

국부범함수를 사용한 교류자장 문제의 유한요소 해석

김원범, 정현교

강원대학교 전기공학과

고창섭, 한송엽

서울대학교 전기공학과

(1991년 9월 13일 받음)

개 영역 교류자장 문제 해석을 위해 국부범함수를 사용한 변분법을 제시한다. 이 방법에 사용되는 국부범함수는 유한요소영역에 대한 영역적 분항과 유한요소영역과 무한요소영역 사이의 공유경계면에 대한 경계적분항의 합으로써 이루어진다. 경계적분항은 무한 계산영역에 대한 범함수의 유한요소영역에 대한 영역적분항을 공유경계면에 대한 경계적분항으로 치환시킴으로써 얻어진다. 본 논문에서 제시한 방법을 이론해를 알고 있는 모델에 적용시켜 수치해석 결과를 얻고 그 결과를 이론해와 비교하여 보았다. 본 방법을 사용함으로써 이론해와 잘 일치하는 수치해석 결과를 얻었으며, 그리고 개 영역 교류자장 문제해석에 있어서 계산영역을 축소시킬 수 있기 때문에 컴퓨터 기억용량 감소 및 계산시간을 대폭 단축시킬 수 있을 것이다.

I. 서 론

개 영역 자장문제는 전기기계 해석시 종종 대두된다. 예를들면 공심 전기기계 또는 직선운동 전기기계 해석시 개 영역 자장문제를 다루어야 한다. 이러한 개 영역 자장해석에 지금까지 수치해석법으로서 유한요소법이 많이 적용되어져 왔다.^[1,2] 그러나 이 방법은 반드시 폐 경계조건을 필요로 하기 때문에 개 영역 문제 해석시에는 임의의 폐 경계를 설정하여야 한다. 따라서 폐 경계 설정에 따르는 계산오차를 유발시킬 수 있고, 한편으로는 우리가 원하는 정도의 정확한 결과를 얻기 위한 폐 경계설정 기준도 불분명한 문제점이 있다. 이때 보다 정확한 해를 얻기 위해서는 임의의 폐 경계를 자계원으로 부터 가능한한 멀리 설정하는 것이 최선이다. 그러나 이 경우 미지수의 갯수가 증가하여 컴퓨터 기억용량이 매우 커야하고 계산시간도 많이 소요되어 비경제적이다. 이러한 문제는 3차원 문제 해석시에는 보다 심각해진다. 따라서 근래에는 개 영역 문제를 효율적으로 다룰 수 있는 방법들이 제시되었다.^[3-7] 이들중 한 방법이 국부범함수^[6,7]를 사용하여 무한영역의 정보를 유한영역의 경계적분으로 치환시키는 것이다. 국부범함수는 두

종류의 적분항을 갖게 된다. 두 종류의 적분항은 자계원이나 비선형 매질 등을 포함하는 유한요소영역에 대한 영역적분항 및 이 영역 이외의 무한요소영역에 대한 영역적분항으로 부터 치환된 공유경계적분항이 된다. 이때 유한요소영역과 무한요소영역 사이의 공유경계는 임의로 취하게 된다. 이와같이 무한영역에 대한 무한적분공간이 유한요소영역에 대한 유한적분공간으로 축소됨으로써 정확한 해를 얻기 위한 미지수의 갯수를 대폭 줄일 수 있고 계산시간도 단축시킬 수 있다.

앞서 언급한 논문에서 제시된 방법들은 모두 정사장 해석을 위한 것들이다. 본 논문에서는 국부범함수를 사용한 알고리즘을 2차원 교류자장 문제해석에 확장 적용시키고자 한다. 본 논문에서 제시된 알고리즘을 이론해가 존재하는 간단한 2차원 교류자장 문제에 적용시켜 수치해석 결과를 얻고 그 결과를 이론해와 비교함으로써 본 알고리즘의 유용성을 검토한다.

