹⁾; \bar{p} =외력; \bar{w} =보의 변형; \bar{t} =시간; \bar{l} =보의 길이; \bar{A} =보의 단면적이다.

무차원 변수를 사용하면 위의 식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \epsilon \left(-2c \frac{\partial w}{\partial t} + H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p \right) \quad (1a)$$

$$w(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (1b, c)$$

$$w(l, t) = 0, \quad \frac{\partial w(l, t)}{\partial x} = 0 \quad (1d, e)$$

여기서

$$H = \nu \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$$

$$\bar{x} = xL, \quad L = \bar{l}/2, \quad 1 = \bar{l}/L = 2,$$

$$r = (I/A)^{1/2} = \text{회전반경}, \quad \bar{t} = (mL^4/Er^2)^{1/2} t,$$

$$\epsilon = r^2/L^2 = (h/L)^{1/2}/12, \quad \bar{w} = r^2 w/L,$$

$$\bar{p} = (r^6 EA/L^7) p, \quad \bar{H} = EAH(r/L)^4,$$

$$\bar{c} = 2cr^3 A(mE)^{1/2}/L^4.$$

갤리킨 법을 이용하여 식 (1)로 주어지는 문제를 풀기 위해 변형을 다음과같이 표현할 수 있다고 가정하자.

$$w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) \varphi_m(x) \quad (2)$$

여기서 u_m 은 일반화된 좌표이며 φ_m 은 다음의 고유치문제의 고유함수이다.

$$\frac{d^4 \varphi_m}{dx^4} - \omega_m^2 \varphi_m = 0 \quad (3a)$$

$$\varphi_m(0) = 0, \quad \frac{d^2 \varphi_m(0)}{dx^2} = 0, \quad (3b, c)$$

$$\varphi_m(l) = 0, \quad \frac{d\varphi_m(l)}{dx} = 0, \quad (3d, e)$$

여기서 ω_m 은 고유진동수이다.

식 (2)를 식 (1)에 대입하고 양변에 φ_n 을 곱하고 x 에 대해서 적분한 후 고유함수의 직교성을 이용하여 정리하면 다음과 같은 연립 비선형 비자율 상미분 방정식을 얻게 된다.

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} + \omega_n^2 u_n = \epsilon \left[-2c_n \frac{du_n}{dt} + F_n \cos \Omega t + \sum_{m,p,q=1}^{\infty} a_{nmpq} u_m u_p u_q \right], \quad n=1, 2, \dots \quad (4)$$

여기서

$$c_n = \int_0^l c \varphi_n^2 dx,$$

$$a_{nmpq} = \nu \int_0^l \varphi_n \frac{d^2 \varphi_q}{dx^2} dx \int_0^l \frac{d\varphi_m}{dx} \frac{d\varphi_p}{dx},$$

$$F_n = \int_0^l P(x) \varphi_n dx,$$

$$p(x, t) = P(x) \cos \Omega t$$

이 식의 유도과정에서 감쇠항은 각 모드에 독립적으로 기여한다고(modal damping) 가정하였으며 외력은 조화가진으로 가정하였다. 모든 시간에 걸쳐서 타당한(uniformly valid) 근사해를 구하기 위하여 다중시간법(the method of multiple scales)을 사용하기로 한다.

우선 u_n 을 다음과 같이 정의된 여러 시간들의 함수로 가정하고

$$T_n = \epsilon^n t$$

다음과 같이 전개될 수 있다고 가정한다.

$$u_n(t; \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_{nj}(T_0, T_1, \dots),$$

$$n=1, 2, \dots \quad (5a)$$

이 때 시간에 관한 미분은 다음과 같이 변환된다.

$$d/dt = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \quad (5b)$$

$$d^2/dt^2 = D_0^2 + \varepsilon 2D_0 D_1 + \dots, \quad (5c)$$

여기서 $D_0 = \frac{\partial}{\partial T_0}$, $D_1 = \frac{\partial}{\partial T_1}$, ... (5d)

식 (5)를 식 (4)에 대입하고 ε 의 동일한 차수의 계수를 같게 두면 다음을 얻을 수 있다.

$$\varepsilon_0 : D_0^2 u_{n0} + \omega_n^2 u_{n0} = 0, \quad n=1, 2, \dots \quad (6)$$

$$\varepsilon^1 : D_0^2 u_{n1} + \omega_n^2 u_{n1} = -2D_0 D_1 u_{n0} - 2c_n D_0 u_{n0}$$

$$+ F_n \cos \Omega T_0 + \sum_{m,p,q=1}^{\infty} a_{nmpq} u_{m0} u_{p0} u_{q0},$$

$$n=1, 2, \dots$$

$\varepsilon^2; \quad \vdots$

식 (6)의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$u_{n0} = A_n(T_1, T_2, \dots) \exp(i\omega_n T_0) + cc,$$

$$n=1, 2, \dots \quad (8)$$

여기서 cc 는 앞 항의 공액복소수이다. 현재로서는 A_n 이 미지수이지만 다음 단계의 근사에선 해의 유계조건 즉 불멸항(secular terms)이 소거되어야 한다는 조건으로 부터 구해진다. 식 (8)을 식 (7)에 대입하면 다음을 얻게된다.

$$D_0^2 u_{n1} + \omega_n^2 u_{n1} = -2i\omega_n(D_1 A_n + c_n A_n) \exp(i\omega_n T_0)$$

$$+ \frac{1}{2} F_n \exp(i\Omega T_0) + \sum a_{nmpq} \{A_m A_p A_q \exp$$

$$[i(\omega_m + \omega_p + \omega_q) T_0] + A_m A_p \bar{A}_q \exp$$

$$[i(\omega_m + \omega_p - \omega_q) T_0] + A_m \bar{A}_p A_q \exp$$

$$[i(\omega_m - \omega_p + \omega_q) T_0] + A_m \bar{A}_p \bar{A}_q \exp$$

$$[i(\omega_m - \omega_p - \omega_q) T_0]\} + cc,$$

$$n=1, 2, \dots \quad (9)$$

u_{n1} 으로부터 불멸항을 소거하기 위해선 $\exp(i\omega_n T_0)$ 의 계수가 0이 되도록 A_n 이 결정되어야 한다. 이 계수는 $\Omega \approx \omega_n$ (주공진)일때 F_n 을 포함하며, ω_n 이 다음의 조건

$$\omega_n \approx \pm \omega_m \pm \omega_p \pm \omega_q$$

(모든 부호가 음이 되는 경우는 제외) (10)

을 만족할 때 내부공진과 관련된 비선형항을 포함하게 된다.

3. 정상상태 응답

고유치 문제 (3)의 고유함수는 다음과 같다.

$$\varphi_n = E_n [\sin(\alpha_n x) - R_n \sinh(\alpha_n x)]$$

여기서

$$E_n = \left[\frac{1}{2} l (1 - R_n^2) + (R_n^2 \sinh 2\alpha_n l - \sin 2\alpha_n l) / 4\alpha_n \right]^{-1/2}$$

$$R_n = \sin \alpha_n l / \sinh \alpha_n l, \quad \alpha_n = (\omega_n)^{1/2} / l$$

그리고 α_n 은 다음 방정식 $\tan \alpha_n l = \tanh \alpha_n l$ 의 근이 된다. 여기선 $l=2$ 이므로 세번째 까지의 근과 고유진동수 $\omega_n = (\alpha_n l)^2$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\alpha_1 l = 3.927 \quad \text{그리고} \quad \omega_1 = 15.421$$

$$\alpha_2 l = 7.069 \quad \text{그리고} \quad \omega_2 = 49.970$$

$$\alpha_3 l = 10.210 \quad \text{그리고} \quad \omega_3 = 104.24$$

이 고유진동수와 내부공진조건 (10)을 관찰하면 $\omega_2 \approx 3\omega_1$ 과 $\omega_3 \approx \omega_1 + 2\omega_2$ 임을 알 수 있으며 이탈변수(detuning parameter)를 이용하여 다음과 같이 표현한다.

