

## 2층 구조물의 자유진동해석\*

— 전달영향계수법에 의한 정식화 —

문덕홍 · 여동준\*\* · 김원철\*\*\*

부산수산대학교, \*\*여수수산대학, \*\*\*통영수산전문대학

(1991년 11월 10 접수)

## Free Vibration Analysis of a Two-Layered Structure\*

— Formulation by the Transfer Influence Coefficient Method —

Deok-Hong Moon, Dong-Jun Yeo\*\* and Won-Cheol Kim\*\*\*

National Fisheries University of Pusan, \*\*Yosu National Fisheries college

\*\*\*National Tongyeong Fisheries Junior College

(Received November 10, 1991)

This paper describes the general formulation for the in-plane flexural free vibration analysis of two layered structure by the transfer influence coefficient method. The structure is regared as a distributed mass system with lumped mass and inertia moments, massless linear and rotational springs, and joints elements of releases and rolls at which the displacements are discontinuous in each layer. The results of the simple numerical examples on a personal computer demonstrate the validity of the present method, that is, the numerical high accuracy, the high speed, the flexibility for programming of the present algorithm, compared with the tranfer matrix method.

### 서 론

저자들은 퍼스널 컴퓨터 이용에 적합한, 高速·高精度의 구조해석수법을 개발할 목적으로, 傳達影響係數法이라는 새로운 진동해석수법을 제안해서<sup>1),2)</sup>, 직선상 구조물, 원판구조물 등 여러형상의 구조물을 대상으로, 자유진동해석에 적용해 본 결과, 종래의 전달매트릭스법에 비해 계산정도 및 계산속도의 양면에서 우수함을 보고한 바 있다<sup>1)~6)</sup>.

해석대상과 알고리즘의 양면에서 대단히 유사성을 갖고 있어, 본 연구의 비교대상으로 삼고 있는 전달매트릭스법은 일반적으로 다음과 같은 단점을 가지고 있다<sup>7)~8)</sup>.

(1) 회전축과 같은 가늘고 긴 구조물을 분포정수계

로 간주해서 자유진동해석을 할 경우, 전달필드매트릭스 요소내에 삼각함수와 쌍곡선함수의 덧셈, 뺄셈으로 인한 오차 및 大·소의 요소값의 곱셈으로 인한 오차가 발생해서, 정해의 근방에 많은 해가 존재한다든지, 고차의 고유진동수를 구할 경우에는 해가 구해지지 않게된다.

(2) 구조물의 중간에 경탄성지지가 존재하든지, 층상구조물의 중간에 경탄성지지로 연결되어 있는 경우는, 본래의 전달매트릭스법의 개념과는 전연 다른 델타매트릭스법과 같은 복잡한 알고리즘을 사용하지 않으면 안된다. 또한 이 경우 고유모드는 구할 수 없다.

(3) 구조물의 중간절점이 릴리스(release) 및 롤(roll)의 조인트(joint)요소로 되어있는 경우에는 이러한 조인트의 갯수 및 위치에 따라 해석 알고리즘을

\* 이 논문은 1990년도 문교부지원 한국학술진흥재단의 지방대육성 학술연구구조성비에 의하여 연구되었음.

변경시키지 않으면 안된다.

(4) 경계조건 및 중간조건이 달라진 경우 알고리즘 자체를 변경시켜야 함은 물론이거나와 진동수방정식도 달라져야 하므로 범용프로그램을 만들기가 곤란하다.

본 논문에서 해석대상으로 삼고있는 직선상 2층 구조물은, 터빈과 진동바닥, 로터-케이싱系, 펌프와 지지대, 2축系, 2중 로터系 및 대형배관系 등 공학상 매우 중요한 구조물이다<sup>9)</sup>. 이들에 대한 자유진동해석 알고리즘은 既報<sup>10)</sup>을 통해서 이미 발표했으나, 수학적 모델링 및 알고리즘의 정식화 과정에서, 구조물의 모든 절점의 변위 및 각변위는 연속으로 간주해서 처리하였으므로, 변위벡터가 불연속인 구조물에서의 적용이 곤란하다.

따라서, 본 연구에서는 해석대상 구조물의 중간절점에 트러스 요소, 유니버설조인트, 로봇 암 등 릴리스 및 롤의 조인트 요소가 존재하더라도 문제없이 적용할 수 있고, 상기의 전달 매트릭스법에 있어서의 문제점도 해결할 수 있는, 보다 일반화된 해석 알고리즘의 정식화를 행한다. 직선상 2층 구조물의 분할된 보 요소를 분포정수계로 간주하고, 변위벡터의 불연속성을 갖는 조인트 요소의 유무에 관계없이, 스프링정수 값의 조절만으로 모든 중간 지지조건에 대응할 수 있도록, 傳達影響係數法에 의한 면내 굽힘 자유진동해석 알고리즘을 정식화 한다.

간단한 수치계산 모델에 의한 수치실험을 행하고, 전달매트릭스법의 결과와 비교·검토를 행하여, 본 수법의 유효성 및 실용성을 제시하고자 한다.

### 傳達影響係數法에 의한 알고리즘의 定式化

Fig. 1에서와 같이 직선상 2층 구조물의 임의의 절점  $j$ 에서 변위 또는 각 변위가 불연속인 조인트 부분을 갖는 경우, 면내 굽힘 자유진동을 傳達影響係數法에 의해 해석한다. 각 층의 보의 부분을 분포정수계로 취급하고, 해석 알고리즘의 정식화에 앞서 다음과 같은 가정을 둔다.

(1) 각 층은 일정한 분포정수를 갖는 보에 조인트의 내부질량이 일체로 취부되어 있고, 조인트의 내부질량과 외부질량의 사이에는 스프링정수,  $k_j^i, K_j^i$ 를 갖는 연결스프링이 삽입되어 있는 것으로 한다. 또한, 변위 및 각 변위, 전단력 및 모멘트의 불연속

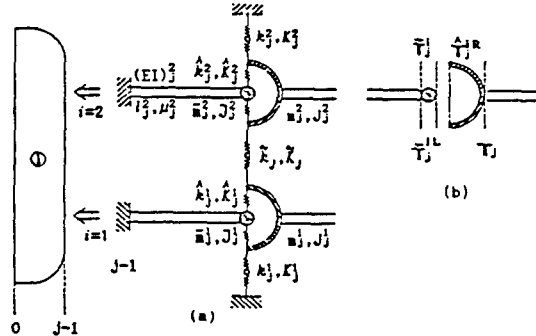


Fig. 1. Fundamental element.

이 생기는 점은 반드시 절점이 되도록 분할한다.

(2) 각층의 길이와 분할수는 같지 않아도 관계없다.

(3) 상·하층에 수직으로 조인트의 사이에 스프링정수  $k_j^i, K_j^i$ 의 연성 전단 및 회전스프링에 의해 연성되고,  $k_j^i, K_j^i$ 의 기초 전단 및 회전스프링에 의해 기초에 지지된 것으로 한다.

