

# 비 최소위상 플랜트에 대한 LQG / LTR에 관한 연구(Ⅱ) : 최적근사 방법의 실현

正會員 康 鎮 植\* 正會員 徐 丙 高\*

## A Study on the LOG / LTR for Nonminimum Phase Plant(Ⅱ) : Realizationforthe Optimal Approximation Method

Jin Shig KANG\* Byung Sul SUH\* *Regular Members*

**要 約** LQG의 강인성 증진을 위하여 제안된 LQG / LTR방법은 비 최소위상 플랜트에 대하여 적용할 수 없는 이론적 제한성을 갖는다. 본 논문에서는 비 최소위상 플랜트에 대해서도 적용될 수 있는 세 단계로 구성된 새로운 LQG / LTR방법을 제안한다. 첫번째 단계로 주어진 비 최소위상 플랜트를 최소위상 플랜트로 근사화시키기 위한 추가적인 feed forward 보상기를 설계하며 다음 단계에서 설계 사양에 맞추어 근사화된 비 최소위상 플랜트에 대하여 목표 루우프를 설계한다. 마지막 단계로 개루우프의 전달함수가 목표 루우프로 회복시키기, LTR을 설계한다. 제안된 방법이 비 최소위상 플랜트에 대한 제약을 해결할 수 있음을 시뮬레이션 예제를 통하여 보인다.

**ABSTRACT** LQG / LTR method suggested to improve robustness of LQG have a theoretical constraint that it cannot apply to nonminimum phase plant(NMP). In this paper, we suggest a new LQG / LTR method for NMP which consist of three design steps. The first step is design a additional feed-forward compensator which approximate the given NMP plant to minimum phase(MP) plant and the next step is design a target loop transfer function for approximated MP plant satisfying the design specifications such as robust-performance and robust stability. The last step is loop transfer recovery(LTR) that the open loop transfer function recovers the target loop. It was shown by simulation example that the suggested method can solve the NMP constraint in designing LQG / LTR.

### I. 서 론

최근 30여년 동안 제어이론 분야중에 가장 활발히 연구되어온 연구분야는 선형 다변수 시스템 보상기 설계방법으로 Inverse Nyquist, Characteristic Root Locus, LQG, LQG / LTR, Hoo등의 방법이 있다.

본 논문의 연구과제인 LQG / LTR(Linear Quadratic Gaussian Loop Transfer Recovery) 방법은 실제적으로 시스템 설계에 많이 활용되어 온 LQG 설계이론에서 발전된 것으로 설계상의 장점을 그대로 유지할 수 있고 구조가 간단하며

설계방법도 비교적 간편하여 엔지니어가 이해하기 쉬운 설계이론이다. 1970년대 까지만 해도 통신 시스템, 항공기, 잠수함, 미사일, 화공 플랜트 등의 주요 산업분야에 가장 성공적으로 사용되어온 LQG 설계이론은 1978년 Doyle<sup>(3)</sup> 예제를 통해 매우 작은 이득여유(gain margin)와 위상여유(phase margin)를 갖는다는 사실을 발표하였다. 이에 대한 개선책으로 1981년 Doyle과 Stein<sup>(5)</sup>은 LQG / LTR방법을 제안하였다. 이 방법은 다이내믹 모델 기준 보상기(Model Based Compensator : MBC)와 플랜트가 직렬 연결된 간단한 구조로 되어 있으며 안정도-강인성 및 성능-강인성을 만족할 수 있도록 칼만필터루프 기법을 이용하여 목표필터루프(Target Filter Loop : TFL)를 설계하고, 루프전달회복함수행렬

\*漢陽大學校 電子通信工學科  
Dept. of Electronic Communication Engineering  
Han Yang University  
論文番號 : 91-92(接受1991. 6. 22)

(loop transfer recovery function matrix)의 특이값을 복표필터루프의 전달함수 행렬의 특이치 루우프 형상(singulae value loop shapping)으로 회복 혹은 근사 시킴으로서 강인성이 보장되도록 다변수 제어시스템을 설계할 수 있는 장점을 가지고 있다. 그러나 이 방법도 우경면 안정점을 갖는(비최소위상 : Non Minimum Phase) 플랜트인 경우에는 루프전달회복(LTR)이 보장될 수 없으며 안정도 강인성과 성능강인성이라는 LQG /LTR 의 축성을 잃게 되어 일반적 피드백 시스템 설계에서 항상 존재하는 비최소위상 문제를 초래한다. 즉, LQG /LTR은 좌경면 안정점을 갖는 플랜트(최소위상 : Minimuim Phase)인 경우에만 루프전달회복이 이루어질 수 있는 제약이 있다.