$$\omega_2 = 3\omega_1 (1 + \varepsilon \sigma_{12}) \quad (11a)$$

$$\omega_3 = (\omega_1 + 2\omega_2) (1 + \varepsilon \sigma_{13}) \quad (11b)$$

여기서

$$\varepsilon \sigma_{12} = 0.0801 \quad \varepsilon \sigma_{13} = -0.0964$$

본 연구에서는 $\Omega \approx \omega_s$ 인 경우 즉 주공진만을 고려하기 위하여 이탈변수를 이용하여 다음과 같이 표현한다.

$$\Omega = \omega_s (1 + \varepsilon \sigma_s), \quad \text{for } s=1, 2, \dots \quad (12)$$

공진조건 (11)과 (12)를 식 (9)에 대입하고 불멸항을 소거하면 다음을 얻을 수 있다.

$$-2i\omega_1 (A_1' + c_1 A_1) + A_1 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{1j} A_j \bar{A}_j$$

$$+ q_3 \bar{A}_1^2 A_2 \exp(i3\omega_1 \sigma_{12} T_1)$$

$$+ q_7 \bar{A}_2^2 A_3 \exp(i(\omega_1 + 2\omega_2) \sigma_{13} T_1)$$

$$+ \frac{1}{2} F_1 \delta_{1s} \exp(i\sigma_2 \omega_1 T_1) = 0 \quad (13a)$$

$$-2i\omega_2 (A_2' + c_2 A_2) + A_2 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{2j} A_j \bar{A}_j$$

$$+ q_6 A_1^3 \exp(-i3\omega_1 \sigma_{12} T_1)$$

$$+ q_8 \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \exp(i(\omega_1 + 2\omega_2) \sigma_{13} T_1)$$

$$+\frac{1}{2}F_2\delta_{2s}\exp(i\sigma_2\omega_2 T_1)=0 \quad (13b)$$

$$-2i\omega_3(A_3'+c_3A_3)+A_3\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_{3j}A_j\bar{A}_j \\ +q_9A_1A_2^2A_3\exp-i(\omega_1+2\omega_2)\sigma_{13}T_1$$

$$+\frac{1}{2}F_3\delta_{3s}\exp(i\sigma_2\omega_3 T_1)=0 \quad (13c)$$

$$-2i\omega_n(A_n'+c_nA_n)+A_n\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_{nj}A_j\bar{A}_j$$

$$+\frac{1}{2}F_n\delta_{ns}\exp(i\sigma_2\omega_n T_1)=0, \quad n \geq 4 \quad (13d)$$

여기서 계수 γ_{nj} 와 q_n 는 부록 A에 주어지며, δ_{ns} 는 Kronecker delata이다. 식 (13)을 풀기 위해 A_n 을 다음과 같이 두면 편리하다.

$$A_n = \frac{1}{2}a_n \exp[i\omega_1\beta_n], \quad n=1, 2, \dots \quad (14)$$

여기서 a_n 과 β_n 은 실수이다. 식 (14)를 식 (13)에 대입하고 실수부와 허수부를 분리하면 다음을 얻게 된다.

$n=1, 2, 3 :$

$$\omega_1(a_1'+c_1a_1)-\frac{1}{8}(q_3a_1^2a_2\sin\mu_1+q_7a_2^2a_3\sin\mu_3) \\ -\frac{1}{2}F_1\delta_{1s}\sin\mu_2=0 \quad (15a)$$

$$\omega_1^2a_1\beta_1'+\frac{1}{8}(q_1a_1^3+q_2a_1a_2^2+q_3a_1^2a_2\cos\mu_1 \\ +q_7a_2^2a_3\cos\mu_3+q_{10}a_1a_3^2+a_1\sum_{j=4}^{\infty}\gamma_{1j}a_j^2) \\ +\frac{1}{2}F_1\delta_{1s}\cos\mu_2=0 \quad (15b)$$

$$\omega_2(a_2'+c_2a_2)+\frac{1}{8}(q_6a_1^3\sin\mu_1 \\ -q_8a_1a_2a_3\sin\mu_3)-\frac{1}{2}F_2\delta_{2s}\sin\mu_2=0 \quad (15c)$$

$$\omega_1\omega_2a_2\beta_2'+\frac{1}{8}(q_4a_2^3+q_5a_1^2a_2+q_6a_1^3\cos\mu_1 \\ +q_8a_1a_2a_3\cos\mu_3+q_{11}a_2a_3^2+a_2\sum_{j=4}^{\infty}\gamma_{2j}a_j^2) \\ +\frac{1}{2}F_2\delta_{2s}\cos\mu_2=0 \quad (15d)$$

$$\omega_3(a_3'+c_3a_3)+\frac{1}{8}q_9a_1a_2^2\sin\mu_3 \\ -\frac{1}{2}F_3\delta_{3s}\sin\mu_2=0 \quad (15e)$$

$$\omega_1\omega_3a_3\beta_3'+\frac{1}{8}(q_9a_1a_2^2\cos\mu_3+q_{12}a_1^2a_3+q_{13}a_2^2a_3 \\ +q_{14}a_3^3+a_3\sum_{j=4}^{\infty}\gamma_{3j}a_j^2)+\frac{1}{2}F_3\delta_{3s}\cos\mu_2=0 \quad (15f)$$

$n \geq 4 :$

$$a_n'+c_n a_n - \frac{1}{2}F_n\delta_{ns}\sin\mu_2=0 \quad (15g)$$

$$\omega_n\omega_1\beta_n'a_n+\frac{1}{8}a_n\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_{nj}a_j^2 \\ +\frac{1}{2}F_n\delta_{ns}\cos\mu_2=0 \quad (15h)$$

여기서

$$\mu_1 = \omega_1(3\sigma_{12}T_1 - 3\beta_1 + \beta_2), \quad (16a)$$

$$\mu_2 = \omega_s(\sigma_2 T_1 - \beta_s), \quad (16b)$$

$$\mu_3 = (\omega_1 + 2\omega_2)\sigma_{13}T_1 + \omega_1\beta_3 - 2\omega_1\beta_2 - \omega_1\beta_1 \quad (16c)$$

Nayfeh 등⁽⁶⁾의 결과와 비교하기 위하여 본 연구에서는 두 경우 즉 $s=1$ 및 $s=2$ 인 경우만을 생각해 보자.

경우 I, $\Omega \approx \omega_1 (s=1)$ 일 때 식 (15g)로부터 다음 식을 얻게 된다.

$$a_n' + c_n a_n = 0, \quad n \geq 4.$$

위의 식은 다음의 결과를 낳게 된다.

$$a_n \propto \exp(-ic_n T_1), \quad n \geq 4.$$

따라서 a_1, a_2 및 a_3 를 제외하고는 모든 a_n 은 충분히 시간이 지나면 소멸하고 만다. 본 연구에서는 시간이 충분히 지나고 난 후의 해 즉 정상상태해에만 관심이 있으므로 $a_n (n \geq 4)$ 을 논의에서 제외하면 식(15)로부터 부록 B에 주어진 바와 같이, 진폭 a_n 과 위상 μ_n 에 대한 연립 자유훑 상미분방정식을 얻을 수 있다. 이 미분방정식으로부터 $a_1' = a_2' = a_3' = \mu_1' = \mu_2' = \mu_3' = 0$ 으로 두면 다음의 대수 방정식으로부터 정상상태응답을 구할 수 있다.

