大韓機械學會論文集 第15卷 第6號, pp. 2037~2047, 1991.

〈論 文〉

결손확률모델에 의한 파손확률 해석에 관한 연구

김 철* · 신효철**

(1991년 8월 30일 접수)

A Study on the Analysis of the Failure Probability Based on the Concept of Loss Probability

Chul Kim, Hyo-Chol Sin

Key Words: Weibull Modulus(Weibull 계수), Probability Density(확률밀도), Loss Probabili(결손확률), Probability of Failure(파손확률), Critical Stress Intensity Factor(계 응력확대계수), Scaling Parameter(치수 매개변수), FEM(유한요소법)

Abstract

Strength is not simply a single given value but rather is a statistical one with certain distribution funtions. This is because it is affected by many unknown factors such as size, shape, stress distribution, and combined stresses. In this study, a model of loss probability is proposed in view of the fact that one of the fundamental configuration of nature is hexagonal, for example, the shapes of lattice unit, grain, and so on. The model uses the concept of loss of certain element in place of Jayatilaka-Trustrum's length and angle of cracks. Using this model, the loss probability due to each loss of certain elements is obtained. Then, the maximum principal stress is calculated by the finite elemnt method at the centroid of the elements under the tensile load for the 4,095 models of analysis. Finally, the failure probability of the brittle materials is obtained by multiplying the loss probability by the ratio of the maximum principal stress to theoretical tensile strength. Comparison of the result of the Jayatilaka-Trustrum's model and the proposed model shows that the failure probabilities by the two methods are in good agreement. Futher, it is shown that the parametric relationship of semi-crack lengths for various degrees of birittleness can be determined. Threfore, the analysis of the failure probability using the proposed model is shown to be promising as a new method for the study of the failure probability of birttle materials.

기호설명

a	: 반 균열길이
c	: 치수 매개변수
$f(a)$	: 균열길이의 확률밀도함수
F_k	: K개의 부재가 동시에 결손될 확률
F_{Nk}	: K개의 부재가 결손될 경우에서 각각의 결손확률
F,P	: 결손확률, 파손확률
K_{IC}	: Model I 에서 임계 응력확대계수
$L(\beta,\nu)$	: 하중에 대한 균열의 방향과 Poisson's Ratio의 함수
m	: Weibull Modulus
N_K	: K개의 부재가 결손되는 경우의 수
n	: 확률밀도함수 $f(a)$가 0이 되는 비율
$P_{k,i}$	: K개의 부재가 결손된 경우에서 각각의 파손확률

*정회원, 국민대학교 공과대학 기계설계학과
**정회원, 서울대학교 공과대학 기계설계학과

P_k : K개의 부재가 결손된 경우의 파손확률
R_i : 이론극한강도와 최대주응력과의 비
u : 균열길이에 대한 치수 매개변수
β : 하중에 대한 균열의 방향
σ : 응력, 강도
σ_I : Mode I에서의 파괴응력
σ_{th} : 이론극한강도
$\bar{\sigma}$: 평균강도

1. 서 론

응력을 받는 체적내 어떤 점에서 극한강도에 도달하면 파손이 일어난다는 것은 재료파손의 고전적 이론이다. 그러나 어떤 한 점에서의 응력상태로 부터 파손을 예측할 수 있다는 가설은 많은 관찰을 통하여 불일치함을 보여주고 있기에 이 가설의 타당성은 오랫동안 의문을 가지고 있었다.

같은 시편들로 인장시험을 반복해 보면 특히 취성재료에서는 극한강도가 산재된다는 것을 알 수 있는데 이것은 많은 미지인자에 기인한다. 이 산재부분은 무시될 때도 있지만 모든 실제재료에서 본질적인 성질의 구성요소가 된다. 그러므로 강도란 단순한 수치가 아니라 통계적 분산함수로 정의되는 통계적 양이라 할 수 있다. 통계적 방법을 기초로 한 파손확률에 관한 연구는 Weibull해석[1]과 Jayatilaka-Trustrum 해석법[2,3]이 있다. Weibull은 많은 통계적인 자연현상을 기초로 하여 경험식을 미지함수에 적용하여 파손 확률을 구하였으며, Jayatilaka와 Trustrum은 결함크기 분포와 경사균열을 파괴시키는 응력을 기초로 하여 취성재료의 파손확률을 연구하였다.

그러나 Weibull의 파손확률 해석에서는 재료 내부결함을 고려하지 않은 상태에서 미지함수를 경험식으로 표현하여 실험에 의하여 Weibull Modulus를 결정하는 바 이것은 실제재료의 관련된 미시 또는 거시적인 양은 아니다. 한편, Jayatilaka-Trustrum은 취성재료 내부의 임의균열 존재하에서 균열길이, 하중에 대한 균열의 방향을 확률밀도함수로 표현하였으며 하중에 대한 균열방향 0°~90°에 대해 해석하여 확률밀도함수를 표현할 수 있었다. 그러나 균열길이에 대한 확률밀도함수는 균열방향의 경우와는 달리, 용이하게 결정되지 못하므로 균열길이에 대한 치수 매개변수를 도입해야 하며, 또한 여러가지 취성정도에 따른 균열길이에 대한 치수 매개변수들간의 관계를 결정할 수 없다. 그러므로 이들 문제를 해결할 수 있는 새로운 파손확률모델이 필요하다.