본 논문에서는 LQG /LTR의 비-최소위상 제한성 해결을 위하여 Suh<sup>1)</sup>가 제시한 모델링 오차의 실현방향인 feed foward보상기를 이용하여 비최소위상 플랜트를 최소위상 플랜트로 변환하고 변환된 최소위상 플랜트에 대하여 LQG /LTR 을 설계하는 새로운 LQG /LTR방법을 제안하며 예제를 통하여 제안한 알고리즘의 타당성을 입증한다.

## II. 본 론

### 2.1 궤환 제어기의 설계목적

보상기 설계를 위한 주요 목적은 플랜트의 출력이 명령 입력(command input)을 가능한 가까이 따르도록 하는 명령추종(command following) 징에 있다. 이를 실현하기 위해 플랜트의 입력과 출력 부분에서 발생하는 외란(disturbance)의 제거, 피이드백을 위한 출력 측정시에 발생하는 센서잡음(sensor noise)의 저감도화(desensitization)가 수반되어야 한다. 그리고 플랜트의 수학적 모델은 실제 플랜트에 대한 불안전 묘사로 모델링 오차가 존재하며 이 오차를 고려한 성능-강인성(performance robustness)과 안정도-강인성(stability robustness)등을

만족하도록 보상기를 설계하여야 한다.

다변수 제어 시스템의 주파수 영역 성능에 대한 이론적, 수학적인 관계식을 고찰하기 위하여 그림 1과 같은 궤환제어 구조를 고려한다.

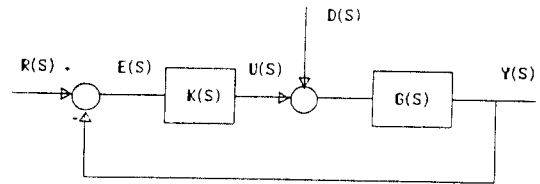


그림 1. 피이드백 제어시스템의 구조  
Fig. 1. Feedback control system structure

여기서,  $R(S)$  : 명령 입력 벡터(command input vector)

$D(S)$  : 외란 벡터(disturbance vector)

$N(S)$  : 센서 잡음 벡터(sensor noise vector)

그림 1에서 주파수 영역 성능 평가지수(index)인 추적오차(tracking error)  $E(S)$ 는 다음과 같다.

$$E(S) = R(S) - Y(S) \\ = S(S) [ R(S) - D(S) ] + C(S) N(S) \quad (1)$$

여기서

$T(S) = G(S) K(S)$  : 루프(loop) TFM

$S(S) = [ I + T(S) ]^{-1}$  : 감도(sensitivity) TFM

$C(S) = S(S) T(S)$  : 폐루프(closed-loop) TFM

그리고 TFM들 사이에는 다음과 같은 구속조건(constraint)식이 성립되어야 한다.

$$S(S) + C(S) = I \quad (2)$$

여기서  $I$ 는 identity matrix이다. 식(1)에 의한 외란의 영향을 줄이기 위해서는 감도 TFM의 크기를 작아야 하며 센서 잡음의 영향을 줄이기 위해서는 폐루프 TFM  $C(S)$ 의 크기가 작아

야 함을 알 수 있다. 그러나 식(2)에 의해 S(S)와 C(S)는 동시에 작아질 수 없어 trade-off 현상이 일어나며 이것을 감도(sensitivity)의 구속 조건이라 한다. 그림 2에 이 조건을 도시하였다.