(4) 각 절점의 횡변위 및 각변위 혹은 전단력 및 모멘트는 연속일 필요는 없다. 또한, 각 물리량의 부호는 문헌(5)를 따른다.

(5) 系의 좌단과 우단은 조인트 절점이 아닌 기초 또는 연성의 전단 및 회전 스프링만으로 지지되어 있다.

傳達影響係數法의 기본 개념을 명확히 하기위해 가정(2)의 조건을 더욱 특정화해서 각 층의 길이, 분할수를 동일하다고 하고, 상·하층의 대응하는 길어도 같다고 한다. 만약 각 층의 길이와 분할수가 다른 경우에는 既報<sup>10)</sup>와 동일한 방법으로 취급할 수가 있고, 일반적으로 계산량을 절감할 수 있다.

각 층의 분할수를  $n$ , 하층을 1층, 상층을 2층으로 하고, 각 층의 좌단을 절점 0, 우단을 절점  $n$ 으로 한다.

본 논문에서 사용하는 기호중 동일한 기호 위에 「—」, 「Δ」가 붙어 있는 것과 붙어 있지 않는 것은, 각각 절점의 좌측, 중간, 우측의 물리량을 나타내고 L, R은 중간좌측 및 우측을 나타낸다.

### 1. 動的影響係數 매트릭스

Fig. 1 (a)는 외팔보 형태의 분포보와 조인트 요소로 구성된 2층 구조의 기본요소  $j$ 를 순차적으로 직렬 결합시키는 개념도를 나타내고 있다. Fig. 1(a)의 ①은 2층 구조물의 좌단으로부터 절점  $j-1$ 까지 이미 설

정된 2층 구조물을 나타낸다. 여기서  $\bar{m}_j^i, \bar{J}_j^i, m_j^i, J_j^i$ 는 각각 조인트 요소의 내부 및 외부의 질량, 관성 모멘트를 나타낸다.

또한,  $EI_j, I_j^i, \mu_j^i$ 는 상·하층의 굽힘 강성계수, 외팔 분포보의 길이 및 선밀도를 나타낸다.

절점  $j$ 에 있어서의 상·하층의 횡·각변위의 변위 벡터  $(y, \theta)_j$ 와 전단력, 모멘트의 힘벡터  $(F, N)_j$ 간의 관계를 각각 다음식으로 정의한다.

$$\bar{\mathbf{d}}_j = \bar{\mathbf{T}}_j \bar{\mathbf{f}}_j, \quad \bar{\mathbf{T}}_j = \bar{\mathbf{T}}_j \quad (1)$$

$$\hat{\mathbf{d}}_j^L = \hat{\mathbf{T}}_j^L \hat{\mathbf{f}}_j^L, \quad \hat{\mathbf{T}}_j^L = \hat{\mathbf{T}}_j^L \quad (2)$$

$$\hat{\mathbf{d}}_j^R = \hat{\mathbf{T}}_j^R \hat{\mathbf{f}}_j^R, \quad \hat{\mathbf{T}}_j^R = \hat{\mathbf{T}}_j^R \quad (3)$$

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{T}_j \mathbf{f}_j, \quad \mathbf{T}_j = \mathbf{T}_j \quad (4)$$

여기서  $\bar{\mathbf{T}}_j, \hat{\mathbf{T}}_j^L, \hat{\mathbf{T}}_j^R, \mathbf{T}_j$ 는 Fig. 1 (b)에서와 같이 각각 절점  $j$ 의 좌측, 중간좌측, 중간우측, 우측의 動的影響係數 매트릭스를 나타내고 4×4의 대칭 매트릭스이다. 또한,

$$\bar{\mathbf{d}}_j = \langle \bar{y}^1, \bar{\theta}^1, \bar{y}^2, \bar{\theta}^2 \rangle_j, \quad \bar{\mathbf{f}}_j = \langle \bar{F}^1, \bar{N}^1, \bar{F}^2, \bar{N}^2 \rangle_j \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{d}}_j^L = \langle \hat{y}^1, \hat{\theta}^1, \hat{y}^2, \hat{\theta}^2 \rangle_j, \quad \hat{\mathbf{f}}_j^L = \langle \hat{F}^1, \hat{N}^1, \hat{F}^2, \hat{N}^2 \rangle_j \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{d}}_j^R = \langle \hat{y}^1, \hat{\theta}^1, \hat{y}^2, \hat{\theta}^2 \rangle_j, \quad \hat{\mathbf{f}}_j^R = \langle \hat{F}^1, \hat{N}^1, \hat{F}^2, \hat{N}^2 \rangle_j \quad (7)$$

$$\mathbf{d}_j = \langle y^1, \theta^1, y^2, \theta^2 \rangle_j, \quad \mathbf{f}_j = \langle F^1, N^1, F^2, N^2 \rangle_j \quad (8)$$

## 2. 動的影響係數 매트릭스의 傳達

절점  $j-1$ 의 우측과 절점  $j$ 의 좌측에 있어서의 균일 분포보의 상태변수들 사이의 관계는 필드전달매트릭스의 4×4의 부분매트릭스  $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_j$  및  $\mathbf{D}_j$ 를 쓰면,

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{d}} \\ \bar{\mathbf{f}} \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}_j \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{f} \end{pmatrix}_{j-1} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{f} \end{pmatrix}_{j-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}_j \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{d}} \\ \bar{\mathbf{f}} \end{pmatrix}_j \quad (10)$$

여기서,

$$\mathbf{A}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^1 & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}_j, \quad \mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^1 & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{B}_2 \end{pmatrix}_j,$$

$$\mathbf{C}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^1 & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{C}^2 \end{pmatrix}_j, \quad \mathbf{D}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^1 & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{D}^2 \end{pmatrix}_j$$

$\mathbf{O}_2$ 는 2×2의 영매트릭스이고, Euler 보의 경우 이

들 요소는,

$$\mathbf{A}^i = \begin{pmatrix} C_0 & lC_1 \\ \beta^4 C_3/l & C_0 \end{pmatrix}^i,$$

$$\mathbf{B}^i = \begin{pmatrix} -alC_3 & aC_2 \\ -aC_2 & aC_1/l \end{pmatrix}^i,$$

$$\mathbf{C}^i = \begin{pmatrix} -\beta^4 C_1/al & -\beta^4 C_2/a \\ \beta^4 C_2/a & \beta^4 lC_3 \end{pmatrix}^i,$$

$$\mathbf{D}^i = \begin{pmatrix} C_0 & -\beta^4 C_3/l \\ -lC_1 & C_0 \end{pmatrix}^i \quad (11)$$

$$C_0 = (\cosh\beta + \cos\beta)/2,$$

$$C_1 = (\sinh\beta + \sin\beta)/(2\beta),$$

$$C_2 = (\cosh\beta - \cos\beta)/(2\beta^2),$$

$$C_3 = (\sinh\beta - \sin\beta)/(2\beta^3),$$

$$a = l^2/(EI), \quad \beta^4 = \mu l^4 \omega/(EI)$$

여기서,  $\omega$ 는 선밀도 및 고유각진동수이다.