II. 기본 방정식

1. 지배 방정식

교류자장 문제의 지배방정식은 다음의 맥스웰 방정식

과 몇개의 관계식들로 부터 유도된다. 즉,

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J}_c + \bar{J}_s, \quad (1)$$

$$\bar{J}_c = \sigma \bar{E}, \quad (2)$$

$$\bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H}, \quad (4)$$

여기서

- \bar{H} : 자계의 세기,
- \bar{J}_s : 자계원의 전류밀도
- \bar{J}_c : 유도된 전류밀도
- \bar{E} : 전계의 세기,
- σ : 도체의 도전율,
- \bar{B} : 자속밀도
- μ : 자성체의 투자율,

그리고 \bar{A} 는

$$\bar{\nabla} \times \bar{A} = \bar{B} \quad (5)$$

로 정의되는 자기벡터 포텐셜이다.

식(1)에 식(2), (3), (4) 및 (5)의 관계식들을 대입하면

$$\bar{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu} \bar{\nabla} \times \bar{A} \right) = \bar{J}_s - \sigma \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \quad (6)$$

인 편미분 방정식을 얻을 수 있다. 여기서 자계원 \bar{J}_s 가 시간에 대해 정현적으로 변한다고 가정하면 벡터 포텐셜 \bar{A} 또한 시간에 대해 정현적으로 변한다. 즉, \bar{J}_s 와 \bar{A} 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{J}_s = \bar{J}'_s e^{j\omega t}, \quad (7)$$

$$\bar{A} = \bar{A}' e^{j\omega t}, \quad (8)$$

여기서 ω 는 각주파수이다.

식(7) 및 (8)을 식(6)에 대입하고 $\bar{\nabla} \cdot \bar{A} = 0$ 인 쿨롱게이지를 적용하면 식(6)은

$$\nabla^2 \bar{A}' = -\mu \bar{J}'_s + j\omega\mu\sigma \bar{A}' \quad (9)$$

와 같이 된다. 식(9)는, 2차원 문제에서 자계원 \bar{J}_s 가 z축 방향 성분만을 갖게 되므로 $\bar{J}'_s = J'_s \hat{z}$ 및 $\bar{A}' = A' \hat{z}$ 라고 가정하면

$$\nabla^2 A' = -\mu J'_s + j\omega\mu\sigma A' \quad (10)$$

와 같은 스칼라 편미분 방정식으로 바뀌게 된다. 식(10)이 2차원 교류자장문제의 지배방정식이 된다.

전체 계산영역을 그림 1. 과 같이 두 영역, 즉, 유한요소영역 R_1 및 무한 영역 R_2 로 나누면 공유 경계 Γ 가 존재한다.

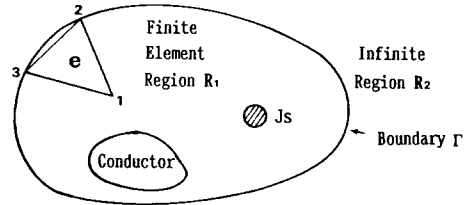


Fig. 1. Division of computing region.

각 영역에서의 벡터 포텐셜을 각각 A_1, A_2 라고 하면 각 영역에 대한 지배 방정식은 식(10)으로 부터

$$\text{영역 } R_1 \text{에서, } \nabla^2 A_1 = -\mu_1 J'_s + j\omega\mu_1\sigma A_1, \quad (11)$$

$$\text{영역 } R_2 \text{에서, } \nabla^2 A_2 = 0 \quad (12)$$

와 같이 된다. 그리고 공유 경계 Γ 에서는 자계의 연속 조건들로 부터

$$A_1 = A_2 \quad (13)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial n_1} = -\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_2}{\partial n_2} \quad (14)$$

의 경계조건을 갖게 된다. 여기서 μ_1, μ_2 는 각 영역의 투자율이고 n_1, n_2 는 각 영역으로 부터의 외향 단위 법선벡터를 나타낸다.