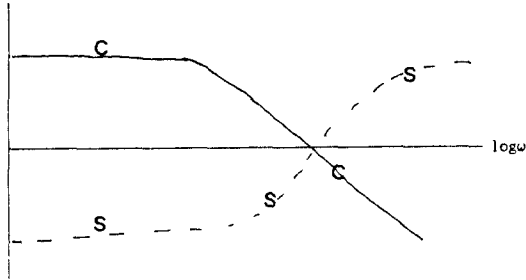


그림 2. 안정도-강인성과 성능-강인성을 위한 개루프전달함수 행렬 및 감도함수 행렬  
Fig 2. Closed loop TFM and sensitivity TFM for stability and performance robustness

그리고 모델링 오차에 대한 안정도-강인성과 성능-강인성을 만족하기 위해서는 다음식들을 만족하여야 한다.<sup>(6)</sup>

$$\sigma_{\max}[G(j\omega)K(j\omega)] < \sigma_{\max} E(j\omega) < 1/e_m(j\omega), \omega > 0 \quad (3)$$

$$\sigma_{\min}[G(j\omega)K(j\omega)] > \frac{ps(j\omega)}{1-e_m(j\omega)} \quad (4)$$

여기서  $E(j\omega) = L(j\omega) - 1$ 는 주파수 영역에서 곱셈형 모델링 오차를 말하며 이것은 최대오차  $e_m(\omega)$ 에 의해  $\sigma_{\max} E(j\omega) < e_m(\omega)$ 를 만족하며  $ps(j\omega)$ 는 주파수 영역에서 최대허용 성능(maximum tolerable performance)을 의미한다. 일반적으로 제어기의 입력 및 출력 신호는 저주파 영역에서 높은 에너지를 갖으며 모델링 오차는 고주파 영역에서 크게 된다. 따라서 개루프 TFM  $G(j\omega)K(j\omega)$ 의 특이치 선도는 저주파 영역에서 식(4)를 만족하며 고주파 영역에서는 식(3)을 만족하여야 한다. 그림 3에 이 조건을 도시하였다.

따라서 제한 제어기의 TFM들은 감도 구속조

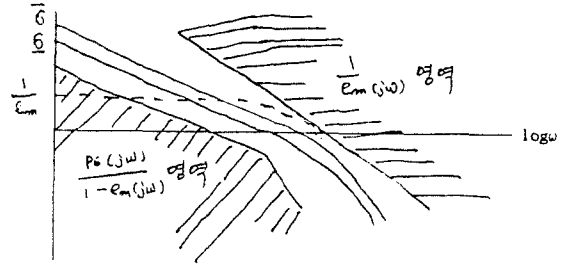


그림 3. 안정도-강인성과 성능-강인성을 위한 개루프전달함수 행렬의 특이치 모양  
Fig 3. Open loop TFM singular value plot for stability and performance robustness

건인 그림 2와 개루프 전달함수 구속조건인 그림 3을 만족하도록 설계되어야 한다.

## 2.2 LQG / LTR 설계 방법

LQG방법이나 LQG / LTR 방법은 설계 파라미터인 필터이득과 제어이득이 분리되어 설계될 수 있다. 따라서 LQG / LTR방법은 주파수 영역의 조건에 맞도록 목표무우프인 KBF(Kalman Filter) 또는 LQR(linear quadratic regulator)를 설계하고 제어기의 개루프(open loop) 전달함수가 목표 무우프에 접근할 수 있도록 설계변수를 선택한다.

### 가. 목표필터무우프(TFL)의 설계

LQG / LTR 방법의 설계절차의 1단계 과정은 목표필터무우프 설계로 주어진 설계사양들을 충족시킬 수 있어야 하며 안정도-강인성 및 성능-강인성이 보장되어야 한다. 이 조건들을 만족하는 필터이득 H를 구하기 위하여 다음과 같은 모델링 오차를 포함하는 TFL 구조를 고려한다.