균일분포의 Timoshenko 보에 대한 부분매트릭스 요소를 부록에 나타낸다. 이 논문의 알고리즘은 Euler 보, Timoshenko 보의 양자에 대해서 상기의 부분매트릭스의 요소가 다른 것을 제외하고는 완전히 동일하다.

조인트 절점  $j$ 에 있어서의 힘벡터의 평형관계는 다음과 같다. 우선, 절점  $j$ 의 좌측과 절점  $j$  중간좌측간의 전단력과 모멘트의 평형관계로부터,

$$\bar{\mathbf{f}}_j = \hat{\mathbf{f}}_j^L - \bar{\mathbf{P}}_j \bar{\mathbf{d}}_j, \quad \bar{\mathbf{P}}_j = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{P}}^1 & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & \bar{\mathbf{P}}^2 \end{pmatrix}_j,$$

$$\bar{\mathbf{P}}_j^i = \text{diag}(-\bar{m}_j^i \omega^2, -\bar{J}_j^i \omega^2) \quad (12)$$

절점  $j$  중간 좌·우측간의 전단력과 모멘트의 평형 관계로부터,

$$\hat{\mathbf{f}}_j^L = \hat{\mathbf{f}}_j^R - \hat{\mathbf{P}}_j (\mathbf{d}_j - \bar{\mathbf{d}}_j) \quad (13)$$

여기서,

$$\bar{\mathbf{d}}_j = \hat{\mathbf{d}}_j^L, \quad \mathbf{d}_j = \hat{\mathbf{d}}_j^R, \quad \bar{\mathbf{d}}_j \neq \mathbf{d}_j$$

$$\hat{\mathbf{P}}_j = \text{diag}(\hat{k}^1, \hat{K}^1, \hat{k}^2, \hat{K}^2)_j \quad (14)$$

절점  $j$  중간우측과 절점  $j$  우측간의 전단력 및 모멘트의 평형관계로부터

$$\hat{\mathbf{f}}_j^R = \mathbf{f}_j - \mathbf{P}_j \mathbf{d}_j, \quad \mathbf{P}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^1 & -\mathbf{K} \\ -\mathbf{K} & \mathbf{P}^2 \end{pmatrix}_j \quad (15)$$

여기서,

$$\mathbf{P}_j^i = \text{diag}(S_j^i + \hat{k}_j, M_j^i + \hat{K}_j)$$

$$\mathbf{K}_j = \text{diag}(\tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\mathbf{K}})_j$$

$$S_j^i = k_j^i - m_j^i \omega^2, \quad M_j^i = K_j^i - J_j^i \omega^2 \quad (16)$$

動的影響係數 매트릭스 정의식 (1), (2), (3), (4)와 상태변수의 관계식 (10), (11), 조인트에서의 힘의 평형관계식 (12), (13), (14), (15)를 사용해서 다음과 같이 動的影響係數 매트릭스의 필드 및 포인트 전달식을 구한다. 우선, 절점  $j-1$ 의 우측과 절점  $j$ 의 좌측간의 動的影響係數 매트릭스의 전달식은 식 (4)의  $j$ 에  $j-1$ 을 대입한 식과 식 (10)으로부터,

$$\mathbf{U}_j \bar{\mathbf{T}}_j = \mathbf{H}_j \quad (17)$$

여기서,

$$\mathbf{U}_j = \mathbf{T}_{j-1}^i \mathbf{C}_j + \mathbf{D}_j$$

$$\mathbf{H}_j = \mathbf{T}_{j-1}^i \mathbf{A}_j + \mathbf{B}_j \quad (18)$$

그리고, 절점  $j$ 의 좌측과 절점  $j$ 의 중간좌측간의 動的影響係數 매트릭스의 포인트 전달식은 식 (1), (2), (12)로부터,

$$\bar{\mathbf{U}}_j \hat{\mathbf{T}}_j^L = \bar{\mathbf{T}}_j \quad (19)$$

여기서,

$$\bar{\mathbf{U}}_j = \mathbf{I} + \bar{\mathbf{T}}_j \bar{\mathbf{P}}_j \quad (20)$$

이고,  $\mathbf{I}$ 는  $4 \times 4$ 단위 매트릭스이다.

절점  $j$  중간좌측과 절점  $j$  중간우측간의 動的影響係數 매트릭스의 전달식은 식 (2), (3), (13), (14)로부터,

$$\hat{\mathbf{P}}_j \hat{\mathbf{T}}_j^R = \hat{\mathbf{U}}_j \quad (21)$$

여기서,

$$\hat{\mathbf{U}}_j = \mathbf{I} + \hat{\mathbf{P}}_j \hat{\mathbf{T}}_j^L \quad (22)$$

절점  $j$  중간우측과 절점  $j$  우측간의 動的影響係數 매트릭스의 전달식은 식 (3), (4), (15)로부터,

$$\bar{\mathbf{U}}_j \mathbf{T}_j = \hat{\mathbf{T}}_j^R \quad (23)$$

여기서,

$$\bar{\mathbf{U}}_j = \mathbf{I} + \hat{\mathbf{T}}_j^R \mathbf{P}_j \quad (24)$$

상기의 식(17), (19), (21), (23)에 의해 動的影響係數 매트릭스를 순차적으로 계산할 수 있으나, 다음과 같이 動的影響係數 매트릭스의 전달식을 두 경우로 통합함으로써, 계산량을 현저히 감소시킬 수 있다.

### 2.1 動的影響係數 매트릭스의 필드전달

식(17)에 식(19)를 대입해서 정리하면,

$$\bar{\mathbf{G}}_j \hat{\mathbf{T}}_j^L = \mathbf{H}_j \quad (25)$$

여기서,

$$\bar{\mathbf{G}}_j = \mathbf{U}_j + \mathbf{H}_j \bar{\mathbf{P}}_j \quad (j=2, \dots, n-1) \quad (26)$$

본 연구에서는 편의상 식(25)를 절점  $j-1$ 의 우측과 절점  $j$  중간좌측간의 動的影響係數 매트릭스의 필드 전달식이라 한다.

### 2.2 動的影響係數 매트릭스의 포인트전달

식(21)에 식(23)을 대입해서 정리하면,

$$\hat{\mathbf{G}}_j \mathbf{T}_j = \hat{\mathbf{U}}_j \quad (j=1, \dots, n-1) \quad (27)$$

여기서,

$$\hat{\mathbf{G}}_j = \hat{\mathbf{P}}_j + \hat{\mathbf{U}}_j \mathbf{P}_j \quad (28)$$

식(27)은 절점  $j$ 의 중간좌측과 절점  $j$ 의 우측간의 動的影響係數 매트릭스의 포인트 전달식이라 한다.