$$\omega_1 c_1 a_1 - \frac{1}{8}(q_3 a_1^2 a_2 \sin \mu_1 + q_7 a_2^2 a_3 \sin \mu_3) \\ - \frac{1}{2} F_1 \sin \mu_2 = 0 \quad (17a)$$

$$\omega_1^2 \sigma_2 a_1 + \frac{1}{8}(q_1 a_1^3 + q_2 a_1 a_2^2 + q_3 a_1^2 a_2 \cos \mu_1 \\ + q_7 a_2^2 a_3 \cos \mu_3 + q_{10} a_1 a_3^2) + \frac{1}{2} F_1 \cos \mu_2 = 0 \quad (17b)$$

$$\omega_2 c_2 a_2 + \frac{1}{8}(q_6 a_1^3 \sin \mu_1 - q_8 a_1 a_2 a_3 \sin \mu_3) = 0 \quad (17c)$$

$$3\omega_1\omega_2a_2(\sigma_2 - \sigma_{12}) + \frac{1}{8}(q_4a_2^3 + q_5a_1^2a_2 + q_6a_1^3\cos \\ \mu_1 + q_8a_1a_2a_3\cos\mu_3 + q_{11}a_3^2a_2) = 0 \quad (17d)$$

$$\omega_3 c_3 a_3 + \frac{1}{8} q_9 a_1 a_2^2 \sin \mu_3 = 0 \quad (17e)$$

$$\begin{aligned} & \omega_1 \omega_3 a_3 [7\sigma_2 - 6\sigma_{12} - (\omega_1 + 2\omega_2) \sigma_{13} / \omega_1] \\ & + \frac{1}{8} (q_9 a_1 a_2^2 \cos \mu_3 + q_{12} a_1^2 a_3 \\ & + q_{13} a_2^2 a_3 + q_{14} a_3^3) = 0 \end{aligned} \quad (17f)$$

위의 대수방정식을 관찰하면 a_1, a_2 및 a_3 는 0이 될 수 없음을 알 수 있다. 식 (2)를 이용하면 정상상태에서의 보의 변형을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} w(x, t) = & a_1 \cos(\Omega t - \mu_2) \varphi_1(x) \\ & + a_2 \cos(3\Omega t + \mu_1 - 3\mu_2) \varphi_2(x) \\ & + a_3 \cos(7\Omega t + 2\mu_1 - 7\mu_2 + \mu_3) \varphi_3(x) + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (18)$$

부록 A로부터 계수 $q_7 \sim q_{14}$ 은 첫째 모드와 둘째 모드 뿐만 아니라 셋째 모드의 영향을 받게 됨을 알 수 있다. 따라서 식 (17)에서 q_7, q_8, q_{10} 및 q_{11} 을 0으로 두면, 두 모드 만의 내부공진 즉 $\omega_2 \approx 3\omega_1$ 만을 고려한 Nayfeh 등⁽⁵⁾이 얻은 것과 같은 다음의 방정식을 얻게 된다.

$$\omega_1 c_1 a_1 - \frac{1}{8} q_3 a_1^2 a_2 \sin \mu_1 - \frac{1}{2} F_1 \sin \mu_2 = 0 \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} & \omega_1^2 \sigma_2 a_1 + \frac{1}{8} (q_1 a_1^3 + q_2 a_1 a_2^2 + q_3 a_1^2 a_2 \cos \mu_1) \\ & + \frac{1}{2} F_1 \cos \mu_2 = 0 \end{aligned} \quad (19b)$$

$$\omega_2 c_2 a_2 + \frac{1}{8} q_6 a_1^3 \sin \mu_1 = 0 \quad (19c)$$

$$\begin{aligned} & 3\omega_1 \omega_2 a_2 (\sigma_2 - \sigma_{12}) + \frac{1}{8} (q_4 a_2^3 \\ & + q_5 a_1^2 a_2 + q_6 a_1^3 \cos \mu_1) = 0 \end{aligned} \quad (19d)$$

이때 정상상태 응답은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} w(x, t) = & a_1 \cos(\Omega t - \mu_2) \varphi_1(x) \\ & + a_2 \cos(3\Omega t + \mu_1 - 3\mu_2) \varphi_2(x) \end{aligned} \quad (20)$$

경우 II, $\Omega \approx \omega_2 (s=2)$ 일 때

앞의 경우 I과 마찬가지로 정상상태 응답을 주는 다음의 대수방정식을 얻을 수 있다.

$$\omega_1 c_1 a_1 - \frac{1}{8} (q_3 a_1^2 a_2 \sin \mu_1 + q_7 a_2^2 a_3 \sin \mu_3) = 0 \quad (21a)$$

$$\begin{aligned} & \omega_1 a_1 (\omega_2 \sigma_2 + 3\omega_1 \sigma_{12}) + \frac{3}{8} (q_1 a_1^3 + q_2 a_1 a_2^2) \\ & + q_3 a_1^2 a_2 \cos \mu_1 + q_7 a_2^2 a_3 \cos \mu_3 + q_{10} a_1 a_3^2 \end{aligned} \quad (21b)$$

$$\begin{aligned} & \omega_2 c_2 a_2 + \frac{1}{8} (q_6 a_1^3 \sin \mu_1 - q_8 a_1 a_2 a_3 \sin \mu_3) \\ & - \frac{1}{2} F_2 \sin \mu_2 = 0 \end{aligned} \quad (21c)$$

$$\begin{aligned} & \omega_2^2 a_2 \sigma_2 + \frac{1}{8} (q_4 a_2^3 + q_5 a_1^2 a_2 + q_6 a_1^3 \cos \mu_1 \\ & + q_8 a_1 a_2 a_3 \cos \mu_3 + q_{11} a_2 a_3^2) \\ & + \frac{1}{2} F_2 \cos \mu_2 = 0 \end{aligned} \quad (21d)$$

$$\omega_3 c_3 a_3 + \frac{1}{8} q_9 a_1 a_2^2 \sin \mu_3 = 0 \quad (21e)$$

$$\begin{aligned} & \omega_3 a_3 [(7\omega_2 \sigma_2 + 3\omega_1 \sigma_{12}) - 3(\omega_1 + 2\omega_2) \sigma_{13}] \\ & + \frac{3}{8} (q_9 a_1 a_2^2 \cos \mu_3 + q_{12} a_1^2 a_3 + q_{13} a_2^2 a_3 \\ & + q_{14} a_3^3) = 0 \end{aligned} \quad (21f)$$

위의 대수방정식을 관찰하면 다음의 방정식이 만족될 때 $a_2 \neq 0, a_1 = a_3 = 0$ 인 응답이 존재함을 알 수 있다.

$$\omega_2 c_2 a_2 - \frac{1}{2} F_2 \sin \mu_2 = 0 \quad (22a)$$

$$\omega_2^2 a_2 \sigma_2 + \frac{1}{8} q_4 a_2^3 + \frac{1}{2} F_2 \cos \mu_2 = 0 \quad (22b)$$

위의 식으로부터 μ_2 를 소거하면 다음 관계식을 얻게 된다.

$$\sigma_2 = -\frac{1}{8} \frac{q_4}{\omega_2^2} a_2^2 \pm \left(\frac{F_2^2}{4\omega_2^4 a_2^2} - \frac{c_2^2}{\omega_2^2} \right)^{1/2} \quad (23)$$

이 식은 경화된 스프링 (hardening spring, $q_4 < 0$)을 가진 Duffing 진동계의 응답곡선을 주게 된다. 정상상태의 보의 변형은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} w(x, t) = & a_1 \cos(1/3 \Omega t - 1/3(\mu_1 + 3\mu_2)) \varphi_1(x) \\ & + a_2 \cos(\Omega t - \mu_2) \varphi_2(x) + a_3 \cos \\ & (7/3 \Omega t - 1/3(\mu_1 + 7\mu_2 - 3\mu_3)) \varphi_3(x) \end{aligned} \quad (24)$$

두 모드 만의 내부공진 즉 $\omega_2 \approx 3\omega_1$ 만을 고려한 Nayfeh 등⁽⁵⁾이 얻은 대수방정식과 보의 변형은 다음과 같다.