본 연구에서는 재료 결정격자의 기본단위나 결정립의 형상등 가장 기본적인 형태가 6각형[4,5]이라는 점에 착안하여 취성재료의 파손모델로 부재들의 결손을 이용하는 결손확률모델을 제안하여 부재결손에 따른 각각의 파손 해석모델과 결손확률을 구한다. 그리고 비결손모델에서 구한 기본인장하중을 기초로 하여 해석하고자 하는 하중하에서 각각의 파손해석모델을 모델링하여 유한요소법으로 부재결손에 따른 요소중심에서의 최대주응력을 구하여 이론극한인장강도와의 비와 결손확률로 취성재료의 파손확률을 구한다. 또한 취성정도에 따른 균열길이에 대한 치수 매개변수를 구함으로써 재료강도 연구에 기초가 되게 한다.

2. 기존 파손확률 해석

강도를 결정하기 위하여 널리 사용되는 통계적 방법중 하나인 Weibull해석[1]에서의 가정은 첫째 재료가 등방성이며 통계적으로 균일하다는 것 즉, 재료의 임의 미소체적내에서 주어진 가혹한 정도의 결함을 발견할 확률이 전체체적에서도 동일하다는 것이며, 두번째 가정은 재료를 링크의 일렬연속으로 보고 파손을 최대 취약링크의 개념으로 본다는 것이다. 즉 임의결함에서의 파손이 전체파손을 일으킨다는 가정이다.

N개의 결함을 N개의 링크로 표현하여 응력 σ에 의한 파손확률식은

$$F_N(\sigma)=1-[1-F_1(\sigma)]^N \tag{1}$$

이다. 링크의 갯수 N은 체적 V에 비례하며, 측정을 통한 경험식을 이용하여 단순 단축인장하에서 파손확률식은

$$P_f=1-exp\left[-V\left(\frac{\sigma-\sigma_u}{\sigma_o}\right)^m\right], \quad \sigma>\sigma_u \tag{2}$$

$$P_f=0 \qquad \sigma\le\sigma_u \tag{3}$$

이 된다.

여기서 σ_u는 하중을 가할때, 파손확률이 0을 유지할 때의 최대응력인데 취성재료에서는 $\sigma_u=0$이다. σ_o는 표준인자이며, m은 Weibull modulus라

부르며 재료특성상수이다. 이 m의 물리적 의미는 이 값이 작을수록 재료가 취성인 것이다.

취성재료에서는 $\sigma_u=0$이므로 식 (2)를 이용하여 평균강도는

$$\bar{\sigma}=\int_0^{\infty} exp\left[-\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m V\right]d\sigma \tag{4}$$

$$=\frac{\sigma}{V^{-1/m}}\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right) \tag{5}$$

의 결과를 얻을 수 있다.

그리고 Jayatilaka와 Trustrum[2,3]은 취성재료에서 인장하중에 의한 파손 확률식을 결함크기 분포와 하중에 대한 균열의 방향성을 기초로 하여 만들었다.

$L(\beta, \nu)$는 하중에 대한 균열의 방향과 Poisson's Ratio의 함수이며, $f(a)$를 균열길이 $(a\geq 0)$의 확률밀도함수로 하고 균열각도 $\beta(0\leq\beta\leq\pi/2)$의 확률밀도를 $2/\pi$로 한다. 한개의 균열에서 응력 σ에 대한 파손확률은

$$F(\sigma)=\iint\frac{2}{\pi}f(a)\,da d\beta \tag{6}$$

$$\frac{L(\beta,\nu)}{a}\leq\sigma^2,\ 0\leq\beta\leq\frac{\pi}{2}$$

이다.

Poloniecki와 Wilshaw[6]는 균열길이의 확률밀도함수 $f(a)$를 다음 식으로 제안하였다.

$$f(a)=\frac{c^{n-1}}{(n-2)\,!}a^{-n}e^{-c/a} \tag{7}$$

여기서 c는 치수 매개변수이고 n은 확률밀도가 0이 되는 비율이다. 식(7)을 식(6)에 대입하면 한개의 균열에서의 파손확률식인

$$F(\sigma)=\iint\frac{2}{\pi}\cdot\frac{c^{n-1}a^{-n}e^{-c/a}}{(n-2)\,!}da d\beta \tag{8}$$

$$\frac{K_{IC}^2}{2\beta a}\leq\sigma^2,\ 0\leq\beta\leq\frac{\pi}{2}$$

를 구할수 있다. 여기서 K_{IC}는 임계 응력확대계수이며, 적분의 상하한을 대입하여 한번 적분하면 파손확률은

$$F(\sigma)=\int_{K^2Ic/(\pi\sigma^2)}^{\infty}\left[1-\frac{K_{IC}^2}{\pi a\sigma^2}\right]\frac{c^{n-1}a^{-n}e^{-c/a}}{(n-2)\,!}da \tag{9}$$

가 되며 식(9)에서의 n과 Weibull Modulus m은 $m=2n-2$의 관계를 가진다. N개의 크랙에서의 파손확률은

$$F_f=1-[1-F(\sigma)]^N \tag{10}$$

으로 구할 수 있다.

Weibull해석에서는 많은 자연현상으로부터 미지함수를 경험식으로 표현하여 표준인자와 Weibull Modulus를 실험에 의해 결정한 다음 결정된 표준인자와 Weibull Modulus하에서 하중에 대한 취성재료의 파손확률을 해석하였는데 Weibull Modulus는 재료특성에 관련된 매개변수이지만 실제재료의 미시 또는 거시적 구조에 관련된 양은 아니다. Jayatilaka-Trustrum해석은 한개의 크랙이 있다는 가정하에서 균열크기와 하중에 대한 균열방향을 확률밀도함수로 표현함으로써 내부결함의 존재의미를 부여하여 파손확률을 해석하였지만 취성정도에 따른 균열길이에 대한 치수 매개변수를 해석적으로 구할 수 없다. 그러므로 이들 문제를 해결하기 위한 파손확률 해석의 모델이 필요하다.

