論 文

순위 통계량으로 확률 신호를 검파하는 방법 : 제2부. 두 표본을 쓸 때

正會員 宋 翊 鎬* 正會員 韓 永 玉** 正會員 嚴 泰 相*
正會員 吳 澤 相*** 正會員 柳 興 均****

Methods of Random Signal Detection with Rank Statistics : Part 2. The Two-Sqample Case

Iickho SONG,* Youngok HAN**, Tae Sang UHM,*
Taek Sang OH*,** Heung Gyoon RYU**** *Regular Members*

要 約 두 표본을 쓸 수 있을 때 순위 통계량을 써서 가산성 잡음이 섞여 있는 확률 신호를 검파하는 국소 최적 순위 검파기를 얻었다. 이 검파기는 확률 신호를 검파하는 국소 최적 검파기나 한 표본을 쓰는 국소 최적 순위 검파기와 비슷한 얼개를 가지며, 알려진 신호를 검파하는 두 표본 국소 최적 순위 검파기를 일반화한 꼴을 가진다는 것을 보였다. 뿐만 아니라, 입력이 여러개 있을 때에 확률 신호를 국소 최적 순위 검파하는 문제도 간략히 살펴보았다.

ABSTRACT The two-sample locally optimum rank detection scheme is obtained which uses rank and sign statistics for detection of random signals in additive noise. It is shown that the detector is similar in structure to the locally optimum detector for random signals and to the one-sample locally optimum rank detector for random signals. It is also shown that the detector is a generalization of the two-sample locally optimum rank detector for known signals. In addition, the problem of two-sample locally optimum rank detection of random signals in multiple-input case is considered briefly.

I. 머릿말

가산성 잡음이 섞여 있는 약한 알려진 신호나 (known signal) 약한 확률 신호를(randon signal) 검파하는 국소 최적(locally optimum, LO) 검파[1][2], 약한 알려진 신호를 검파하는 한 표본 (one-sample) 국소 최적 순위(locally optimum rank, LOR) 검파[3], 일반화된 관측 모형에서 국소 최적 검파[4][5], 복합 신호(composite signal) 모형에서 국소 최적 검파[6], 퍼지이론을(fuzzy set theory) 응용한 국소 최적 검파와[7] 같은 약한 신호를 검파하는 문제는[8-12] 요즈음까지 많이 연구되고 있다.

신호대 잡음비가 0에 가까울 때 여러 검파기 가운데에서 가장 좋은 성능을 내는 국소 최적 검파기는 일반적으로 검파하기 어려운 약한 신호 검파 분야에서 매우 흥미로운 주제가 되어 왔다. 더욱이, 국소 최적 검파기는 다른 검파기들과 견주어 볼 때 구현하기 쉬운 얼개를 가지며, 최적(optimum) 검파기 또는 균일 최강(uniformly most powerful) 검파기보다 성능 해석이 쉽다는 좋은 점을 가지고 있다. 국소 최적 검파기나 국소 최적 순위 검파기의 얼개는 알려진 신호를 알고 있거나 신호 공분산 함수를 알고 있으면 얻을 수 있고 그 밖에는 일반적으로 신호에 대한 다른 특별한 정보를 필요로 하지 않는다

*韓國科學技術院 電氣및 電子工學科
Department of Electrical Engineering
Korea Advanced Institute of Science and Technology
**三星電子半導體部門
Semiconductor Business Samsung Electronics
***金星 中央研究所
Goldstar Central Research Laboratory
****忠北大學校 電子工學科
Department of Electronics Engineering
Chung Buk National University
論文番號 : 91-42(接受1991. 1. 25)

는 것이 알려져 있다. 이 논문에서도 우리는 두 표본을 써서 평균이 0인 약한 확률 신호를 검파할 때 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량이 (test statistic) 신호의 확률 밀도 함수의 꼴에 따라 바뀌지 않는다는 것을 보게 될 것이다.