$$\omega_1 c_1 a_1 - \frac{1}{8} q_3 a_1^2 a_2 \sin \mu_1 = 0 \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} & \omega_1 a_1 (\omega_2 \sigma_2 + 3\omega_1 \sigma_{12}) + \frac{3}{8} (q_1 a_1^3 + q_2 a_1 a_2^2 \\ & + q_3 a_1^2 a_2 \cos \mu_1) = 0 \end{aligned} \quad (25b)$$

$$\omega_2 c_2 a_2 + \frac{1}{8} q_6 a_1^3 \sin \mu_1 - \frac{1}{2} F_2 \sin \mu_2 = 0 \quad (25c)$$

$$\begin{aligned} & \omega_2^2 a_2 \sigma_2 + \frac{1}{8} (q_4 a_2^3 + q_5 a_1^2 a_2 + q_6 a_1^3 \cos \mu_1) \\ & + \frac{1}{2} F_2 \cos \mu_2 = 0 \end{aligned} \quad (25d)$$

$$\begin{aligned} w(x, t) = & a_1 \cos(1/3 \Omega t - 1/3(\mu_1 + 3\mu_2)) \varphi_1(x) \\ & + a_2 \cos(\Omega t - \mu_2) \varphi_2(x) \end{aligned} \quad (26)$$

경우(I)과 경우(II)의 정상상태응답의 안정성 해석은 부록 B에 나타나 있다.

4. 수치결과

정상상태응답을 구하기 위하여 식(17), (19),

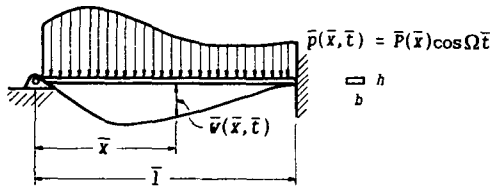


Fig. 1 A schematic diagram of a hinged-clamped beam

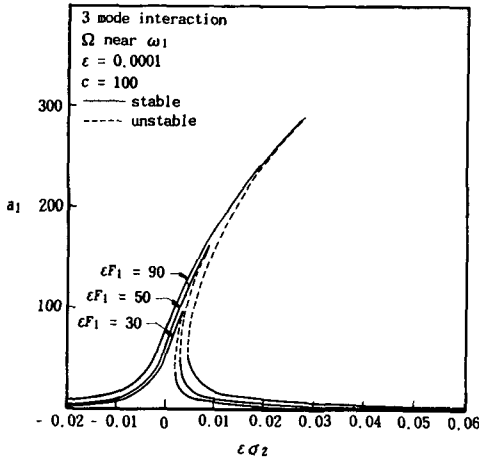


Fig. 2 Variation of amplitude a_1 of first mode with the excitation frequency

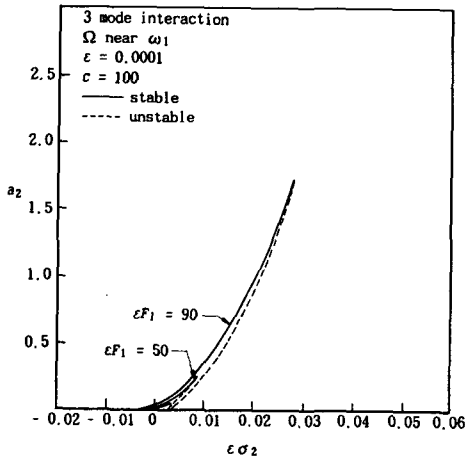


Fig. 3 Variation of amplitude a_2 of second mode with the excitation frequency

(21) 및 (25)를 Newton-Raphson법을 이용하여 수치적으로 풀었다. $\Omega \approx \omega_1$ 일 때 a_1 과 a_2 를 $\epsilon\sigma_2$ 의 함수로서 나타낸 것이 Fig. 2와 Fig. 3이다. 실선과 점선은 각각 안정한 응답과 불안정한 응답을 나타낸다. a_3 는 0은 아니었으나 너무 크기가 작아 그림에 나타낼 수가 없었다. a_1 과 a_2 에 대한 결과는 경화된 스프링을 가진 Duffing 진동계의 응답곡선과 흡사하다. a_2 역시 a_1 에 비하면 매우 작으므로 첫 번째 모드가 응답을 지배함을 알 수 있다. Fig. 4는 보의 변형이 시간에 따라 어떻게 변화하는가를 보여주고 있다. $\omega_2 \approx 3\omega_1$ 만을 고려한 Nayfeh 등⁽⁶⁾의 결과가 Fig. 5, 6 및 7에 나타나 있다.

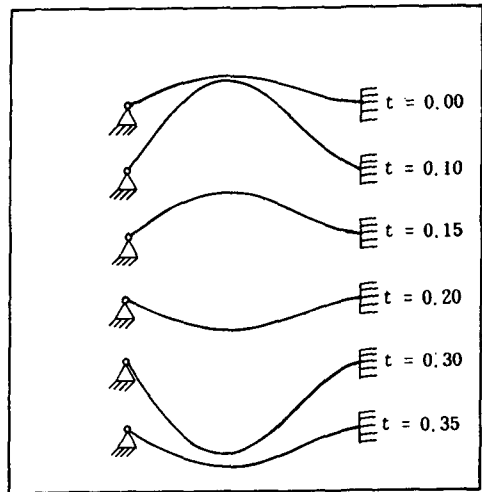


Fig. 4 Deflection curves : 3mode interaction (Ω near ω_1) ($\sigma_2=250$ (upper branch), $\epsilon F_1=90$)

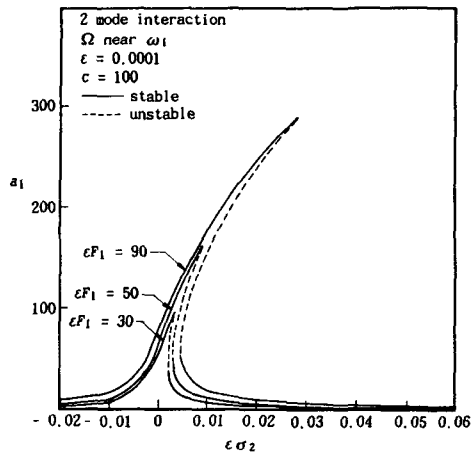


Fig. 5 Variation of amplitude a_1 of first mode with the excitation frequency

$\Omega \approx \omega_2$ 일때 $\epsilon\sigma_2$ 의 함수로서 진폭들이 Fig. 8에 나타나 있다. 두가지 양상의 응답이 보인다. 첫째는 식 (22)나 (23)으로 주어진 $a_2 \neq 0, a_1 = a_3 = 0$ 인 응답이다. 이것은 경화된 스프링을 가지는 Duffing 진동계의 응답과 일치한다. 두번째 응답은 첫번째 것과는 크게 다른데 a_3 가 매우 작긴 하지만 세 모드의 어떤 진폭도 0이 아닌 응답이다. 그림에는 안정한 응답만이 나타나 있다. 비록 두번째 모드가 직접 가진 되었지만 a_1 이 a_2 보다 아주 큰 영역이 존재한다. 이 영역에선 첫번째 모드가 응답을 지배하게 된다. $\epsilon\sigma_2$ 의 어떤 영역에선 세 개의 안정한 응답이 존재하기도 한다. Fig. 9는 보의 변형이 시

간에 따라 어떻게 변화하는 가를 보여 주고 있다. $\omega_2 \approx 3\omega_1$ 만을 고려한 Nayfeh 등⁽⁵⁾의 결과가 Fig. 10과 11에 나타나 있다.

이 결과로 부터 두 모드 만에 의한 내부공진을 고려한 결과와 세 모드 사이의 내부공진을 고려하여 해석한 결과사이에는 본질적인 차이가 발견되지 않았다. 그 이유는 $\epsilon\sigma_{13} = -0.0964$ 가 세번째 모드를 자극하기에는 너무 크기 때문인 것으로 추정된다.