3. 결손확률모델에 의한 파손확률 해석

앞에서 언급한 바와 같이 Weibull Modulus는 재료특성에 관련된 양이 아니고, Jayatilaka-Trustrum파손확률식은 여러가지 취성정도에 따른 균열길이에 대한 치수 매개변수를 결정할 수 없다.

Weibull은 재료를 일렬링크로 보고 최대 취약링크개념을 도입하였으나, 본 연구에서는 재료 결정격자의 기본단위나 결정립의 형상등 가장 기본적인 형태가 6각형이라는 점에 착안[4,5]하여, 재료를 Fig. 1과 같은 구조로 가정한다. 그리고 균열크기와 방향에 대한 확률밀도로 대치한 Fig. 1의 한 조합인 Fig.2를 부재들의 결손을 이용하는 결손확률모델로 하여, 파손확률 해석에 있어서 평면응력문제의 파손모델로 한다. 이 파손모델을 해석하는데 편리를 위하여 Fig. 3과 같은 기초모델을 도입한다.

이 모델에서 각각 부재들이 결손되는 확률은 같다고 가정하고, 한개의 부재가 결손될 확률을 F_1이라 하면 K개의 부재가 동시에 결손될 확률은

$$F_k=F_1^k,\ k=2, 3, 4.....12 \tag{11}$$

가 된다. 그리고 이들의 합을

$$\sum_{k=1}^{12}F_k=1 \tag{12}$$

로 놓고 Bisection Method[7]을 이용하여 각각의

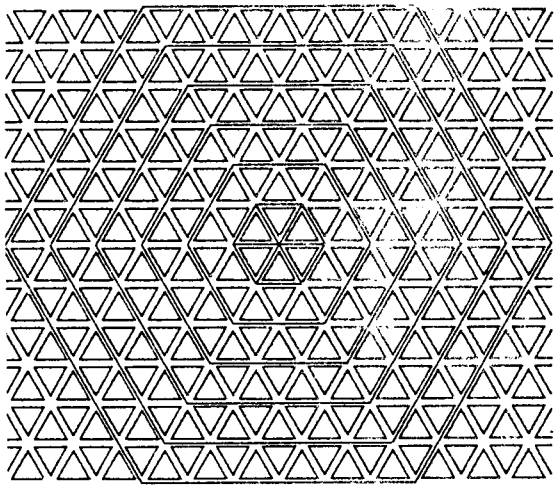

Fig. 1 A structure assumed for the analysis of failure probability

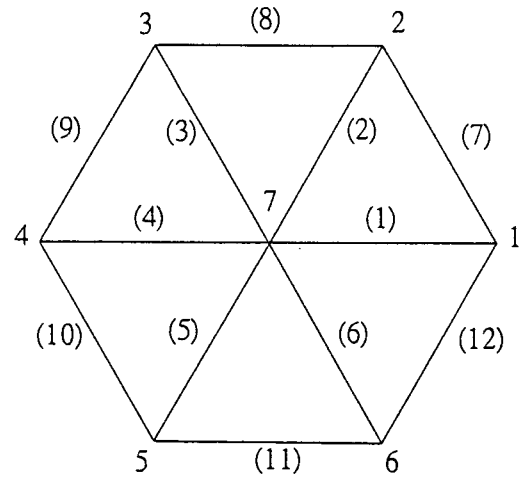

Fig. 3 A fundamental model for the statistical method

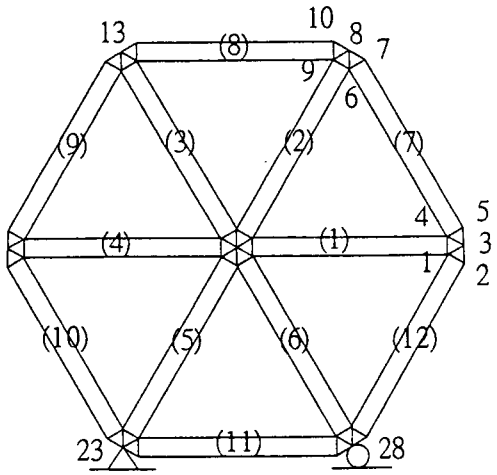

Fig. 2 A failure model based on the concept of loss probability

결손확률을 구하여 Table 1에 수록하였다.

12개의 부재중 K개의 부재가 결손될 경우의 수는

$$N_k={}_{12}C_k,\quad k=1, 2, 3, \ldots\ldots 12 \tag{13}$$

이들의 합은

$$\sum_{k=1}^{12}{}_{12}C_k=4095 \tag{14}$$

이다.

그러므로 K개의 부재가 결손될 각각의 경우에서 결손확률은

Table 1 Probability vs. number of loss elements K

K	Probability
1	5.00061132×10^{-1}
2	2.50061136×10^{-1}
3	1.25045855×10^{-1}
4	6.25305717×10^{-2}
5	3.12691085×10^{-2}
6	1.56364658×10^{-2}
7	7.81918879×10^{-3}
8	3.91007240×10^{-3}
9	1.95527523×10^{-3}
10	9.77757146×10^{-4}
11	4.88938346×10^{-4}
12	2.44499063×10^{-4}
	1.00000000×10^{0}

$$F_{Nk}=\frac{F_k}{N_k},\quad k=1, 2, 3\ldots12 \tag{15}$$

이며 계산결과를 Table 2에 수록하였다.