2. 국부범함수

그림 1의 영역 R_1 에 대해 기존 유한요소법을 적용하는데 있어서 변분법을 사용하려면 먼저 범함수를 구해야 한다. 이때 식(11)은 구하려는 범함수 π 의 Euler-Lagrange 방정식이 되므로 경계조건들인 식(13), (14)와 함께 범함수의 1차변분을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta \pi = & \int_{R_1} -\delta A_1 (V_1 \nabla^2 A_1 - j \omega \sigma A_1 + J'_s) dR \\ & + \int_{\Gamma} \delta A_1 (V_1 A_{1n} + V_2 A_{2n}) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} \delta (V_2 A_{2n}) (A_2 - A_1) d\Gamma \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 V_1 과 V_2 는 각각 $1/\mu_1$ 과 $1/\mu_2$ 이고 A_{1n} 과 A_{2n} 은 각각 $\partial A_1/\partial n_1$ 과 $\partial A_2/\partial n_2$ 를 나타낸다.

식 (15)를 몇가지 수학적연산으로 변형시키면

$$\begin{aligned} \delta \pi = & \int_{R_1} \delta \left[\frac{1}{2} V_1 (\nabla A_1)^2 + j \frac{\omega \sigma}{2} A_1^2 + J'_s A_1 \right] dR \\ & + \int_{\Gamma} \delta [V_2 A_{2n} (A_1 - \frac{1}{2} A_2)] d\Gamma \end{aligned} \quad (16)$$

이 된다. 따라서 범함수 π 는

$$\begin{aligned} \pi = & \int_{R_1} \left[\frac{1}{2} V_1 (\nabla A_1)^2 + j \frac{\omega \sigma}{2} A_1^2 + J'_s A_1 \right] dR \\ & + \int_{\Gamma} [V_2 A_{2n} (A_1 - \frac{1}{2} A_2)] d\Gamma \end{aligned} \quad (17)$$

로 얻어진다. 식(17)이 무한한 계산영역중 유한요소영역인 R_1 만에 대한 범함수인 국부 범함수(Localized Function)가 된다.

3. 요소 매트릭스 방정식

그림 1에서와 같이 공유경계 Γ 에 인접한 1차 삼각형 요소 e 를 생각하자. 그리고 요소 내에서의 벡터포텐셜 $A_e(x, y)$ 와 영역 R_2 내에서의 벡터포텐셜 $A_2(x, y)$ 를

$$A_e(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) A_i \quad (18)$$

$$A_2(x, y) = \sum_{j=1}^n C_j U_j(x, y) \quad (19)$$

와 같이 근사화 시킨다.

여기서 N_i : 정점 i 에서의 보간함수,

A_i : 정점 i 에서의 벡터 포텐셜값,

U_j : j 번째 고유함수 (eigenfunction),

C_j : 상수,

n : A_2 의 근사화에 사용된 고유함수의 갯수.

를 나타낸다.

요소 매트릭스방정식은 식(18)과 (19)를 식(17)에 대입한후 범함수 π 가 최소가 되도록하는 조건으로 부터 유도된다. 즉,

$$\frac{\partial \pi}{\partial A_i} = 0, \quad i=1,2,3 \quad (20)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial C_j} = 0, \quad j=1,2,\dots,n \quad (21)$$

식(20)과 (21)로 부터 유도된 매트릭스 식을

$$\begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} 3 \\ \vdots \\ n \end{array} \right\} \begin{array}{|c|c|} \hline \overbrace{\begin{array}{cc} S_{11} & S_{12} \end{array}}^3 & \overbrace{\begin{array}{c} \vdots \\ S_{21} & S_{22} \end{array}}^n \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ C_1 \\ \vdots \\ C_n \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline F_1 \\ \vdots \\ F_2 \\ \hline \end{array} \quad (22)$$