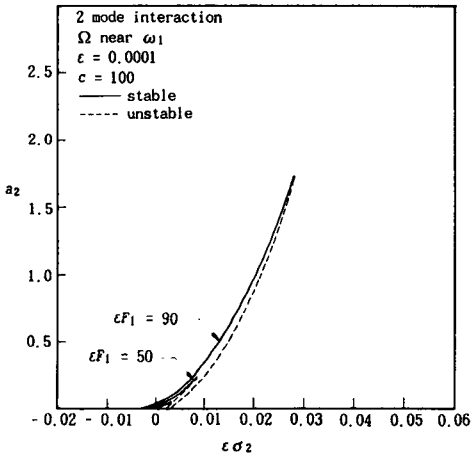


Fig. 6 Variation of amplitude a_2 of second mode with the excitation frequency

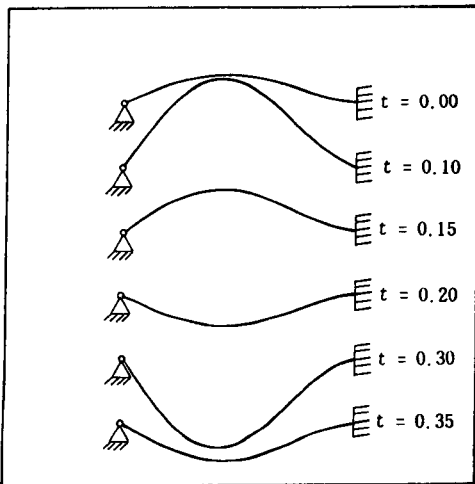


Fig. 7 Deflection curves : 2 mode interaction (Ω near ω_1) ($\sigma_2=250$ (upper branch), $\epsilon F_1=90$)

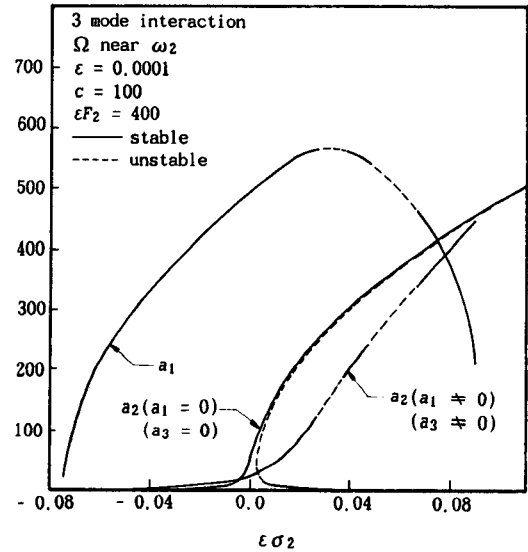


Fig. 8 Variation of a_1 and a_2 with σ_2

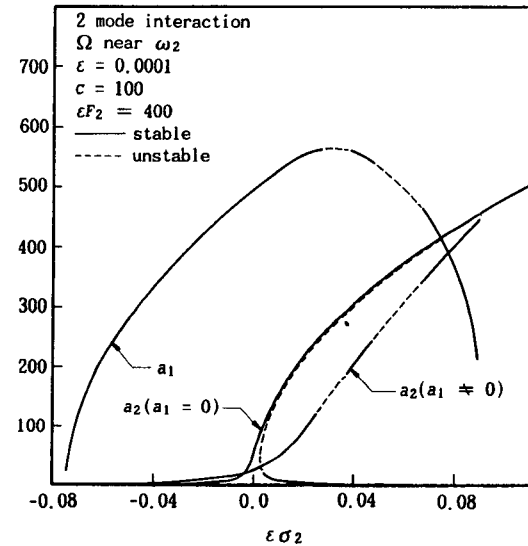


Fig. 9 Variation of a_1 and a_2 with σ_2

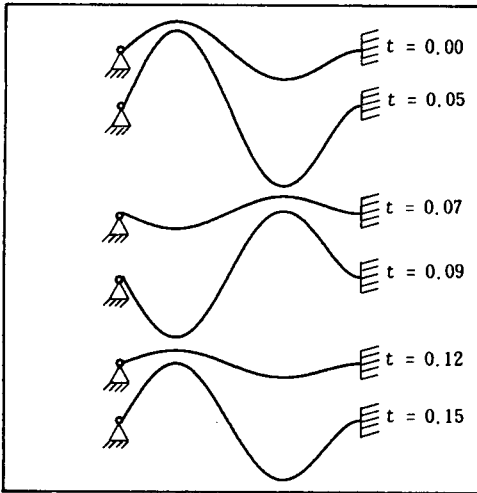


Fig. 10 Deflection curves : 3 mode interaction (Ω near ω_2) ($a_1 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, $\sigma_2 = 900$ (upper branch), $\varepsilon F_2 = 400$)

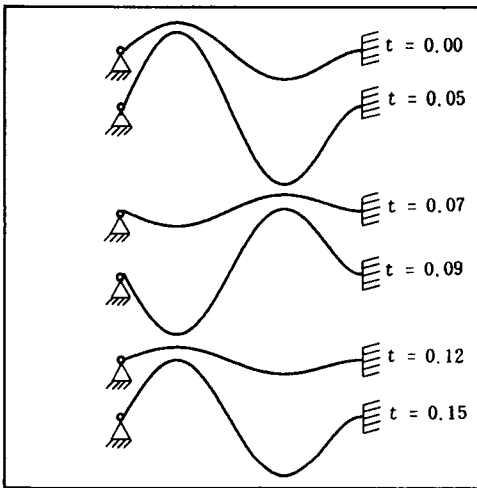


Fig. 11 Deflection curves : 2 mode interaction (Ω near ω_2) ($a_1 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, $\sigma_2 = 900$ (upper branch), $\varepsilon F_2 = 400$)

5. 결론

연속계의 비선형 진동해석에서 더 많은 모드를 해석과정에 포함시키면 어떤 결과를 낳게 될 것인가를 알아 보기 위하여 중간평면이 신장하는 양단 고정체의 강제진동을 해석하였다. 세 고유진동수 ω_1 , ω_2 및 ω_3 사이에 존재하는 $\omega_2 \approx 3\omega_1$ 및 $\omega_3 \approx \omega_1 + 2\omega_2$ 인 세 모드의 내부공진효과를 고려한 경

우와 $\omega_2 \approx 3\omega_1$ 인 두 모드의 내부공진효과를 고려한 경우의 정상상태 응답을 비교한 결과, 두 내부공진의 결과가 거의 일치함을 알 수 있었다. 이것은 ω_1 이나 ω_2 에 가까운 진동수의 기진력으로써 여러 모드를 자극하기엔 세 모드의 내부공진 이탈변수 $\varepsilon\sigma_{13}$ 가 너무 크기 때문이라고 추정된다. 결론적으로 본 연구에서는 더 많은 모드를 해석에 포함시키는 것이 결과에 별 영향을 주지 않는다는 것을 알 수 있었다. 이 결과가 애초의 질문에 명확한 해답이 될 수는 없겠지만 연속계의 비선형 진동 해석에 중요한 참고자료가 될 것으로 판단된다.

후기

본 연구는 한국과학재단의 목적기초 연구비의 지원에 의한 것임.

참고문헌

- (1) Tseng, W.Y. and Dugundji, J., 1970, "Nonlinear Vibrations of a Beam Under Harmonic Excitation," ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 37, June, pp. 292~297.
- (2) Atluri, S., 1973, "Nonlinear Vibrations of a Hinged Beam Including Nonlinear Inertia Effects," ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 40, March, pp. 121~126.
- (3) Lou, C. L. and Sikarskie, D. L., 1975, "Nonlinear Vibration of Beams Using a Form-Function Approximation," ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 42, March, pp. 209~214.
- (4) Lewandowski, R., 1987, "Application of the Ritz method to the Analysis of Nonlinear Free Vibrations of Beams," Journal of Sound and Vibration, Vol. 114, No. 1, pp. 91~101.
- (5) Nayfeh, A. H., Mook, D. T. and Sridhar, S., 1974, "Nonlinear Analysis of the Forced Response of Structural Elements," Journal of Acoustical Society of America, Vol. 55, No. 2, February, pp. 281~291.
- (6) Sridhar, S., Nayfeh, A.H. and Mook, D.T., 1975, "Nonlinear Resonances in a Class of Multi-Degree-of-Freedom Systems," Journal of Acoustical Society of America, Vol. 58, No. 1, July, pp.