비결손모델에서 최대주응력이 1이 되도록 하는 인장하중을 기본하중으로 하여 해석하고자 하는 인

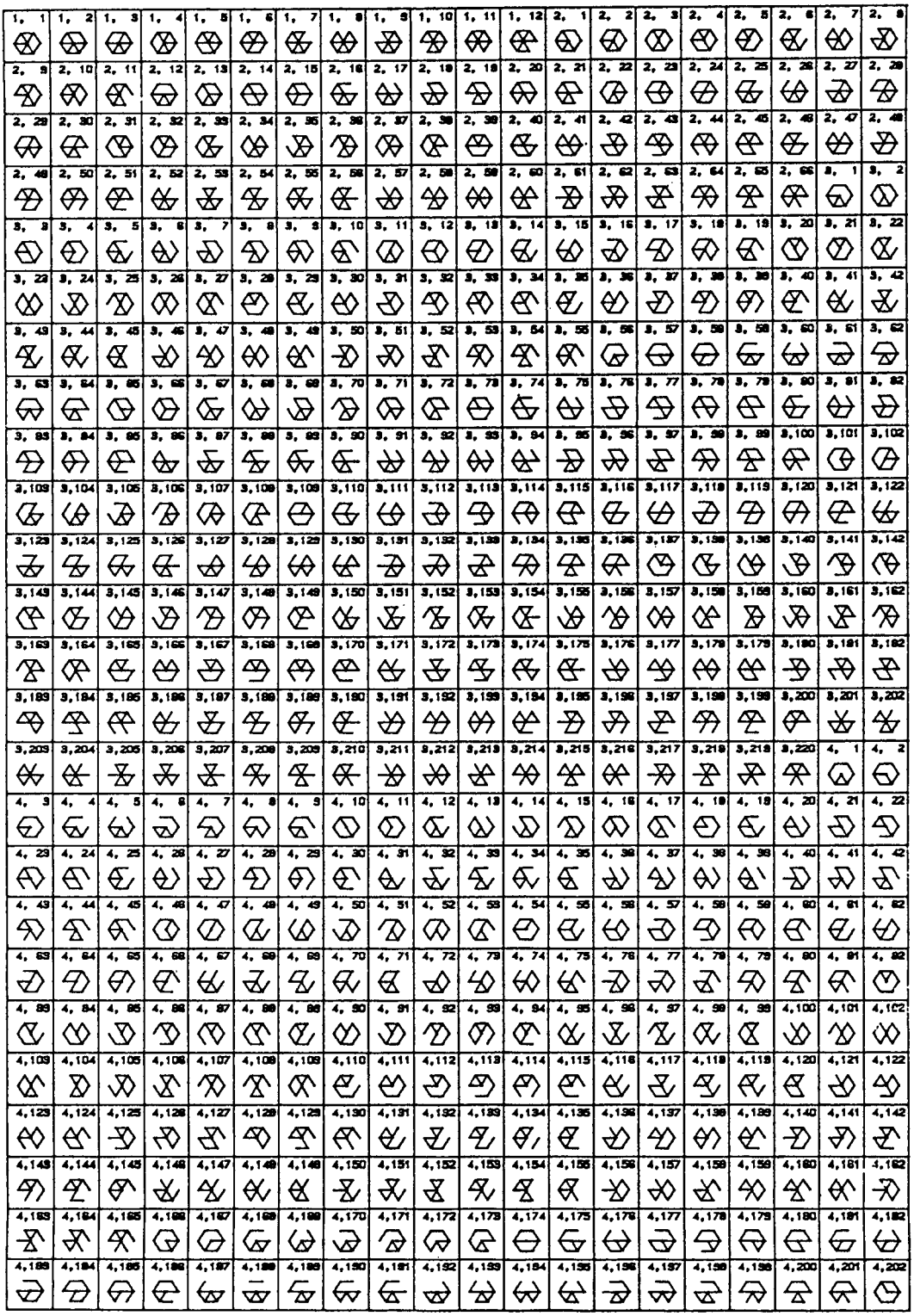

Fig. 4 Analysis models in the present study [(1.1)-(4.202)]

Table 2 Probability for each individual loss element

K	$N_k(={}_{12}C_k)$	Individual Probabilaity
1	12	4.16717610×10^{-2}
2	66	3.78880509×10^{-3}
3	220	5.68390249×10^{-4}
4	495	1.26324387×10^{-4}
5	792	3.94811976×10^{-5}
6	924	1.69225820×10^{-5}
7	792	9.87271312×10^{-6}
8	495	7.89913616×10^{-6}
9	220	8.88761469×10^{-6}
10	66	1.48145022×10^{-5}
11	12	4.07448621×10^{-5}
12	1	2.44499063×10^{-4}
	4095	

장하중하에서 부재결손에 따른 요소중심에서의 최대주응력을 유한요소법으로 구하기 위하여 부재결손에 따른 4095개의 파손 해석모델을 Fig. 4와 만든다.