이 논문에서는, 순위 검정이라는 (rank test)[13][14] 통계학 방법을 써서 가산성 잡음이 섞여 있을 때 평균이 0인 약한 확률 신호를 검파하는 문제를 생각할 것이다. 바꿔 말하면, 가산성 잡음이 있고 두 표본을 쓸 수 있을 때, 곧 잡음만이 있는 기준 표본과(reference sample) 신호와 잡음이 함께 있을 수 있는 보통 표본을 모두 쓸 수 있을 때, 평균이 0인 약한 확률 신호를 검파하는 국소 최적 순위 검파를 얻을 것이다.

Ⅱ. 두 표본을 쓸 때 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량

2.1. 관측 모형

가산성 잡음이 섞여 있는 신호를 검파하려 할 때 m 개의 기준 관측으로, 곧 잡음 뿐인 관측으로, 이루어진 기준 표본과 잡음과 신호가 함께 있을 수 있는 보통 관측 n개로 이루어진 보통 표본을 함께 쓴다면 다음과 같이 관측 모형을 나타낼 수 있다.

$$X_i = \begin{cases} \theta V_i + W_i, & i=1, 2,\cdots,n \\ W_i, & i=n+1,\cdots,n+m \end{cases} \tag{1}$$

여기서, n은 입력 경로에 보이는 보통 표본의 크기이고(sample size), m은 기준 표본의 크기이며, V_i는 i번째 표본을 얻는 순간의 공통 신호 성분이고, θ는 귀무 가설 아래에서는 0, 대립 가설 아래에서는 0보다 큰 값을 가지는 신호세기 매개변수이며, W_i는 가산성 잡음이다. 일반적으로 $V_i=\varepsilon_i+S_i$로 쓸 수 있는데, 이때 $E\{V_i\}=\varepsilon_i$는 알려진 신호 성분을 나타내고 S_i는 공분산 함수 $K_S(i, k)=E\{S_iS_k\}$를 가지고 평균이 0인 확률 신호를 나타낸다. 이 논문에서는 $e_i=0$인 때 만을 생각하기로 하자. 잡음 성분 W_i는 공통 확률 밀도 함수 f_W, 평균 0, 분산 σ^2_W인 독립이고 같은 분포를 갖는 (independent and identically distributed, i.i.d) 확률 변수이고 신호와 잡음은 통계학적으로 독립이라 가정한다.

2.2. 지난 결과 검토

기준 표본과 보통 표본을 쓸 수 있을 때, 알려진 신호를 검파하는 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량은 다음과 같이 나타난다[3]

$$T_{LOR}(X)=\sum_{i=1}^{n} e_i a_1(R_i) \tag{2}$$

(2)에서

$$a_1(i)=E\{g(X[i])\} \tag{3}$$

이고

$$g(x)=-\frac{f_W'(x)}{f_W(x)} \tag{4}$$

이며 X[i]는 집합 $M=\{X_1, X_2,\cdots, X_n\}$의 i번째 순서 통계량이다 (i th order statistic). 또한 R_i는 집합 $M=\{X_1, X_2,\cdots X_n, X_{n+1},\cdots X_{n+m}\}$에서 X_i의 순위이고 (rank) 윗 첨자 kl는 알려진 신호와(known signal) 두 표본을(two sample) 나타낸다. (2)에서 합의 상한은 $n+m$이 아니라 n임을 눈여겨 보아야 한다.

한편 한 표본을 쓸 때(보통 표본만을 쓸 때) 확률 신호를 검파하는 국소 최적 검파기의 검정 통계량은 다음과 같이 쓸 수 있음이 알려져 있다[2];

$$T_{LO}(X)=\sum_{i}\sum_{k} K_S(i, k)g(X_i)g(X_k) + \sum_{i} \sigma_i[h(X_i)-g^2(X_i)] \tag{5}$$

여기서

$$h(x)=\frac{f'_w(x)}{f_w(x)} \tag{6}$$

이고 $\sigma^2_i=r_s(i,\ i)$는 S_i의 분산이다. 또한 한 표본을 쓸 때(보통 표본만을 쓸 때) 확률 신호를 검파하는 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량은[15]

$$T_{LOR}(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} r_s(i,\ k)Z_iZ_kc_2(Q_i,\ Q_k) + \sum_{i=1}^{n}\sigma_i[d(Q_i)-c_2(Q_i,\ Q_i)] \tag{7}$$