- 113~123.
- (7) Nayfeh, A.H., and Mook, D.T., 1979, Non-linear Oscillations, New York : Wiley-Interscience.
- (8) Haddow, A. G., Barr, A.D. and Mook, D.T., 1984, "Theoretical and Experimental Study of Modal Interaction in a Two-Degree-of-Freedom Structure," Journal of Sound and Vibration, Vol. 97, No. 3, pp. 451~473.
- (9) Bux, S.L., and Roberts, J. W., 1986, "Nonlinear Vibratory Interactions in Systems of Coupled Beams," Journal of Sound and Vibration, Vol. 104, No. 3, pp. 497~520.
- (10) Nayfeh, A. H., Balachandran, B., Colbert, M. A., and Nayfeh, M. A., 1989, "An Experimental Investigation of Complicated Responses of a Two-Degree-of-Freedom Structure," ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 56, December, pp. 960~967.
- (11) Dowell, E.H., 1975, Aeroelasticity of Plates and Shells, Noordhoff International Publishing.

- $a_{1211} = -0.770$ $a_{1212} = -0.286$ $a_{1213} = 0.254$
 $a_{1221} = -0.286$ $a_{1222} = -2.870$ $a_{1223} = -0.523$
 $a_{1231} = 0.254$ $a_{1232} = -0.523$ $a_{1233} = -6.292$
 $a_{1311} = 0.683$ $a_{1312} = 0.254$ $a_{1313} = -0.225$
 $a_{1321} = 0.254$ $a_{1322} = 2.546$ $a_{1323} = 0.464$
 $a_{1331} = -0.225$ $a_{1332} = 0.464$ $a_{1333} = 5.581$
 $a_{2111} = -0.770$ $a_{2112} = -0.286$ $a_{2113} = 0.254$
 $a_{2121} = -0.286$ $a_{2122} = -2.870$ $a_{2123} = -0.523$
 $a_{2131} = 0.254$ $a_{2132} = -0.523$ $a_{2133} = -6.292$
 $a_{2211} = -7.716$ $a_{2212} = -2.870$ $a_{2213} = 2.546$
 $a_{2221} = -2.870$ $a_{2222} = -28.751$ $a_{2223} = -5.239$
 $a_{2231} = 2.546$ $a_{2232} = -5.239$ $a_{2233} = -63.028$
 $a_{2311} = -1.406$ $a_{2312} = -0.523$ $a_{2313} = 0.464$
 $a_{2321} = -0.523$ $a_{2322} = -5.239$ $a_{2323} = -0.955$
 $a_{2331} = 0.464$ $a_{2332} = -0.955$ $a_{2333} = -11.486$
 $a_{3111} = 0.683$ $a_{3112} = 0.254$ $a_{3113} = -0.225$
 $a_{3121} = 0.254$ $a_{3122} = 2.546$ $a_{3123} = 0.464$
 $a_{3131} = -0.225$ $a_{3132} = 0.464$ $a_{3133} = 5.581$
 $a_{3211} = -1.406$ $a_{3212} = -0.523$ $a_{3213} = 0.464$
 $a_{3221} = -0.523$ $a_{3222} = -5.239$ $a_{3223} = -0.955$
 $a_{3231} = 0.464$ $a_{3232} = -0.955$ $a_{3233} = -11.486$
 $a_{3321} = -16.916$ $a_{3312} = -6.292$ $a_{3313} = 5.581$
 $a_{3321} = -6.292$ $a_{3322} = -63.028$ $a_{3323} = -11.486$
 $a_{3331} = 5.581$ $a_{3332} = -11.486$ $a_{3333} = -138.174$

위의 계수 a_{nmpq} 를 얻으려면 Nayfeh 등⁽⁵⁾의 계수에다가 $\nu=1/4$ 를 곱해야한다.

부록 A

· 계수 γ_{nj} 와 q_k 의 값

$$\gamma_{nj} = \gamma_{jn} = \begin{cases} 2(2a_{njnj} + a_{nnjj}) & n \neq j \text{ 일 때} \\ 3a_{nnnn} & n = j \text{ 일 때} \end{cases}$$

- $q_1 = 3a_{1111} = -6.212$
 $q_2 = 4a_{1212} + 2a_{1122} = -16.578$
 $q_3 = 2a_{1121} + a_{1112} = -2.311$
 $q_4 = 3a_{2222} = -86.252$
 $q_5 = 4a_{2121} + 2a_{1122} = -16.578$
 $q_6 = a_{2111} = -0.770$
 $q_7 = 2a_{1223} + a_{1322} = 1.499$
 $q_8 = 4a_{2123} + 2a_{2231} = 2.999$
 $q_9 = a_{3122} + 2a_{3212} = 1.499$
 $q_{10} = 4a_{1313} + 2a_{1133} = -34.733$
 $q_{11} = 4a_{2323} + 2a_{2233} = -129.876$
 $q_{12} = 4a_{3131} + 2a_{3311} = -34.733$
 $q_{13} = 4a_{3232} + 2a_{3322} = -129.876$
 $q_{14} = 3a_{3333} = -414.521$
 $a_{1111} = -2.071$ $a_{1112} = -0.770$ $a_{1113} = 0.683$
 $a_{1121} = -0.770$ $a_{1122} = -7.716$ $a_{1123} = -1.406$
 $a_{1131} = 0.683$ $a_{1132} = -1.406$ $a_{1133} = -16.916$

부록 B

· 안정성 해석

경우 I, $\Omega \approx \omega_1$ ($s=1$) 일 때

식(16)을 식(15)에 대입하면 진폭 a_n 과 위상 μ_n 에 대한 연립 자율 상미분 방정식(a system of autonomous ordinary differential equations)을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$a_1' = -c_1 a_1 + \frac{1}{8\omega_1} (q_3 a_1^2 a_2 \sin \mu_1 + q_7 a_2^2 a_3 \sin \mu_3) + \frac{1}{2\omega_1} F_1 \sin \mu_2 = 0 \tag{B.1a}$$

$$a_2' = -c_2 a_2 - \frac{1}{8\omega_2} (q_6 a_1^3 a_2 \sin \mu_1 - q_8 a_1 a_2 a_3 \sin \mu_3) \tag{B.1b}$$

$$a_3' = -c_3 a_3 - \frac{1}{8\omega_3} q_9 a_1 a_2^2 \sin \mu_3 \tag{B.1c}$$

$$\begin{aligned} \mu_1' = & 3\omega_1\sigma_{12} + \frac{3}{8\omega_1 a_1} (q_1 a_1^3 + q_2 a_1 a_2^2 \\ & + q_3 a_1^2 a_2 \cos \mu_1 + q_7 a_2^2 a_3 \cos \mu_3 + q_{10} a_1 a_3^2) \\ & + \frac{3}{2\omega_1 a_1} F_1 \cos \mu_2 - \frac{1}{8\omega_2 a_2} (q_4 a_2^3 + q_5 a_1^2 a_2 \\ & + q_6 a_1^3 \cos \mu_1 + q_8 a_1 a_2 a_3 \cos \mu_3 + q_{11} a_2 a_3^2) \end{aligned} \quad (\text{B.1d})$$

$$\begin{aligned} \mu_2' = & \omega_1 \sigma_2 + \frac{1}{8\omega_1 a_1} (q_1 a_1^3 + q_2 a_1 a_2^2 + q_3 a_1^2 \cos \mu_1 \\ & + q_7 a_2^2 a_3 \cos \mu_3 + q_{10} a_1 a_3^2) + \frac{1}{2\omega_1 a_1} F_1 \cos \mu_2 \end{aligned} \quad (\text{B.1e})$$