재료강도학에서 이론 극한인장강도의 평균값을

$$\sigma_{th}=\frac{E}{10} \tag{16}$$

로 가정하며[8], 재료의 이론 극한인장강도와 결손확률모델의 기본 12요소 내에서 요소중심의 최대주응력과의 비는

$$R_i=\frac{\sigma_{max,i}}{\sigma_{th}},\quad \sigma_{max}\le\sigma_{th}\quad i=1,2,3.....N_k \tag{17}$$

$$R_i=1,\quad \sigma_{max}>\sigma_{th} \tag{18}$$

이다. 앞에서 언급한 바와 같이 균열길이와 방향에 대한 확률밀도로 대치한 결손확률모델에서, 인장하중하에서 K개의 부재결손중 한 경우의 파손확률을

$$P_{k,i}=F_{Nk}\cdot R_i,\quad k=1,2,3.....12,\quad i=1,2,3.....N_k \tag{19}$$

로 가정한다.

식 (19)로 부터 K개의 부재결손에 의한 파손확률인

$$P_k=\sum_{i=1}^{N_k}P_{k,i} \tag{20}$$

를 구하고 이들 확률의 총합인 파손확률

$$P=\sum_{k=1}^{12}P_k \tag{21}$$

를 구한다.

4. 계 산

4.1 결손확률모델에 의한 해석모델

결손확률모델에 의한 파손확률해석에서 부재결손에 따른 파손확률을 구하기 위하여 36개의 요소와 37개의 절점을 갖는 파손모델로 구성하는데 있어서 요소번호와 절점번호를 Fig. 2과 같이 부여한다. 이는 부재결손에 따른 파손해석모델의 절점번호와 요소번호의 재구성에 있어서 프로그램의 규칙성을

Table 3 Loss element numbers (failure probability $=F_{Nk}$)

Case	Number of loss element
1	12 1 2 8
2	7 2 3 9
3	8 3 4 10
4	9 4 5 11
5	10 5 6 12
6	11 6 1 7
7	12 1 2 8 9
8	7 2 3 4 10
9	8 3 4 5 11
10	9 4 5 6 12
11	10 5 6 1 7
12	11 6 1 2 8
13	12 1 2 3 4 10
14	7 2 3 4 5 11
15	8 3 4 5 6 12
16	9 4 5 6 1 7
17	10 5 6 1 2 8
18	11 6 1 2 3 9
19	12 1 2 3 4 5 11
20	7 2 3 4 5 6 12
21	8 3 4 5 6 1 7
22	9 4 5 6 1 2 8
23	10 5 6 1 2 3 9
24	11 6 1 2 3 4 10

위하여 Bandwidth을 고려하지 않았다. 그리고 Table 3에서 보는 바와 같이 부재결손으로 인하여 모델이 완전히 분리되는 경우 즉 예를들면 기초모델에서 부재 1, 2, 8, 12의 결손등은 결손확률을 파손확률로 하고 해석모델을 재구성하지 않는다.

부재결손에 따른 요소와 절점의 재배열을 위하여 기초모델에서 부재 1, 12, 7이 결손되었을때는 기준절점 $NP(1)=$.FALSE., 기준부재 2, 7, 8이 결손되었을때 $NP(2)=$.FALSE., 같은 방법으로 기준부재 6, 11, 12가 결손되었을 때 $NP(6)=$.FALSE., 그리고 기준부재 1, 2, 3, 4, 5, 6 모두 결손되었을때 $NP(7)=$.FALSE.로 놓는다. 기준절점 $NP(5)=$.FALSE. 이면 기준절점 6에서 y축 변위를 구속한다.

파손모델의 절점번호를 헤아리는 변수를 JOLD, 결손에 따른 파손해석모델의 절점번호를 나타내는 변수를 JNEW라 하고 초기치를 1로 둔다. 기초모델의 절점1이 없으면 파손모델 절점 1에서 5까지 없기 때문에 JOLD에 5를 더하고 그렇지 않으면 파손모델의 5개의 절점정보를 그대로 파손해석모델에 적용한다. 같은 방법으로 기초모델의 절점 6의 유무에 따라 수행하며 마지막으로 기초모델의 절점 7이 있으면 파손모델의 나머지 7개의 절점정보를 파손해석 모델에 적용한다.

요소번호의 경우는 파손모델의 요소번호를 헤아리는 변수를 IOLD, 결손에 따른 파손해석모델의 요소번호를 나타내는 변수를 INEW라 놓고 IOLD가 12가 될때까지는 기초모델에서 부재 1이 결손이 되어있지 않다면 파손모델을 파손해석모델에 그대로 적용, 결손되었다면 IOLD에서 1을 추가시켜 나가는 방법으로 부재 12의 결손유무까지 진행시킨다.

기초모델의 절점 1이 존재하면 파손모델의 첫 3요소를 파손해석모델에 그대로 적용시키고 존재하지 않으면 IOLD에 3을 더하는 방법으로 절점 6의 유무까지 진행시킨다. 그리고 기초모델 절점 7이 있으면 파손모델의 나머지 6개의 요소를 파손해석모델에 적용한다.

파손해석모델의 절점과 요소번호는 절차에 따라 수행되었지만 요소를 구성하는 절점들은 파손모델의 절점번호이기 때문에 이 절점번호를 파손해석모델의 절점번호를 바꾸어야 한다. 기초모델의 절점 6이 있으면 그대로, 없으면 구성되어있는 절점번호가 30보다 크면 5를 빼고, 기초모델의 절점 5가 있으면 그대로, 없으면 절점번호가 25보다 크면 5를 뺀다. 같은 방법으로 기초모델 절점 1의 유무까지 수행한다.