이다. 여기서 $Z=(Z_1, Z_2,\cdots,Z_n)$은 $X=(X_1, X_2,\cdots X_n)$의 부호 통계량 벡터이고 (sign statistic vector), Q_i는 집합 $\{|X_1|, |X_2|,\cdots,|X_n|\}$에서 $|X_i|$의 순위이며(크기 순위, magnitude rank),

$$c_2(i,\ k)=E\{g(|X|_{[i]})g(|X|_{[k]})\}, \tag{8}$$

$$d(i)=E\{h(|X|_{[i]})\}, \tag{9}$$

이고 $|X|_{[i]}$은 $\{|X_1|, |X_2|,\cdots|X_n|\}$의 i번째 순서 통계량이다.

2.3. 두 표본을 쓰는 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량

모형(1)에서 확률 신호를 검파하는 국소 최적 순위 검파기를 얻는 문제는 가설 검정 문제로 생각할 수 있는데, 이 때 귀무 가설과 대립 가설은 각각

$$H:f(x)=\prod_{i=1}^{n+m} f_w(x_i) \tag{10}$$

및

$$K:f(x)=\prod_{i=n+1}^{n+m} f_w(x_i) \int_{R^n} f_S(s) \prod_{i=1}^{n} f_w(x_i-\theta s_i)ds \tag{11}$$

이다. 여기서 R^n은 n차원 실수 공간을 나타낸다. 위 귀무가설과 대립 가설을 수학적으로 조금 바꿔 주면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H:P(r)=\frac{1}{(n+m)!} \tag{12}$$

및

$$K:P(r)=\int_A f(x|k)dx \tag{13}$$

(13)에서 $A=\{x : R=r\}$이고 $R=(R_1, R_2,\cdots R_{n+m})$은 M'의 순위 통계량 벡터이다. 한 표본을 쓰는 국소 최적 순위 검파기 검정 통계량을 얻을 때와 마찬가지로 일반화된 Neyman-Pearson 정리를 [16, 17]을 쓰면 두 표본을 쓰는 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량은 다음과 같음을 보일 수 있다.

$$T_{LOR}(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} r_s(i,\ k)a_2(R_i,\ R_k) + \sum_{i=1}^{n}\sigma_i[b(R_i)-a_2(R_i,\ R_i)] \tag{14}$$

(14)에서

$$a_2(i,\ k)=E\{g(X[i])g(X[k])\} \tag{15}$$

이고

$$b(i)=E\{h(X[i])\} \tag{16}$$

이다.

(2)에서와 마찬가지로 (14)에서 더해지는 항은 처음 n개임을 눈여겨 보아야 한다. 곧, 보통 관측의 순위만이 검정 통계량을 얻는데 직접 쓰이고 기준 관측들은 다만 보통 관측들의 순위를 결정짓는 데에만 쓰일 뿐이다. (5), (7) 및 (14)를 견주어 보면 T''_{LOR}은 T'_{LO}와 T'''_{LOR}와 비슷한 꼴을 가지고 있음을 쉽게 알 수 있다. 다시 말해, T'_{LO}에서 $g(X_i)g(X_k)$를 $a_2(R_i,\ R_k)$로, h를 b로 바꾸어 쓰거나, T'''_{LOR}에서 c_2를 a_2로 d를 b로 바꾸고 부호 통계량을 빼면 각각 T'_{LOI}과 T'''_{LOR}로 부터 T''_{LOR}을 얻을 수 있다.

검정 통계량 (14)는 직관적으로 다음과 같이 풀이할 수 있다. 어떤 관측에 신호 성분이 있으

면 집합 M에서 그 관측의 순위는 신호 성분의 부호에 따라 1 또는 $n+m$에 가까와진다. 왜냐하면 신호 성분을 가지는 관측값은 절대값이 크기 때문이다. (14)에서 score 함수 $b(i)$는 i가 1이나 $n+m$에 가까울 때에 그렇지 않을 때보다 큰 값을 가지기 때문에 결과적으로 $b(i)$를 포함하는 항은 큰 값을 가진다. 다음으로 $r_s(i, k)$가 양이면 $a_2(R_i, R_k)$는 0보다 큰 값을 가지려는 경향이 있고, $r_s(i, k)$가 음이면 $a_2(R_i, R_k)$는 0보다 작은 값을 가지려는 경향이 있다. 곧, (14)에서 거듭합의 결과는 관측값이 신호 성분을 가질 때 큰 값을 가지게 된다.