와 같이 표현하면, 매트릭스의 각 요소들은

$$|S_{11}|_{ij} = \frac{V^e}{4\Delta^e} (b_i b_j + C_i C_j) + \frac{i \omega \sigma \Delta^e}{12} \begin{cases} 2, & i=j \\ 1, & i \neq j \end{cases}$$

$$|S_{12}|_{ij} = |S_{21}|_{ji} = \int_{\Gamma} V_2 N_i U_{j,n} d\Gamma,$$

$$|S_{22}|_{ij} = - \int_{\Gamma} \frac{V_2}{2} |U_{i,n} U_j + U_{j,n} U_i| d\Gamma,$$

$$|F_1|_i = \frac{J'_s \Delta^e}{3},$$

$$|F_2|_i = 0,$$

와 같이 된다. 여기서,

$$U_{i,n} = \frac{\partial U_i}{\partial n},$$

$$N_i = \frac{a_i + b_i X + c_i Y}{2\Delta^e},$$

$$a_i = X_j Y_k - X_k Y_j, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \text{의 순환}$$

$$b_i = Y_j - Y_k,$$

$$c_i = X_k - X_j,$$

$$\Delta^e: \text{삼각형의 면적,}$$

이 된다. 최종적으로 식(22)를 모든 경계요소에 대해 그리고 식(22)의 S_{11} 부분을 모든 유한요소영역 내의 요소들에 대해 얻은 후 조합하면 최종적으로 시스템매트릭스 방정식을 얻을 수 있다.

III. 사례연구

그림 2와 같이 시간에 대해 정현적으로 변하는 교류자장 내에 무한 길이의 원통형 도체가 존재하는 와류문제를 2차원 문제로 모델링하여 제시된 알고리즘을 적용시

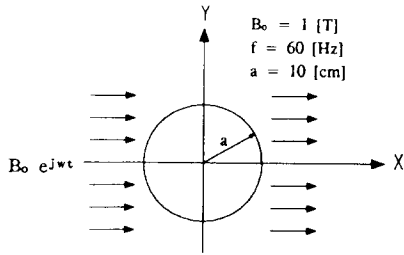


Fig. 2. Conductive cylinder in a transverse alternating magnetic field.

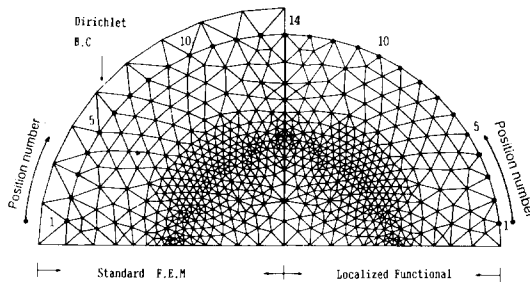


Fig. 3. Element discretization for numerical analysis.

켜 보았다. 인가된 자속밀도의 최대치는 1 T, 주파수는 60 Hz 이고 도체의 반경은 10 cm이다. 이때 도체의 도전율은 구리의 도전율을 사용하였고 따라서 비투자율은 1로 주었다. 이 모델의 대칭성을 고려하여 4분의 1 평면만 해석하였으며, 국부범함수 알고리즘 및 기존의 유한요소법을 적용시키기 위한 요소분할은 그림 3과 같이 주어진다. 그림 3의 오른쪽 4분의 1 원의 요소 분할도는 국부범함수 알고리즘을 적용시키기 위한 것이고, 왼쪽 요소분할도는 오른쪽 요소 분할도에 한 층의 요소를 더하여 얻은 것으로서, 그 경계에 인가된 자장값으로 주어지는 Dirichlet 경계조건을 부여하여 기존 유한요소법을 적용시키기 위한 것이다. 이것은 두 경우의 미지수의 갯수가 같도록 한 조건하에서 두 알고리즘의 결과를 비교하기 위한 것이다. 이때 사용한 요소는 1차 삼각형요소이고, 국부범함수 알고리즘을 위한 무한영역에서의 벡터포텐셜 함수는

$$A_2 = B_0 r \sin\theta + C_1 \sin\theta/r \quad (23)$$

로 가정한다. 여기서 B_0 는 인가된 자속밀도의 최대값이고 복소계수 C_1 는 결정되어야 할 미지수이다.