4.2 입력하중 및 계산

결손에 따른 파손해석모델에서 재료의 기계적 성질은 취성재료가 갖는 Poisson's Ratio인 0.25로 하고 탄성계수는 $1.0\times10^4 kgf/mm^2$로 선정한다.[8,9]

파손모델에서 파손확률을 구하는데 있어서 기초모델의 부재결손과 파손모델을 맞추기 위하여 요소 1-12의 기계적 성질은 위에서 선정한 값을 따른 것이고 나머지 요소 13-36은 강체요소(1.0×10^{10})로 한다.

파손모델에서 절점23은 y, z축의 변위구속, 절점28은 y축의 변위만 구속하여 절점8과 13에 y축 양의 방향으로 단위인장하중을 주어, 기초모델의 12부재까지 해당하는 파손모델의 요소중심에서 최대주응력값을 구하였다. 이 값의 역수값을 절점8과 13에 부가할 기준 입력하중으로 하며, 4,095개의 해석모델에 적용해야 하므로 유효숫자 9자리까지인 $1.72561214 kgf/mm^2$를 얻었다.

파괴응력을 탄성계수의 1/10인 이론극한강도로 가정하였으므로 이들 관계를 고려하여 파괴응력의 50%~20%까지에 해당되는 이론극한인장강도의 비를 파손해석모델의 입력하중으로 한다. 이들 입력하중을 Table 4에 수록한다.

결손확률모델에 의한 파손확률 해석에서 결손부재 갯수에 따른 결손확률과 각각의 경우의 수로 나눈 결손확률을 Table 1, Table 2와 같이 구한다. Table 3의 경우처럼 완전한 모델부재의 분리 경우는 유한요소법에 의하여 최대주응력을 구하지 않고 결손확률을 파손확률로 사용한다.

각 파손해석모델에서 유한요소법[10]을 이용하여 각 모델에서의 각각의 요소의 중심에서 최대주응력

Table 4 Input loads for the analysis of failure probability

Loading case	Input load (kgf/mm^2)	Remarks
1	862.806070	$(5/10)\,\sigma_{th}$
2	690.244856	$(4/10)\,\sigma_{th}$
3	517.683642	$(3/10)\,\sigma_{th}$
4	345.122428	$(2/10)\,\sigma_{th}$

을 구하고 이들 최대주응력의 최대값과 이값이 작용하는 요소번호를 찾는다. 이 최대주응력 값과 이론 인장극한강도와의 비를 구한다음 앞에서 구한 결손확률을 곱하여 각 경우의 파손확률을 구한다. 각 파손해석모델에서 파손확률을 구한 다음 이들의 총합을 파손확률로 한다.

5. 결과 및 고찰

본 연구의 해석과 계산에 따라 Fig. 5에서 보는 바와 같이 부재결손이 한개 인 경우 최대주응력과 이 값이 작용하는 요소번호를 Table 5에 수록하였다.

Table 5에 수록된 최대주응력과 이론극한강도의 비를 구한다음 결손확률을 곱하여 파손확률을 구하는데, Table 5에서 보는 바와 같이 첫번째 경우인 하중 862.806070kg$f$/mm^{2}하에서 부재 7, 9, 10, 12가 결손된 경우는 최대주응력이 이론극한강도를 초과하므로 최대주응력과 이론한강도의 비(Ri)를 1로 한다.

같은 방법으로 부재결손이 2~12까지 파손확률을 구하여 Table 6에 요약하였다.

Table 6에서 보는 바와 같이 파손확률은 12개의 요소중 한개만 결손이 있을 때는 주어진 하중의 크기에 선형적으로 비례함을 보여주고 있고, 결손요소가 증가함에 따라 파손확률들의 차이가 작아진다. 결손요소가 10개 이상일 경우는 주어진 하중의 크기에 무관하게 같은 값, 즉 결손확률값이 되었다. 이것은 취성재료에서 균열의 길이가 매우 길면 하중과 무관하게 파손이 일어난다는 것을 의미할 수 있다.

Jayatilaka-Trustrum 파손확률식에서 해석적으

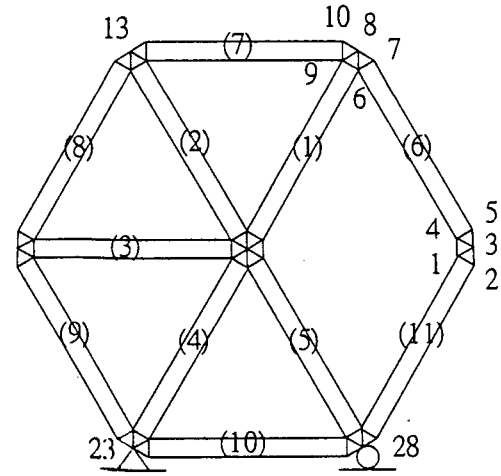

Fig. 5 Analysis model in the present study〔(1, 1)〕

Table 5 Maximum principal stresses in the case of one loss element

Loss element number	Element number for maximum principal stress	Loading case			
		1	2	3	4
1	4	5.35440×10^2	4.28352×10^2	3.21264×10^2	2.14176×10^2
2	2	7.65693×10^2	6.12554×10^2	4.59416×10^2	3.06277×10^2
3	2	7.65693×10^2	6.12554×10^2	4.59416×10^2	3.06277×10^2
4	5	5.35440×10^2	4.28352×10^7	3.21264×10^2	2.14176×10^2
5	5	7.65693×10^2	6.12554×10^2	4.59416×10^2	3.06277×10^2
6	5	7.65693×10^2	6.12554×10^2	4.59416×10^2	3.06277×10^2
7	2	$1.11628\times10^{3*}$	8.93023×10^2	6.69767×10^2	4.46511×10^2
8	6	4.81647×10^2	3.85318×10^2	2.88988×10^2	1.92659×10^2
9	3	$1.11628\times10^{3*}$	8.93023×10^2	6.69767×10^2	4.46511×10^2
10	5	$1.11628\times10^{3*}$	8.93023×10^2	6.69767×10^2	4.46511×10^2
11	2	4.81647×10^2	3.85318×10^2	2.88988×10^2	1.92659×10^2
12	6	$1.11628\times10^{3*}$	8.93023×10^2	6.69767×10^2	4.46511×10^2