$$\begin{aligned} \mu_3' = & (\omega_1 + 2\omega_2) \sigma_{13} - \frac{1}{8\omega_3 a_3} (q_9 a_1 a_2^2 \cos \mu_3 \\ & + q_{12} a_1^2 a_3 + q_{13} a_2^2 a_3 + q_{14} a_3^3) \\ & + \frac{1}{4\omega_2 a_2} (q_4 a_2^3 + q_5 a_1^2 a_2 \\ & + q_6 a_1^3 \cos \mu_1 + q_8 a_1 a_2 a_3 \cos \mu_3 + q_{11} a_2 a_3^2) \\ & + \frac{1}{8\omega_1 a_1} (q_1 a_1^3 + q_2 a_1 a_2^2 + q_3 a_1^2 a_2 \cos \mu_1 \\ & + q_7 a_2^2 a_3 \cos \mu_3 + q_{10} a_1 a_3^2) + \frac{1}{2\omega_1 a_1} F_1 \cos \mu_2 \end{aligned} \quad (\text{B.1f})$$

정상상태 응답 즉 식(B.1)의 평형해(equilibrium solution)의 안정성을 결정하기 위하여 정상상태로부터의 작은 교란에 대한 거동을 조사한다. 편의를 위해 다음과 같이 둔다.

$$\begin{aligned} a_1 = & a_{10} + \delta a_1, \quad a_2 = a_{20} + \delta a_2, \quad a_3 = a_{30} + \delta a_3 \\ \mu_1 = & \mu_{10} + \delta \mu_1, \quad \mu_2 = \mu_{20} + \delta \mu_2, \quad \mu_3 = \mu_{30} + \delta \mu_3. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

여기서 첨자 0는 정상상태를 나타내고 $\delta(\)$ 는 정상상태로부터의 작은 교란을 나타낸다. 식(B.2)를 (B.1)에 대입하고 δa_1 , δa_2 , δa_3 , $\delta \mu_1$, $\delta \mu_2$, $\delta \mu_3$ 에 대해 전개한후 선형항만을 취하면 다음을 얻게된다.

$$\frac{d}{dT_1} \begin{Bmatrix} \delta a_1 \\ \delta a_2 \\ \delta a_3 \\ \delta \mu_1 \\ \delta \mu_2 \\ \delta \mu_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} & \Phi_{15} & \Phi_{16} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_{24} & \Phi_{25} & \Phi_{26} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & \Phi_{34} & \Phi_{35} & \Phi_{36} \\ \Phi_{41} & \Phi_{42} & \Phi_{43} & \Phi_{44} & \Phi_{45} & \Phi_{46} \\ \Phi_{51} & \Phi_{52} & \Phi_{53} & \Phi_{54} & \Phi_{55} & \Phi_{56} \\ \Phi_{61} & \Phi_{62} & \Phi_{63} & \Phi_{64} & \Phi_{65} & \Phi_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta a_1 \\ \delta a_2 \\ \delta a_3 \\ \delta \mu_1 \\ \delta \mu_2 \\ \delta \mu_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

여기서

$$\begin{aligned} \Phi_{11} = & \omega_1 c_1 - 1/4 q_3 a_{10} a_{20} \sin \mu_{10}, \\ \Phi_{12} = & -1/8 (q_3 a_{10}^2 \sin \mu_{10} + 2q_7 a_{20} a_{30} \sin \mu_{30}), \\ \Phi_{13} = & -1/8 q_7 a_{20} \sin \mu_{30}, \\ \Phi_{14} = & -1/8 q_3 a_{10}^2 a_{20} \cos \mu_{10}, \\ \Phi_{15} = & -1/2 F_1 \cos \mu_{20}, \\ \Phi_{16} = & -1/8 q_7 a_{20}^2 a_{30} \cos \mu_{30}, \\ \Phi_{21} = & \omega_1^2 \sigma_2 + 1/8 (3q_1 a_{10}^2 + q_2 a_{20}^2 + q_{10} a_{30}^2 \\ & + 2q_3 a_{10} a_{20} \cos \mu_{10}), \\ \Phi_{22} = & 1/8 (2q_2 a_{10} a_{20} + q_3 a_{10}^2 \cos \mu_{30} \\ & + 2q_7 a_{20} a_{30} \cos \mu_{30}), \\ \Phi_{23} = & 1/8 (2q_{10} a_{10} a_{30} + q_7 a_{20}^2 \cos \mu_{30}), \\ \Phi_{24} = & -1/8 q_3 a_{10}^2 a_{20} \sin \mu_{10}, \\ \Phi_{25} = & -1/2 F_1 \sin \mu_{20}, \\ \Phi_{26} = & -1/8 q_7 a_{20}^2 a_{30} \sin \mu_{30}, \\ \Phi_{31} = & 1/8 q_7 a_{20}^2 a_{30} \sin \mu_{10} - q_8 a_{20} a_{30} \sin \mu_{30}), \\ \Phi_{32} = & \omega_2 c_2 - 1/8 q_8 a_{10} a_{30} \sin \mu_{30}, \\ \Phi_{33} = & -1/8 q_8 a_{10} a_{20} \sin \mu_{30}, \\ \Phi_{34} = & 1/8 q_6 a_{10}^3 \cos \mu_{10}, \\ \Phi_{35} = & 0, \\ \Phi_{36} = & -1/8 q_8 a_{10} a_{20} a_{30} \cos \mu_{30}, \\ \Phi_{41} = & 1/8 (2q_5 a_{20} a_{10} + 3q_6 a_{10}^2 \cos \mu_{10} \\ & + q_8 a_{20} a_{30} \cos \mu_{30}), \\ \Phi_{42} = & 3\omega_2 \omega_1 (\sigma_2 - \sigma_{12}) + 1/8 (q_5 a_{10}^2 + 3q_4 a_{20}^2 \\ & + q_{11} a_{30}^2 + q_8 a_{10} a_{30} \cos \mu_{30}), \\ \Phi_{43} = & 1/8 (2q_{11} a_{20} a_{30} + q_8 a_{10} a_{20} \cos \mu_{30}), \\ \Phi_{44} = & -1/8 q_6 a_{10}^3 \sin \mu_{10}, \\ \Phi_{45} = & 0, \\ \Phi_{46} = & -1/8 q_8 a_{10} a_{20} a_{30} \sin \mu_{30}, \\ \Phi_{51} = & 1/8 q_9 a_{20}^2 \sin \mu_{30}, \\ \Phi_{52} = & 1/4 q_9 a_{10} a_{20} \sin \mu_{30}, \\ \Phi_{53} = & \omega_3 c_3, \\ \Phi_{54} = & 0, \\ \Phi_{55} = & 0, \\ \Phi_{56} = & 1/8 q_9 a_{10} a_{20}^2 \cos \mu_{30}, \\ \Phi_{61} = & 1/8 (2q_{12} a_{30} a_{10} + q_9 a_{20}^2 \cos \mu_{30}), \\ \Phi_{62} = & 1/8 (2q_{13} a_{30} a_{20} + 2q_9 a_{10} a_{20} \cos \mu_{30}), \\ \Phi_{63} = & \omega_3 \omega_1 (7\sigma_2 - 6\sigma_{12} - (\omega_1 + 2\omega_2) \sigma_{13} / \omega_1) \\ & + 1/8 (q_{12} a_{10}^2 + q_{13} a_{20}^2 + 3q_{14} a_{30}^2), \\ \Phi_{64} = & 0, \\ \Phi_{65} = & 0, \\ \Phi_{66} = & -1/8 q_9 a_{10} a_{20}^2 \sin \mu_{30} \end{aligned}$$

식 (B.3)의 행렬의 모든 고유치의 실수부가 음이면 정상상태해가 점근적으로 안정하다고 간주한다.