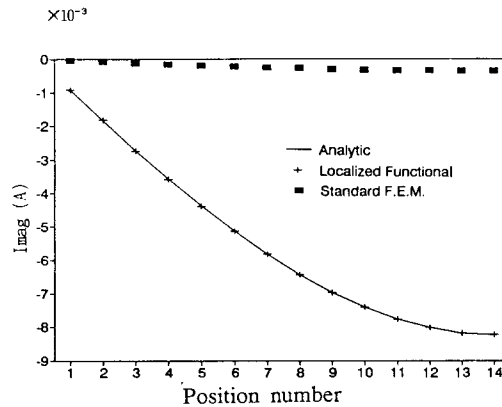
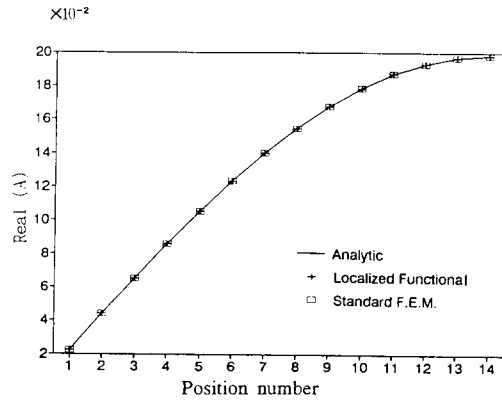


Fig. 4. Comparisons of vector potentials on boundary nodes.

- (a): Real parts of vector potentials.
- (b): Imaginary parts of vector potentials.

그림 4는 그림 2의 모델에 대한 해석적인 해[8], 국부범함수를 사용한 결과 및 기존 유한요소법의 결과들을 그림 3에 표시한 경계위의 점들에서 비교한 것이다. 그림 4(a)는 벡터포텐셜의 실수부를 비교한 것으로서 두 경우 모두 해석적인 해와 잘 일치하고 있다. 그러나 그림 4(b)는 벡터포텐셜의 허수부를 비교한 것을 나타내는데 국부범함수를 사용한 경우는 역시 해석적인 해와 잘 일치하지만 기존 유한요소법에 의한 것은 많은 오차를 포함하고 있는 것을 볼 수 있다. 이것은 경계조건을 정확히 설정하지 못한 결과로서 발생한 오차이다. 이와 같은 결과는 그림 5의 등포텐셜곡선에서도 잘 볼 수 있

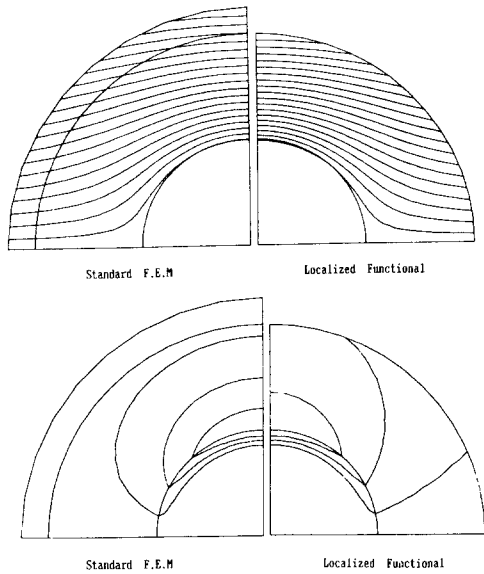


Fig. 5. Vector potential contours.
 (a) Real part contour.
 (b) Imaginary part contour.

다.