### 2.3 系の 좌단의 動的影響係數 매트릭스

傳達影響係數法은 既報<sup>1)</sup>에서 보고한 바와 같이 계산의 시작점부터 시작단의 경계조건을 고려해서 動的影響係數를 구하고 이를 최종단까지 전달시킨다는 특징을 가지고 있다. 본 연구에서는 系の 좌단의 조인트 절점이 아닌 기초 전단 및 회전스프링, 연성 전단 및 회전스프링이 존재한다고 간주한다. 절점 "0"에서의 動的影響係數 매트릭스는 식(15)에서  $j=0$ 일 때의 강성매트릭스의 역매트릭스를 구하므로써 얻어지나, 강성매트릭스의 요소의 일부가 0이 되므로써 특이매트릭스가 될 경우, 즉, 상·하층 중의 일부의 지지스프링이 존재하지 않을 경우는 수치적으로 역매트릭스를 구하는 것이 불가능하게 된다.

따라서, 절점 0에서 절점 1의 중간좌측까지를 다음 식으로 주어지는 전달식을 사용하므로써, 좌단의 모든 경계조건에 대처할 수 있도록 한다.

$$\bar{\mathbf{G}}_1 \hat{\mathbf{T}}_1^L = \mathbf{A}_1 + \mathbf{P}_0 \mathbf{B}_1 \quad (29)$$

여기서,

$$\bar{\mathbf{G}}_1 = \mathbf{C}_1 + \mathbf{P}_0 \mathbf{D}_1 + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{P}_0 \mathbf{B}_1) \bar{\mathbf{P}}_1 \quad (30)$$

실제 수치계산에 있어서는 식(15)의 강성매트릭스 요소내의 스프링정수의 값을 0에서 수치적 무한대까지의 값을 대입하므로써 모든 경계조건에 대응시킨

다.

결국, 식(29)에 의해서 動的影響係數 매트릭스  $\hat{\mathbf{T}}_n$  을 구하는 것을 시작으로, 식(27), (25), (17)의  $j=n$ 을 대입한 식에 의해서, 系の 좌단에서 절점  $n$ 까지의 動的影響係數 매트릭스를 계산한다.

구조물의 중간에 매우 단단한 기초 탄성지지, 연성 탄성지지 또는 기초 반고정지지 또는 연성 반고정지지가 존재할 경우라도 既報<sup>5)</sup>에서와 동일한 방법으로 처리할 수 있다. 또한 조인트 절점에서 조인트의 내부질량과 외부질량 사이의 전단 및 회전 스프링정수의 값을 변화시킴으로써, 변위 혹은 각변위의 연속 또는 불연속조건등 모든 조건에 대응시킬 수 있다.

만약, 조인트 절점  $j$ 에 있어 상층은 릴리스(release)를 갖고있어 변위벡터가 불연속이고, 하층의 변위벡터는 연속인 구조물의 경우, 상층에 대해서는  $\hat{K}=\infty$ ,  $\hat{K}^2=0$ 를 대입하고, 하층에 대해서는  $\hat{K}=\hat{K}^2=\infty$ 의 값을 대입하는 것만으로 중간조건(조인트 절점)의 처리가 가능하다.

### 진동수방정식 및 거짓根의 해소법

계의 최종단을 포함하는  $n$ 번째 분할요소에 대한 動的影響係數의 전달은 식(17)의 필드전달식을 사용해서 최종단(우단)의 좌측의 動的影響係數 매트릭스  $\hat{\mathbf{T}}_n$ 를 구한다. 이렇게 전달된 동적영향계수  $\hat{\mathbf{T}}_n$ 와 우단, 즉 절점  $n$ 의 경계조건을 고려해서 진동수방정식을 구한다.

우선, 우단의 경계조건이 스프링지지단과 자유단인 경우로 나누어 진동수방정식을 유도한다.

(1)  $\mathbf{P}_n \neq \mathbf{0}$ 인 경우 :

이 경우는 系の 우단이 상·하층간의 연성 지지스프링이든 기초 지지스프링이든 적어도 1개는 존재한다. 따라서, 절점  $n$ 에 있어서 좌측 및 우측의 전단력, 모멘트 벡터는  $\hat{\mathbf{f}}_n \neq \mathbf{0}$ 와  $\mathbf{f}_n = \mathbf{0}$ 로 간주할 수 있으므로, 절점  $n$ 에서의 힘의 평형관계로부터  $\hat{\mathbf{f}}_n$ 는 다음 식으로 주어진다.

$$\hat{\mathbf{f}}_n = -\mathbf{P}_n \mathbf{d}_n \quad (31)$$

이때,  $\bar{\mathbf{d}}_n = \mathbf{d}_n$ 이므로, 식(1)을 대입해서 정리하면,

$$(\mathbf{I} + \mathbf{P}_n \hat{\mathbf{T}}_n) \hat{\mathbf{f}}_n = \mathbf{0} \quad (32)$$

여기서, 진동수방정식  $\hat{R}_n$ 는,

$$\hat{R}_n = \det(\mathbf{I} + \mathbf{P}_n \hat{\mathbf{T}}_n) = 0 \quad (33)$$

(2)  $\mathbf{P}_n = \mathbf{0}$ 인 경우 :

이 경우는 상·하층에 지지스프링이 전혀 없는 자유단인 경우를 나타낸다. 따라서,  $\mathbf{f}_n = \hat{\mathbf{f}}_n = \mathbf{0}$ 이므로, 식(1), (17)로부터,  $\hat{\mathbf{T}}_n$ 를 소거한 식에  $j=n$ 을 대입하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{U}_n \bar{\mathbf{d}}_n = \mathbf{0} \quad (34)$$

여기서,  $\bar{\mathbf{d}}_n \neq \mathbf{0}$ 이므로 진동수방정식  $\bar{R}_n$ 는,

$$\bar{R}_n = \det(\mathbf{U}_n) = 0 \quad (35)$$

식(33), (35)의 진동수방정식에 이분법을 적용해서 고유진동수를 구할 경우, 고유치의 부호만이 필요하게 되고, 따라서 경우(2)의 식(35)는 식(33)에서  $\mathbf{P}_n = \mathbf{0}$ 일 경우에 해당하게 되어 진동수방정식은 식(33)으로 단일화할 수 있다.

또한, 기초 고정단이나 기초 핀지지단과 같은 우단의 스프링정수 중에 무한대의 값을 갖는 경계조건에 대해서도 대응하는 스프링정수를 적당히 큰 유한값을 대입하므로써 문제없이 취급할 수 있다.

진동수방정식 (33)에 있어서의 최종단까지 전달된 動的影響係數 매트릭스  $\hat{\mathbf{T}}_n$ 를 계산하는 과정에서 極이 발생할 수 있어서 이를 해소하지 않으면 안된다.

식(25)와 (27)의 동적영향계수  $\hat{\mathbf{T}}_j$ 와  $\mathbf{T}_j$ 의 요소계산에 있어,  $\bar{R}_j = \det(\hat{\mathbf{G}}_j) = 0$  ( $j=2, \dots, n-1$ )과  $\hat{R}_j = \det(\hat{\mathbf{G}}_j) = 0$  ( $j=1, \dots, n-1$ )인 경우에는 極이 발생함을 알 수 있고, 일반적으로 이 極은 전후에서 부호가 변하는 反對稱極이다.