경우 II, $\Omega \approx \omega_2 (s=2)$ 일 때

경우 I 에서와 마찬가지로 진폭과 위상에 대한 연립 자유풀 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$a_1' = -c_1 a_1 + \frac{1}{8\omega_1} (q_3 a_1^2 a_2 \sin \mu_1 + q_7 a_2^2 a_3 \sin \mu_3) \quad (\text{B.4a})$$

$$a_2' = -c_2 a_2 - \frac{1}{8\omega_2} (q_6 a_1^3 \sin \mu_1 - q_8 a_1 a_2 a_3 \sin \mu_3) + \frac{1}{2\omega_2} F_2 \sin \mu_2 \quad (\text{B.4b})$$

$$a_3' = -c_3 a_3 - \frac{1}{8\omega_3} q_9 a_1 a_2^2 \sin \mu_3 \quad (\text{B.4c})$$

$$\begin{aligned} \mu_1' = & 3\omega_1 \sigma_{12} + \frac{3}{8\omega_1 a_1} (q_1 a_1^3 + q_2 a_1 a_2^2 + q_3 a_1^2 a_2 \cos \mu_1 \\ & + q_7 a_2^2 a_3 \cos \mu_3 + q_{10} a_1 a_3^2) - \frac{1}{8\omega_2 a_2} (q_4 a_2^3 \\ & + q_5 a_1^2 a_2 + q_6 a_1^3 \cos \mu_1 + q_8 a_1 a_2 a_3 \cos \mu_3 \\ & + q_{11} a_2 a_3^2) - \frac{1}{2\omega_2 a_2} F_2 \cos \mu_2 \quad (\text{B.4d}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_2' = & \omega_2 \sigma_2 + \frac{1}{8\omega_2 a_2} (q_4 a_2^3 + q_5 a_1^2 a_2 + q_6 a_1^3 \cos \mu_1 \\ & + q_8 a_1 a_2 a_3 \cos \mu_3 + q_{11} a_2 a_3^2) + \frac{1}{2\omega_2 a_2} F_2 \cos \mu_2 \quad (\text{B.4e}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_3' = & (\omega_1 + 2\omega_2) \sigma_{13} - \frac{1}{8\omega_3 a_3} (q_9 a_1 a_2^2 \cos \mu_3 + q_{12} a_1^2 a_3 \\ & + q_{13} a_3 a_2^2 + q_{14} a_3^3) + \frac{1}{4\omega_2 a_2} (q_4 a_2^3 + q_5 a_1^2 a_2 \\ & + q_6 a_1^3 \cos \mu_1 + q_8 a_1 a_2 a_3 \cos \mu_3 + q_{11} a_2 a_3^2) \\ & + \frac{1}{8\omega_1 a_1} (q_1 a_1^3 + q_2 a_1 a_2^2 + q_3 a_1^2 a_2 \cos \mu_1 \\ & + q_7 a_2^2 a_3 \cos \mu_3 + q_{10} a_1 a_3^2) \quad (\text{B.4f}) \end{aligned}$$

경우 I 에서와 마찬가지로 식 (B. 3) 을 유도하면 계수행렬은 다음과 같다.

$$\Phi_{11} = \omega_1 c_1 - 1/4 q_3 a_{10} a_{20} \sin \mu_{10},$$

$$\Phi_{12} = -1/8 (q_3 a_{10}^2 \sin \mu_{10} + 2 q_7 a_{20} a_{30} \sin \mu_{30}),$$

$$\Phi_{13} = -1/8 q_7 a_{20}^2 \sin \mu_{30},$$

$$\Phi_{14} = -1/8 q_3 a_{10}^2 a_{20} \cos \mu_{10},$$

$$\Phi_{15} = 0,$$

$$\Phi_{16} = -1/8 q_7 a_{20}^2 a_{30} \cos \mu_{30},$$

$$\begin{aligned} \Phi_{21} = & \omega_1 (3\omega_1 \sigma_{12} + \omega_2 \sigma_2) + 3/8 (3q_1 a_{10}^2 + q_2 a_{20}^2 \\ & + q_{10} a_3^2 + 2q_3 a_{10} a_{20} \cos \mu_{10}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{22} = & 3/8 (2q_2 a_{10} a_{20} + q_3 a_{10}^2 \cos \mu_{10} \\ & + 2q_7 a_{20} a_{30} \cos \mu_{30}), \end{aligned}$$

$$\Phi_{23} = 3/8 (2q_{10} a_{10} a_{30} + q_7 a_{20}^2 \cos \mu_{30}),$$

$$\Phi_{24} = -3/8 q_3 a_{10}^2 a_{20} \sin \mu_{10},$$

$$\Phi_{25} = 0,$$

$$\Phi_{26} = -3/8 q_7 a_{20}^2 a_{30} \sin \mu_{30},$$

$$\Phi_{31} = 1/8 (3q_6 a_{10}^2 \sin \mu_{10} - q_8 a_{20} a_{30} \sin \mu_{30}),$$

$$\Phi_{32} = \omega_2 c_2 - 1/8 q_8 a_{10} a_{30} \sin \mu_{30},$$

$$\Phi_{33} = -1/8 q_8 a_{10} a_{20} \sin \mu_{30},$$

$$\Phi_{34} = 1/8 q_6 a_{10}^3 \cos \mu_{10},$$

$$\Phi_{35} = -1/2 F_2 \cos \mu_2,$$

$$\Phi_{36} = -1/8 q_8 a_{10} a_{20} a_{30} \cos \mu_{30},$$

$$\begin{aligned} \Phi_{41} = & -1/8 (2q_5 a_{10} a_{20} + 3q_6 a_{10}^2 \cos \mu_{10} \\ & + q_8 a_{20} a_{30} \cos \mu_{30}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{42} = & \omega_2^2 \sigma_2 + 1/8 (q_5 a_{10}^2 + 3q_4 a_{20}^2 + q_{11} a_{30}^2 \\ & + q_8 a_{10} a_{30} \cos \mu_{30}), \end{aligned}$$

$$\Phi_{43} = 1/8 (2q_{11} a_{20} a_{30} + q_8 a_{10} a_{20} \cos \mu_{30}),$$

$$\Phi_{44} = -1/8 q_6 a_{10}^3 \sin \mu_{10},$$

$$\Phi_{45} = -1/2 F_2 \sin \mu_2,$$

$$\Phi_{46} = -1/8 q_8 a_{10} a_{20} a_{30} \sin \mu_{30},$$

$$\Phi_{51} = 1/8 q_9 a_{20}^2 \sin \mu_{30},$$

$$\Phi_{52} = 1/4 q_9 a_{10} a_{20} \sin \mu_{30},$$

$$\Phi_{53} = \omega_3 c_3,$$

$$\Phi_{54} = 0,$$

$$\Phi_{55} = 0,$$

$$\Phi_{56} = 1/8 q_9 a_{10} a_{20}^2 \cos \mu_{30},$$

$$\Phi_{61} = 3/8 (2q_{12} a_{10} a_{30} + q_9 a_{20}^2 \cos \mu_{30}),$$

$$\Phi_{62} = 3/8 (2q_{13} a_{20} a_{30} + 2q_9 a_{10} a_{20} \cos \mu_{30}),$$

$$\begin{aligned} \Phi_{63} = & \omega_3 (7\omega_2 \sigma_2 + 3\omega_1 \sigma_{12} - 3(\omega_1 + 2\omega_2) \sigma_{13}) \\ & + 3/8 (q_{12} a_{10}^2 + q_{13} a_{20}^2 + 3q_{14} a_{30}^2), \end{aligned}$$

$$\Phi_{64} = 0,$$

$$\Phi_{65} = 0,$$

$$\Phi_{66} = -3/8 q_9 a_{10} a_{20}^2 \sin \mu_{30}$$