그림 5(a)는 등포텐셜 실수부를 그린 것이므로 두 경우가 잘 일치하고 있지만, 등포텐셜 허수부를 그린 그림 5(b)에서는 두 경우가 많은 차이를 보이고 있다. 그림 5(b)의 왼쪽 부분은 잘못된 폐 경계설정에 따라 등포텐셜이 내부로 밀집된 것이다. 물론 이 경우도 폐 경계를 중심으로부터 매우 멀리 설정하여 많은 갯수의 요소를 사용하면 그림의 오른쪽과 같은 결과를 얻을 수 있다. 그러나 그것을 위해서는 많은 계산 노력이 더 필요하게 된다.

IV. 결 론

2차원 개 영역 교류자장 수치해석을 위해 벡터포텐셜을 사용하여 유도된 국부범함수를 이용한 새로운 변분법을 제시하였다. 본 방법에서 이용된 국부범함수는 무한영역의 영역적분항 대신 임의의 경계내의 영역적분

항과 그 경계에 대한 경계적분항으로써 구성된다. 그리고 임의의 경계 내의 유한영역에는 기존의 유한요소법을 적용시켰고, 그 외의 무한영역에서의 벡터포텐셜 함수는 고유함수들으로써 표시하였다.

제시된 방법을 해석적인 해를 알고 있는 간단한 모델에 적용시켜 수치해석 결과를 얻고 그 결과를 해석적인 해 및 기존 유한요소법에 의한 결과와 비교하여 보았다. 본 방법을 사용하여 같은 계산 노력하에서 기존 유한요소법 보다 매우 정확한 결과를 얻을 수 있었다. 따라서 본 방법은 개 영역교류자장 문제해석에 유력한 수법이 될 것으로 사료된다. 그리고 본 알고리즘을 3차원 문제에 확장 적용시킬 수 있도록 앞으로 연구되어져야 할 것이다.

감사의 글

이 논문은 1990년도 문교부지원 한국학술진흥재단의 지방대육성 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.

참 고 문 헌

- [1] O. C Zienkiewicz, The Finite Element Method, McGraw-Hill, London, 1977. pp. 440 - 445.
- [2] M. V. K. Chari and p. p. Silvester, Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems, John Wiley & Sons. Ltd, 1979, pp.25-29.
- [3] A. Trokov and W. L. Wood, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **15**(1), 1083(1980).
- [4] I. H. Kim, H. K. Jung, G. S. Lee, and S. Y. Hahn, Journal of Applied Physics, **53**, 8372(1982).
- [5] H. K. Jung, G. S. Lee, and S. Y. Hahn, Journal of Applied physics, **56**(5), 2201(1984).
- [6] H. K. Jung, G. S. Lee, and S. Y. Hahn, IEEE Trans. on Magnetics, **21**(5) 2118(1985).
- [7] H. K. Jung, G. S. Lee, and S. Y. Hahn, IEEE Trans. on Magnetics, **21**(6), 2196(1985).
- [8] Milos Staff, Electrodynamics of Electrical Machines, ILIFFE, Books Ltd., London, 1967, pp.140-144.

Finite-Element Analysis with Localized Functional for Alternating Magnetic Field Problems

W. B. Kim and H. K. Jung

Dept. of Electrical Engineering, Kangweon National University

C. S. Koh and S. Y. Hahn

Dept. of Electrical Engineering, Seoul National University

(Received 13 September 1991)

A variational approach employing localized functional is presented to solve alternating magnetic field problems with open boundary. The functional used in the approach consists of the domain integral of finite element region only and the boundary integral of the interfacial boundary between the finite and infinite element regions. The boundary integral is obtained by transforming the infinite domain integral for the infinite element region into the interfacial boundary integral. The proposed algorithm is then applied to a simple two-dimensional problem where the analytic solutions are available. It is shown that the algorithm makes it possible to yield good agreements between the numerical and analytic solutions, and that it requires less computer storage memory and computation time than the conventional finite element method due to the reduction of the computing region.