식(25)와 (27)에서 알 수 있는 바와같이,  $\hat{\mathbf{G}}_j$ 에는  $\mathbf{T}_{j-1}$ 이  $\hat{\mathbf{G}}_j$ 에는  $\hat{\mathbf{T}}_j$ 가 각각 포함되어 있다. 따라서,  $\hat{R}_{j-1} = \det(\hat{\mathbf{G}}_{j-1})$  및  $\bar{R}_j$ 의 零點이 각각  $\bar{R}_j$  및  $\hat{R}_j$ 의 反對稱極에 대응함을 알 수 있다.

$j=1$ 인 경우, 즉  $\hat{\mathbf{T}}_1$ 의 계산에 식(29) 및 (30)을 사용할 경우,  $\bar{R}_1 = \det(\hat{\mathbf{G}}_1)$ 에는 명백히 反對稱極이 존재하지 않음을 알 수 있다.

이상의 원인으로 진동수방정식 (33)에 이분법을 적용하면,  $\hat{R}_n$ 의 零點(고유진동수)뿐만 아니라,  $\bar{R}_n$ 의 零點에 기인하는 反對稱極도 해로 구해버릴 수가 있다. 이것은 참根이 아니라 거짓根에 해당하고, 이를 해소하기 위해서는 既報<sup>11)</sup>에서와 동일한 개념으로  $\hat{R}_n$ 의 反對稱極을 부호가 변하지 않는 對稱極으로 바꾸어 주면 된다. 구체적으로  $\hat{R}_n$ 에  $\bar{R}_1, \hat{R}_1, \bar{R}_2, \hat{R}_2, \dots, \bar{R}_n$ 의 부호함수를 곱하므로써  $\hat{R}_n$ 의 반대칭을 모두 對稱極으로 바꿀 수 있다. 이러한 고려를 해서

얻어진 함수를  $H_n$ 이라 하면,  $H_n$ 은  $\hat{R}_n$ 의 영점 이외에서는 부호가 변하지 않는다. 이분법을 적용할 경우 함수의 부호만이 필요하므로 그 부호함수를 나타내면,

$$\text{sgn}(H_n) = \prod_{j=1}^n \text{sgn}(\hat{R}_j) \cdot \text{sgn}(\hat{R}_1) \quad (36)$$

진동수방정식이 식(35)로 주어지는 경우에는  $\mathbf{P}_n = \mathbf{O}$ 이기때문에  $\hat{R}_n = 1$ 로 되고  $H_n$ 의 부호는  $\hat{R}_n$ 의 零點(고유진동수)만에서 바뀐다. 따라서, 식(36)은 우단의 스프링정수의 조정만으로 모든 경계조건에 대응시킬 수 있고 거짓根이 해소된 진동수방정식임을 알 수 있다. 식(36)의  $\hat{R}_j$ ,  $\hat{R}_1$ 의 부호함수는 動的影響係數 매트릭스의 전달 계산과정, 즉 식(25), (27), (29)의 계산과정에서 쉽게 얻어진다.

### 고유모드의 계산

傳達影響係數法에서는 일반적으로 고유모드를 계산할 경우, 고유진동수가 구해진 다음, 계의 우단으로부터 좌단으로 순차적으로 구해나간다. 계산의 출발치인 계의 우단의 상태변수는 3장의 2가지 경우로 나누어 구한다.

(1)  $\mathbf{P}_n \neq \mathbf{O}$ 인 경우 ( $\mathbf{f}_n = \mathbf{O}$ ) :

고유진동수가 구해진 시점에서는 식(33)이 성립하므로, 식(32)로부터  $\bar{\mathbf{f}}_n (\neq \mathbf{O})$ 이 구해지고, 식(1)에 의해  $\bar{\mathbf{d}}_n$ 이 계산된다.

(2)  $\mathbf{P}_n = \mathbf{O}$ 인 경우 ( $\bar{\mathbf{f}}_n = \mathbf{f}_n = \mathbf{O}$ ) :

경우(1)에서와 같이 식(34)에 의해  $\bar{\mathbf{d}}_n (\neq 0)$ 을 구할 수 있다. 절점  $j$ 와 절점  $j-1$ 에 있어서 상태변수간의 관계는 식(10)으로부터,

$$\mathbf{f}_{j-1} = \mathbf{A}_j \bar{\mathbf{f}}_j - \mathbf{C}_j \bar{\mathbf{d}}_j \quad (37)$$

$\mathbf{f}_{n-1}$ 이 구해지면 식(4)로부터  $\mathbf{d}_{n-1}$ 이 계산된다. 또, 조인트 절점  $n-1$ 의 우측과 중간우측간의 힘벡터의 평형관계식(15)에 의해  $\hat{\mathbf{f}}_{n-1}^R = \hat{\mathbf{f}}_{n-1}^L$ 이 구해지고, 식(2)에 의해  $\hat{\mathbf{d}}_{n-1}^L = \bar{\mathbf{d}}_{n-1}$ 이 구해진다. 절점  $n-1$ 에서 절점 1의 좌측까지의 상태변수는 식(37), (4), (15), (2)를 사용해서 순차적으로 계산할 수 있다. 좌단의 상태변수는 식(37)에 의해  $\mathbf{f}_0$ 를 구하고, 식(10)으로부터 주어지는 다음의 관계를 써서  $\mathbf{d}_0$ 를 구한다.

$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{D}_1 \mathbf{d}_1 - \mathbf{B}_1 \bar{\mathbf{f}}_1 \quad (38)$$

고유모드의 형태를 알기 위해서는 고유진동수가 구해진 후, 균일 분포보를 더욱더 분할수를 증가해서 각 절점의 動的影響係數 매트릭스를 계산하고, 상기의 방법으로 세분화된 각 절점의 상태변수를 구하는 것이 좋다.

### 수치계산 결과 및 고찰

본 논문에서 정식화한 해석 알고리즘의 계산정도를 검토하기 위해, Fig. 2와 같은 기본 계산 모델을 사용해서 여러가지 경우에 대해서 수치실험을 행했다.

이 모델은 1층이 직경 25mm, 2층이 직경 20mm, 길이는 1, 2층 모두 960mm의 강제의 균일 분포 질량을 갖는 보이다. 보는 회전하지 않는 것으로 해서 자이로스코픽 효과는 무시했다. 1, 2층 모두 분할수  $n=24$ 로 했고, 2층의 절점 12에 조인트 요소가 존재하는 것으로 했다. Fig. 2에서 스프링이 존재하는 절점  $r$ 에 있어서는, 1층과 2층의 기초 전단 스프링정수  $k_r^1$ ,  $k_r^2$  및 연성 전단 스프링정수  $\hat{k}_r$ 의 값은 편의상  $k_r$ 로 모두 같다고 했고, 회전스프링정수는 조인트 절점  $j$ 에서의 연성 회전스프링정수  $\hat{K}_j$ 를 제외하고는 모두 0으로 가정했다. 단, 조인트 내부의 전단 및 회전 스프링정수  $\hat{k}_j^i$ ,  $\hat{K}_j^i$ 는 조인트 내부의 조건에 따라 값을 변화시켰다. 또한, 단면형상계수  $\alpha = 0.886$ 으로 했다<sup>10)</sup>.