* $R_i=\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{th}}=1$ for $\sigma_{max}>\sigma_{th}$

Table 6 Probabilities for different loads

K	N_k	Loading Case			
		1	2	3	4
1	12	3.79086×10^{-1}	3.18774×10^{-1}	2.39081×10^{-1}	1.59387×10^{-1}
2	66	2.27252×10^{-1}	1.99028×10^{-1}	1.55491×10^{-1}	1.08712×10^{-1}
3	220	1.21839×10^{-1}	1.11990×10^{-1}	9.27907×10^{-1}	6.92081×10^{-1}
4	495	6.14177×10^{-1}	5.75119×10^{-1}	5.03601×10^{-1}	4.00441×10^{-1}
5	792	3.06785×10^{-1}	2.88533×10^{-1}	2.62883×10^{-1}	2.14828×10^{-1}
6	924	1.54302×10^{-1}	1.46417×10^{-1}	1.37239×10^{-1}	1.16593×10^{-1}
7	792	7.76402×10^{-1}	7.46406×10^{-1}	7.13856×10^{-1}	6.57080×10^{-1}
8	495	3.89483×10^{-1}	3.83732×10^{-1}	3.77457×10^{-1}	3.68650×10^{-1}
9	220	1.95494×10^{-1}	1.95146×10^{-1}	1.94797×10^{-1}	1.94448×10^{-1}
10	66	9.77757×10^{-1}	9.77757×10^{-1}	9.77757×10^{-1}	9.77757×10^{-1}
11	12	4.88938×10^{-1}	4.88938×10^{-1}	4.88938×10^{-1}	4.88938×10^{-1}
12	1	2.44499×10^{-1}	2.44499×10^{-1}	2.44499×10^{-1}	2.44499×10^{-1}
	4095	8.51028×10^{-1}	7.45763×10^{-1}	5.92307×10^{-1}	4.24406×10^{-1}

Table 7 Scaling paramters to the semi-crack length

Load (kgf/mm²)	$n=2(m=2)$		$n=3(m=4)$		$n=4(m=6)$	
	u	x	u	x	u	x
517.683642	8.11146	2.17384	17.7768	4.76412	27.1804	7.28425
345.122428	10.3185	1.22903	25.7218	3.06371	41.0413	4.88841

로 구하지 못하는 균열길이에 대한 치수 매개변수 u를 구하기 위하여, σ_I를 Mode I에서의 파괴 응력이라 하면

$$x=u\left(\frac{\sigma}{\sigma_I}\right)^2,\quad u=\frac{c}{a} \tag{22}$$

에서 파손확률 0.5는 Table 6에서 보는 바와같이 세번째와 네번째의 하중경우 사이에 들어있다. 이들 하중과 식(9)를 이용하여 취성정도인 $n=2,3,4$인 경우 균열길이에 대한 치수 매개변수 u와 이때의 x값을 구하여 Table 7에 표시하였다.

Jayatilaka-Trustrum파손확률식에서 파손확률이 0.5인 경우 식 (22)의 x값은 $x(n=2)=1.59362$, $x(n=3)=3.72358$, $x(n=4)=5.81137$이다. 각각의 n값에서 균열길이에 대한 치수 매개변수를 구하기 위하여 먼저 파손확률 0.5가 되는 하중을 보간법으로 구하여 이 하중과 x값으로 각각의 n에 대하여 균열길이에 대한 치수 매개변수를 구하여 Table 8에 나타내었다.

보간법으로 n값에 따라 구한 파손확률이 0.5가 되는 하중은 약 419kg$f$/mm²이며, 같은 파손확률의 경우 재료가 연성일수록 즉 n값이 증가함에 따라 균열길이에 대한 치수 매개변수는 증가한다.

같은 균열길이에 대한 치수 매개변수일 경우 취성일수록 파손확률이 증가하며 재료가 취성일수록 내부 결함의 분포가 크다는 것을 의미한다.