Ⅲ. 여러 입력과 두 표본을 쓰는 국소 최적 순위 검파기

실제로 확률 신호 검파를 포함하는 대부분의 응용에서 관측값의 모임인 표본은 배열을(array) 이루고 있는 여러 수신기로 부터 같은 때에 얻게 된다. 이 때 검파 문제는 표본을 얻는 순간에 여러 수신기 관측값에 공통으로 들어 있는 약한 확률 신호를 검파하는 문제가 된다. 그러면 이때에는 잡음은 서로 상관성이 없고 배열을 이루는 각 수신기의 출력은 공통 신호 성분을 가지기 때문에 많은 연관성을 가지게 되므로 수신기 배열을(receiver array) 쓰는 검파기의 성능은 표본을 하나만 쓸 때보다 훨씬 좋아지게 된다. 곧, 수신기 배열을 쓰는 검파기의 신호 검파력은 수신기를 하나 쓰는 검파기의 검파력에 비해 크게 높아질 것이다. 그 뿐만 아니라 수신기가 하나일 때는 배열 모형의 특수한 때로 생각할 수 있다.

입력이 여러개 있을 때에도(수신기 배열을 쓸 때에도) 앞 절에서 얻은 두 표본 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량과 비슷한 결과를 얻을 수 있다. 그 유도 과정은 꽤 길고 복잡하기 때문에 자세한 과정은 생략하고 그 결과만 보면 다음과 같다. 잡음만을 가지는 기준 관측 $X_{kl}=W_{kl}$, $k=L+1, L+2, \cdots L+m$ 들을 각 시간 지표 i에서 보통 관측 $X_{ji}=\theta S_i+W_{ji}$, $i=1, 2, \cdots, n$, $j=1, 2, \cdots L$과 독립적으로 얻을 수 있다고 가정하면 수신기 배열에서 나오는 여러 입력을 쓸 때 두 표본 확률 신호 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량은

$$T_{LOR}(X)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{L} r_s(i, k)a_1(R_{ji}, R_{lk})$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{L}\sigma_i[b(R_{ji})-a_1(R_{ji}, R_{ji})] \qquad (17)$$

임을 보일 수 있다. 여기서 R_{ji}는 $M=L+m$일 때 집합 $X_i=\{X_{1i}, X_{2i}\cdots, X_{Mi}\}$에서 X_{ji}의 순위이다.

Ⅳ. 맺음말

이 논문에서 우리는 가산성 잡음이 있을 때 두 표본을 쓰는 약한 확률 신호의 국소 최적 순위 검파를 생각했다. 두 표본을 쓸 때 확률 신호를 검파하는 국소 최적 검파기의 검정통계량을 얻었는데, 이 검정통계는 확률신호를 검파하는 국소최적 검파기의 검정 통계량과 비슷하고 한 표본을 쓸 때 확률 신호를 검파하는 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량과도 비슷한 꼴임을 알았다. 또한 이 검정 통계량은 알려진 신호를 검파하는 두 표본 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량을 일반화한 꼴임을 보였다. 좀더 실제적인 문제로 입력이 여러개 있을 때 두 표본을 써서 확률 신호를 검파하는 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량을 살펴보았다.

參 考 文 獻

1. J.H. Miller and J.B. Thomas, "Detectors for Discrete Time Signals in Non Gaussian Noise", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT 18, pp. 241~250, Merch 1972.
2. H.V. Poor and J.B. Thomas, "Locally Optimum Detection of Discrete-Time Stochastic Signals in Non Gaussian Noise", *Jour. Acoust. Soc. Amer.*, vol.