Fig. 2의 기본 모델을 사용해서 다음의 3종류의 경우에 대해 수치계산을 행했다.

경우 1:  $k = \hat{k}_r \neq 0$ ,  $k^1_r = k^2_r = 0$

경우 2:  $k = k_r = \hat{k}_r \neq 0$ ,  $\hat{K}_j \neq 0$ ,  $k^2_r = 0$

경우 3:  $k = k^1_r = k^2_r = \hat{k}_r \neq 0$ ,  $\hat{K}_j \neq 0$

계산기는 32비트 퍼스널컴퓨터(수치연산 coprocessor 사용)로, 사용 언어는 Fortran, 배정도 변수를 써서 계산했고, 고유진동수는 상대오차  $\epsilon = 10^{-9}$ 이하에서 수렴하는 것으로 했으며, 유효자리 8자리 미

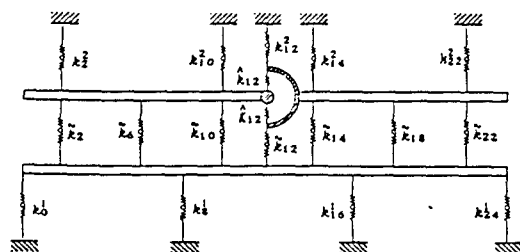


Fig. 2. Numerical computational model 1.

만은 반올림해서 표시했다. 진동수 방정식의 해법으로 이분법을 사용했고, 거짓근의 해소법을 고려해 넣은 식(36)에 의해 수치계산을 행했다.

1. 계산정도

Table 1은 경우 1을 Timoshenko보로 간주해서,  $k=10^6(N/m)$ 일 때, 전달영향계수법(TICM', TICM)과 전달매트릭스법(TMM)에 의한  $4kHz$ 까지의 고유진동수 계산결과를 나타낸 것이다. TICM'는 절점에서의 변위벡터가 항상 연속이라는 가정하에서 정식화한 既報<sup>6)</sup>의 알고리즘에 의한 계산결과이고, TICM은 임의의 절점이 변위벡터의 불연속을 포함하는 조인트 요소로 가정해서, 일반화시킨 현 알고리즘에 의한 계산결과이다. 실제상의 조인트 절점의 처리는 조인트 내부의 전단 및 회전스프링정수  $\hat{k}_i^j$  및  $\hat{K}_i^j$ 에 각각  $\infty$ 의 값을 대입하므로써 연속조건으로 대응시켰다. 또한, 여기서  $\infty$ 의 값으로는  $10^{20}$ 을 컴퓨터상의 수치적 무한대로 간주했다. TICM과 TICM'에 의한 결과들은 완전히 일치하고 있어, 본 논문의 알고리즘에 의한 프로그램은 충분히 신뢰할만 함을 알 수 있다.

따라서, 현 알고리즘을 사용하면, 절점에서의 상태 벡터(변위 혹은 힘벡터)중 임의의 물리량의 불연속이

Table 1. Comparison of computation accuracy of natural frequencies for case 1 at  $k=10^6(N/m)$

No.	$k=10^6(N/m)$		
	TICM'	TICM	TMM
1	114.09650	114.09650	114.09650
2	305.65733	305.65733	305.65733
3	317.41701	317.41701	317.41701
4	319.63467	319.63467	319.63467
5	328.50927	328.50927	328.50927
6	427.81891	427.81891	427.81891
7	566.59125	566.59125	566.59125
8	692.38670	692.38670	692.38670
9	896.53235	896.53235	896.53235
10	1099.9398	1099.9398	1099.9398
11	1305.3079	1305.3078	1305.3079
12	1613.4679	1613.4679	1613.4679
13	1829.9069	1829.9069	1829.9069
14	2243.4077	2243.4077	2243.4077
15	2399.9003	2399.9003	2399.9002
16	2944.4797	2944.4797	2944.4979
17	3051.0151	3051.0151	-
18	3734.4748	3734.4748	-
19	3774.2180	3774.2180	-

존재하더라도, 조인트 요소 내부의 전단 및 회전스프링정수 값의 조절만으로 간단히 처리할 수 있다. 한편, TMM의 값들은 종래의 알고리즘에 의한 계산결과이고, 「-」로 표시되어 있는 부분, 즉 17차 이상에서는 正解(고유진동수)가 구해지지 않고 있다. 이는 既報<sup>6)</sup>와 동일한 경향으로, 고차진동수로 갈수록 TMM의 단점인 계산정도가 나빠지기 때문이라고 생각된다. 여기서의 정해의 의미는 다음과 같다. 대형 계산기에서 4배정도 변수를 사용해서 수치계산을 행했을 때, 구하는 진동수 범위에서 TICM', TICM, TMM의 결과가 유효자리수 내에서 일치했고, 퍼스널 컴퓨터상에서 2배정도 변수를 써서 계산한 TICM의 결과와도 완전히 일치했으므로, 이를 본 논문의 정해로 간주했다.

Table 2는 경우 1을 Table 1과 동일하게 Timoshenko 보로 간주하고, 다만 절점 12의 조인트 요소가 릴리스( $\hat{k}_{12}=\hat{K}_{12}=\hat{k}_{12}^2=10^{20}$ ,  $\hat{K}_{12}^2=0$ )의 조건일때, 전단 스프링정수가 각각  $k=10^3(N/m)$ ,  $k=5 \times 10^8(N/m)$ 와 절점 12의 회전스프링정수가  $\hat{K}_{12}^2=1(N \cdot m/rad)$ 에 대하여  $4kHz$ 까지의 고유진동수의 계산결과이다. TICM은 문제가 없으나, TMM은 지지 스프링정수 값의 변화에 따른 고유진동수의 변화가 아직 포화상태에 이르고 있지 않음에도 불구하고, 스프링정수 값이 증가할 수록 계산정도

Table 2. Comparison of computation accuracy of natural frequencies for case 1 at  $k=10^3$  and  $k=5 \times 10^8(N/m)$

No.	$k=10^3(N/m)$		$k=5 \times 10^8(N/m)$	
	TICM	TMM	TICM	TMM
1	7.5350173	7.5350173	100.99120	100.99120
2	123.55461	123.55461	314.33792	314.33792
3	271.82694	271.82694	440.86716	550.86716
4	339.08510	339.08510	981.50648	-
5	393.83489	393.83489	1025.8842	1025.8842
6	661.45759	661.45759	1179.1782	-
7	874.23818	874.23818	1261.9100	1261.9100
8	1076.4034	1076.4034	1665.0863	-
9	1086.4626	1086.4626	2078.6809	-
10	1610.3672	1610.3672	2192.3411	-
11	1803.8676	1803.8676	2363.7429	2363.7429
12	2085.0153	2085.0153	2752.5510	-
13	2228.7313	2228.7313	2935.5055	-
14	2936.5721	-	3043.1409	-
15	3039.9322	3039.9322	3507.9208	-
16	3393.7941	3393.7941	-	-
17	3728.6295	-	-	-

가 나빠지고 있는 것을 알 수 있고, 서론에서 지적했듯이 고차의 진동수가 되면 역시 계산정도가 좋지 않음을 알 수 있다. 또한, 여기서 TMM의 계산알고리즘은 Table 1에서와는 다른 축소전달매트릭스법<sup>7)</sup>을 사용하고 있다.