위에서 구한 균열길이에 대한 치수 매개변수로

Table 8 Loads and scaling parameters to the semi-crack length (failure probanility =0.5)

	$n=2$	$n=3$	$n=4$
Load(kgf/mm²)	418.118369	419.074898	419.344099
$u(=c/a)$	9.11562	21.2020	33.0474

Table 9 Failure probabilities by the Jayatilaka-Trustrum method

Loading case	$n=2(m=2)$		$n=3(m=4)$		$n=4(m=6)$	
	X	P_f	X	P_f	X	P_f
1	6.78598	0.852804	15.7835	0.873286	2.46016	0.878057
2	4.34303	0.772739	10.1014	0.802057	1.57450	0.809465
3	2.44295	0.626232	5.68206	0.652621	8.85658	0.662233
4	1.08576	0.389962	2.52536	0.351444	3.93626	0.331095

Table 10 Comparison of probabilities by the Jayatilaka-Trustrum and the present method

Loading case	$n=2(m=2)$		$n=3(m=4)$		$n=4(m=6)$	
	P_f	Max$\lvert P_f-P\rvert$	P_f	Max$\lvert P_f-P\rvert$	P_f	Max$\lvert P_f-P\rvert$
1	0.852804	0.0018	0.873286	0.0223	0.878057	0.0270
2	0.772739	0.0270	0.802057	0.0563	0.809465	0.0637
3	0.626232	0.0339	0.652621	0.0603	0.662233	0.0699
4	0.389962	0.0344	0.351444	0.0730	0.330195	0.0942

각 n의 값에 따른 x값과 파손확률을 Jayatilaka-Trustrum 해석으로 구하여 Table 9에 수록하였다.

제안한 결손확률모델에서 주어진 하중의 크기에 따른 파손확률 P와 Jayatilaka-Trustrum 해석에서 구한 파손확률 P_f를 비교하여 이 값의 절대오차를 Table 10에 수록하였다.

본 파손해석 연구에서 제안한 결손확률모델에서의 파손확률과 Jayatilaka-Trustrum 해석에서의 파손확률과의 오차는 파손확률이 작을수록 그리고 n값이 증가할수록 커진다. 이것은 파손확률의 개념과 부합한다고 볼 수 있다.

파손확률이 클 경우에는 결손확률모델에서의 파손확률과 Jayatilaka-Trustrum 해석의 파손확률이 비슷하며, 특히 재료가 취성일수록 양 결과가 잘 일치한다고 할 수 있다. 그리고 본 결손확률모델의 해석 결과를 이용하여 취성정도와 파손확률의 관계를 해석하기 위한 변수로서 취성정도에 따른 균열길이에 대한 치수 매개변수 $u_{3/2}=u(n=3)/u(n=2)=2.326$, $u_{4/2}=u(n=4)/u(n=2)=3.625$를 구할 수 있었다.

따라서 본 연구에서 제안한 결손확률모델로 결손확률과 최대주응력을 사용하여 파손확률을 해석하는 것은 파손확률연구의 새로운 방법이라 할 수 있다. 나아가 Fig. 1의 확장된 결손확률모델을 이용하면 더욱 정밀한 파손확률 해석이 가능할 것으로 판단된다.

6. 결 론

취성재료의 파손확률해석에 있어서 재료 결정격자의 기본단위나 결정립 형상등을 기초로하여 임의의 균열의 길이와 하중에 대한 균열각도의 개념에서 12개의 부재로 구성된 결손확률모델을 제안하였다. 인장하중하에서 각 부재결손에 따른 4,095개의 해석모델을 만들어 요소중심에서의 최대주응력을 유한요소법으로 구하며 이들 값과 이론 극한인장강도와의 비 그리고 부재결손에 따른 결손확률로서 파손확률을 구하였다.

인장하중이 극한강도의 0.5, 0.4, 0.3, 0.2인 경우 파손확률은 각각 0.851, 0.746, 0.592, 0.424이며, 보간법을 이용하여 파손확률이 0.5인 경우에서 균열길이에 대한 치수 매개변수를 구할 수 있었고, 취성정도와 파손 확률의 관계를 해석하기 위한 변수로서 기존 파손확률식으로 결정할 수 없는 여러가지 취성정도에 따른 균열길이에 대한 치수 매개변수들간의 관계를 구할 수 있었다.

따라서 본 연구에서 제안된 결손확률모델로 결손확률과 최대주응력을 사용하여 파손확률을 해석하는 것이 취성재료의 파손확률연구에 새로운 방법으

로 이용될 수 있음을 보였다. 보다 정밀한 파손확률해석은 확장된 모델을 이용하면 가능할 것으로 판단된다.

참고문헌

(1) Weibull, W, 1951, "A Statistical Distribution Function of Wide Applicability," J.Appl. Mech., Vol. 18, pp. 293~297.

(2) Jayatilaka,A. De S. and Trustrum, K., 1977, "Statistical Approach to Brittle Fracture," J. Mat. Sci., Vol.12, pp. 1426~1430.

(3) Jayatilaka,A. De S. and Trustrum, K., 1979, "On Estimating the Weibull Modulus for a Brittle Material," J.Mat. Sci., Vol.14.

(4) Kehl., G.L., 1949, "The Principles of Metallographic Labaratory Practice," 3rd Ed., McGraw-Hill, pp.282~293.

(5) ASM., 1972, "Atlas of Microstructures of Industrial Alloys," Metal Handbook, Vol.7,8th Ed.

(6) Poloniecki,J.D. and Wilshaw, T.R., 1971, "Determination of Surface Crack Size Desnities in Glass," Nature Physical Science, Vol.229, pp. 226~227.

(7) James, M.L., Smith, G.M. and Wolford, J.C., 1985, "Applied Numerical Methods for Digital Computation," 3rd Ed., Harper and Row Pub.

(8) McClintock, F.A. and Argon, A.S., 1966, "Mechanical Behavior of Materials," Addison-Wesly Pub.

(9) Jayatilaka, A. De S., 1979, "Fracture of Engineering Brittle Materials," Applied Science Publishers,p.124.

(10) Bathe,K.J. and Wilson,E.L., 1976, "Numerical Methods in Finite Element Analysis," Prentice-Hall Inc.