Table 3은 경우 2를 Euler보로 간주하고, Table 2와 동일한 릴리스의 조건에서, 다만, 전단 스프링정수가  $k=10^4(N/m)$ ,  $k=3 \times 10^8(N/m)$  일때, 4 kHz까지의 고유진동수의 계산결과이다. TICM과 TMM 모두 상기 Table 2의 결과와 비슷한 경향을 보이고 있다.

Table 4는 경우 3의 모델을 각각 Euler와 Timoshenko보로 가정해서, Table 2와 같은 릴리스 조건과 전단 스프링정수  $k=4 \times 10^8(N/m)$  일때, 4 kHz까지의 고유진동수의 계산결과를 나타낸 것이다. Euler보나 Timoshenko보나 거의 동일한 경향을 나타내고 있음을 알 수 있고, 기초 및 연성 지지스프링 정수 값이 이 이상 커지면, 본 논문에 제시하지는 않았지만, TMM의 경우는 거의 正解가 얻어지지 않음을 확인했다. 이는 TMM의 경우, 전달매트릭스 요소내에 극단적으로 大·소의 값이 혼재하므로써, 수

**Table 3. Comparison of computation accuracy of natural frequencies for case 2 at  $k=10^4$  and  $k=3 \times 10^8(N/m)$**

No.	$k=10^4(N/m)$		$k=3 \times 10^8(N/m)$	
	TICM	TMM	TICM	TMM
1	12.170201	12.170201	390.92298	-
2	15.050248	15.050248	508.97290	-
3	23.58855	23.588551	664.47325	664.47325
4	34.277005	34.27705	958.21925	-
5	35.359012	35.359012	982.99552	-
6	127.65129	127.65129	1127.3776	1127.3776
7	273.61598	273.61598	1476.4087	1476.4087
8	342.43802	342.43802	1877.4876	1877.4876
9	396.12487	396.12487	1892.9539	-
10	668.72709	668.72709	2597.9799	-
11	883.72119	883.72119	2640.1792	-
12	1090.5331	1090.5331	2865.7963	-
13	1104.7814	1104.7814	3005.7198	-
14	1649.9745	1649.9745		
15	1843.5668	1843.5668		
16	2138.0214	2138.0214		
17	2304.3858	2304.3858		
18	3067.8117	-		
19	3152.2647	3152.2647		
20	3534.0088	3534.0088		
21	3940.3519	3534.0088		

**Table 4. Comparison of computation accuracy of natural frequencies for case 3 at  $k=4 \times 10^8(N/m)$**

No.	Euler Beam		Timoshenko Beam	
	TICM	TMM	TICM	TMM
1	914.42329	914.42329	889.39566	889.39566
2	950.73767	-	928.08209	-
3	1006.5082	1006.5082	993.29378	993.29378
4	1249.3327	1249.3327	1220.5534	1220.5534
5	1385.5258	1385.5258	1352.4757	1352.4757
6	2077.2339	-	2010.8879	-
7	2124.4591	2124.4591	2061.6095	-
8	2392.1186	2392.1186	2300.6599	2300.6599
9	2835.3537	-	2691.5189	-
10	2860.0609	-	2714.9891	2714.9891
11	3367.4453	-	3274.5349	3247.5349
12	3468.2389	-	3330.3795	-

치의 연산과정에서 생기는 오차 때문이라 생각된다. 상기의 결과들에서 알 수 있듯이, TICM의 기본요소의 절점을 조인트 요소의 일반화 절점으로 취급해서 정식화한 본 논문 알고리즘을 사용하면, 절점에서의 조건 즉, 상태벡터량(변위, 횡변위, 전단력, 모멘트)중에서 임의의 물리량이 불연속성을 갖든가, 이러한 불연속성을 갖는 절점의 위치가 어디에 있든가에 상관없이, 전단 및 회전스프링정수의 값만을 조절하므로써, 이런 조건들에 대응시킬 수 있다. 또한, 경계조건이나 중간지지조건에 대해서도 마찬가지이다.

한편, TMM은 상기의 릴리스 요소가 존재할 경우, 이 경우만에 적합한 특별한 알고리즘을 사용하지 않으면 안된다. 즉, 종래의 전달매트릭스와는 다른 축소 전달매트릭스법을 사용해서, 중간 절점의 지지조건을 고려하고 있다.

이 경우 절점위치의 변화 또는 절점의 조건의 변화에 따라 새로운 알고리즘을 정식화하지 않으면 안되는 복잡함과 번거로움이 따르게 되므로, 알고리즘의 일반화 및 프로그램의 범용화가 곤란함을 알 수 있다. 이것은 경계조건 및 중간지지조건에 관해서도 경우에 따라서는 마찬가지로 생각할 수 있다.

## 2. 고유모드

1층과 2층이 길이가 다르고, 분할수도 다른 Fig. 3과 같은 모델에 대해서 Timoshenko 보로 가정하고,  $k=10^9(N/m)$ ,  $\bar{K}_{12}=0$ ,  $\hat{k}_{12}=\bar{K}_{12}=\hat{k}_{12}=10^9$ ,  $\bar{K}_{22}=0$  일때, 1차에서 4차까지의 고유모드를 나타냈다. 실선, 파선, 일점쇄선, 2점쇄선이 각각 1차에



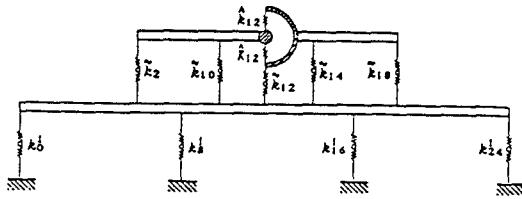


Fig. 3. Numerical computational model 2.

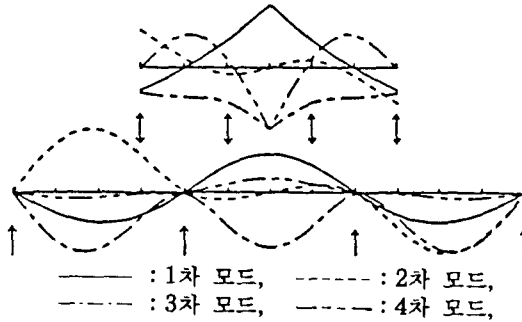


Fig. 4. Characteristic modes of model 2.

서 4차모드에 대응한다. 또한, 화살표는 스프링 위치를 나타낸다. 조인트 절점에서의 각 변위의 불연속 및 고유모드의 대칭성이 잘 나타나 있음을 알 수 있다. 이 경우의 현 알고리즘의 적용은 문헌(3)에서와 같은 방법으로 수행했다.

### 3. 계산시간

전달매트릭스법과 본 논문의 수법의 계산속도를 비교하기 위하여, 경우 1, 2, 3을 Euler 보로 가정하고,  $k=10^8(N/m)$ 일때, 초기조건 1Hz에서 초기증분 1 Hz로 일정수의 고유진동수를 구하는데 필요한 계산시간(sec)을 측정해서 Table 5에 나타냈다. 경우 1, 2, 3 공히 TICM은 TMM보다 1.6배정도 빠르다는 것을 알 수 있다.

Table 5. Comparison of CPU time (unit: sec)

Case	Euler beam		Roots
	TICM	TMM	
1	393	630	17
2	363	573	20
3	364	574	20

## 결 론

직선상 2층 구조물의 임의의 절점에 변위벡터가 불연속인 조인트 요소를 갖는 경우, 面內 굽힘 자유진

동을 해석하기 위한 알고리즘을 전달영향계수법에 의해 정식화하고, 간단한 모델에 의해 수치실험을 행한 결과, 다음과 같이 요약할 수 있다.

(1) 전달영향계수법은 종래의 전달매트릭스법에 비해 계산정도 및 계산속도 양면에서 우수함을 확인할 수 있다.

(2) 구조물의 임의의 중간 절점에서 상태벡터량(회전변위, 각변위, 전단력 및 모멘트 등)중 일부의 물리량이 불연속성을 갖더라도, 알고리즘 자체를 변화시켜야 하는 전달매트릭스법과는 달리, 스프링정수 값의 조절 만으로 간단히 처리할 수 있어, 알고리즘의 일반화 및 프로그램의 범용화가 가능하다.

(3) 전달영향계수법에서는, 구조물의 중간에 半固定지지와 같은 단단한 탄성지지부가 다수 존재하는 경우에도, 기본적인 알고리즘을 변경할 필요없이 전단 및 회전 스프링정수에 적당한 값을 대입하는 것만으로 중간조건에 대응시킬 수 있고, 모든 경계조건도 마찬가지로 처리할 수 있다.

## 부 록

균일 분포 Timoshenko 보의 필드매트릭스는 다음 식과 같이 나타내어 진다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_j^i &= \begin{Bmatrix} C_0 - \sigma C_2 & l[C_1 - (\sigma + \tau) C_3] \\ bC_3/l & C_0 - \tau C_2 \end{Bmatrix}_i \\
 \mathbf{B}_j^i &= \begin{Bmatrix} -al[(b + \sigma^2) C_3 - \sigma C_1]/b & aC_2 \\ -aC_2 & a(C_1 - \tau C_3)/l \end{Bmatrix}_i \\
 \mathbf{C}_j^i &= \begin{Bmatrix} b(\sigma C_3 - C_1)/al & -bC_2/a \\ bC_2/a & l[(b + \tau^2) C_3 - \tau C_1]/a \end{Bmatrix}_i \\
 \mathbf{D}_j^i &= \begin{Bmatrix} C_0 - \sigma C_2 & -bC_3/l \\ -l[C_1 - (\sigma + \tau) C_3] & C_0 - \tau C_2 \end{Bmatrix}_i
 \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 C_{0j}^i &= [(\lambda_{2j}^i)^2 \cos \lambda_{1j}^i + (\lambda_{1j}^i)^2 \cos \lambda_{2j}^i] / \Lambda_j^i \\
 C_{1j}^i &= [(\lambda_{2j}^i)^2 \sinh \lambda_{1j}^i / \lambda_{1j}^i + (\lambda_{1j}^i)^2 \sinh \lambda_{2j}^i / \lambda_{2j}^i] / \Lambda_j^i \\
 C_{2j}^i &= (\cosh \lambda_{1j}^i - \cos \lambda_{2j}^i) / \Lambda_j^i \\
 C_{3j}^i &= (\sinh \lambda_{1j}^i / \lambda_{1j}^i - \sin \lambda_{2j}^i / \lambda_{2j}^i) / \Lambda_j^i \\
 \sigma_j^i &= \mu_j^i \omega^2 (l_j^i)^2 / (\kappa GA)_j^i \\
 \tau_j^i &= -a_j^i h^i \mu_j^i (i_j^i)^2 \omega^2 \\
 \Lambda_j^i &= (\lambda_{1j}^i)^2 + (\lambda_{2j}^i)^2, \quad a_j^i = (l_j^i)^2 / (EI)_j^i \\
 b_j^i &= \mu_j^i (l_j^i)^4 \omega^2 / (EI)_j^i \\
 (\lambda_{2j,1j}^i)^2 &= \sqrt{b_j^i + (\sigma_j^i - \tau_j^i)^2 / 4} \pm (\sigma_j^i + \tau_j^i) / 2
 \end{aligned}$$

$h^i = \begin{cases} -1: \text{굽힘진동의 경우} \\ 1: \text{회전축(전향위험속도)의 경우} \\ -3: \text{회전축(후향위험속도)의 경우} \end{cases}$   
 $(EI)^j$ : 굽힘강성,  $(\kappa GA)^j$ : 전단강성  
 $\mu_j^i$ : 선밀도,  $i, j$ : 회전반경.

### 참고문헌

- 1) Sueok, A., Kondou, T., Moon, D.H. and K., Yamashita (1988): A Method of Vibrational Analysis Using a Personal Computer-A Suggested Transfer Influence Coefficient Method. Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyushu Univ., 48 (1), 31-46.
- 2) Kondou, T., Sueoka, A., Moon, D.H., Tamura, H., and T., Kawamura (1989): Free Vibration Analysis of a Distributed Flexural Vibrational Analysis System by the Transfer Influence Coefficient Method. Theoretical and Applied Mechanics Vol. 37, Uni. of Tokyo press, 289-304.
- 3) 末岡·近藤·文·山河·田村(1988): 傳達影響係數法による多層構造物の自由振動解析(第1報, 集中系に村する定式化). 日本機械學會論文集, 54-504(C), 1724-1731.
- 4) \_\_\_\_\_(1988): 傳達影響係數法による多層構造物の自由振動解析(第2報, 集中系二層構造物の數値計算結果). 日本機械學會論文集, 54-504(C), 1732-1739.
- 5) 近藤·末岡·山河·文·河村(1989): 傳達影響係數法による多層構造物の自由振動解析(第3報, 分布系に對する定式化). 日本機械學會論文集, 55-516(C), 1948-1956.
- 6) 末岡·近藤·山河·文(1989): 傳達影響係數法による多層構造物の自由振動解析(第4報, 分布系二層構造物の數値計算結果). 日本機械學會論文集 55-516(C), 1957-1964.
- 7) Pestel, E.C. and Leckie, F.A. (1963): Matrix Methods in Elastomechanics. McGraw-Hill, 192, 323.
- 8) 柴田(1967): Matrix構造解析講座. 鋼構造協會誌, 3-22, 71.
- 9) 稻垣(1987): 로-타·架台(または케-싱)系振動數値解析法(Myklestad-Prohl傳達マトリックス法を基本とする手法). 日本機械學會論文集, 53-491(C), 1329.
- 10) 谷口(1975): 振動工學ハンドブック, 養賢堂, 202.