그림 4에서 TFL 무우프전달함수 행렬  $G_F(S)$ 를 표현하기 위해 무우프를 플랜트 출력에서 또는 오차신호에서 절단하여 표현하면 다음과 같다.

$$G_F(S) = C(SI - A)^{-1}H \quad (5)$$

식(5)를 이용하면 TFL의 감도전달함수 행렬

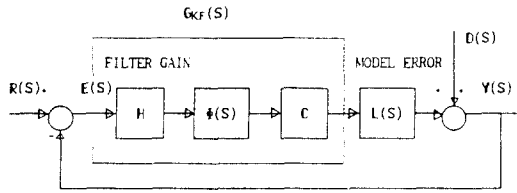


그림 4. 모델링 오차를 갖는 TFM 구조  
Fig. 4. TFM structure with model error

$S_F(S)$ 와 케루프 전달함수 행렬  $G_F(S)$ 는 각각 다음과 같이 정의 된다.

$$S_F(S) = [I + G_F(S)]^{-1} \quad (6)$$

$$C_F(S) = G_F(S) [I + G_F(S)]^{-1} \quad (7)$$

여기서 필터이득행렬  $H$ 는 감도 TFM  $S_F(S)$ 와 케루프 TFM  $T_F(S)$ , 케루프 TFM  $G_F(S)$ 의 특이치 모양이 그림 2와 그림 3을 만족하도록 선정되어야 한다. TFL은 칼만 필터와 구조가 동일하므로 그 설계법을 이용하면 필터이득행렬  $H$ 는 다음과 같다.<sup>(12,4)</sup>

$$H = \frac{1}{\mu} P C^T \quad (8)$$

여기서 행렬  $P$ 는 다음과 같은 칼만대수 Riccati 방정식으로부터 결정된다.

$$AP + PA^T + L L^T - \frac{1}{\mu} P C^T C P = 0 \quad (9)$$

그리고 스칼라  $\mu$ 와 행렬  $L$ 은 다음의 칼만필터의 주파수 영역 등가식(kalman filter frequency domain equality)을 이용하여 선정한다.

$$\begin{bmatrix} I + G_F(S) & [I + G_F(-S)]^T \\ [C\Phi(-S)L]^T & \end{bmatrix} = I + 1/\mu [C\Phi(S)L] \quad (10)$$

$\sigma_{\max}[G_F(S)] \gg 1$ 에 대하여 식(10)은 다음식을

만족한다.<sup>(5,6)</sup>

$$G_F(S) \sim \frac{1}{\mu^{1/2}} C(SI - A)^{-1} L \quad (11)$$

식(11)에서 파라미터 행렬  $L$ 은  $C(SI - A)^{-1} L$ 의 다면수 영점(zero)을 일정하며 주파수 영역에서 특이값 루프 형상(singular value loop shaping)을 조정한다. 그리고 스칼라 설계 파라미터  $\mu$ 는 칼만필터의 루프이득(loop gain)과 대역폭, 교차주파수(crossover frequency)등을 결정한다. 따라서  $L$ 과  $\mu$ 를 적절히 선정함에 따라 목표 필터특성의 특이치를 그림 2와 3의 특이치 모양에 근접시킬 수 있다.

#### 나. 루프전달회복(LTR)

LQG/LTR 보상기의 설계 파라미터인 제어이득행렬  $G$ 를 선정하기 위해서 가중행렬(weighted matrix)  $Q = C^T C$ , 제어 가중 파라미터  $\rho \rightarrow 0$ 로 접근할 때 제어이득행렬  $G$ 는 다음 식으로부터 결정된다.

$$G = \frac{1}{\rho} B^T K \quad (12)$$

이때  $K$ 는 다음의 제어대수 Riccati 방정식으로부터 구한다.

$$-KA - A^T K - C^T C + \frac{1}{\rho} K B B^T K = 0 \quad (13)$$

여기서  $\rho$ 가 0으로 접근할 때 제어이득 행렬  $G$ 의 극한기동은

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{1/2} G \rightarrow UC \quad (14)$$

을 만족하며  $U$ 는  $U^T U = I$ 인 일원행렬(unitary matrix)이다.<sup>(12,5,6)</sup>

제어시스템이 안정하고 위의 극한기동식 (14)이 만족될 때 모델기준 보상기(MBC)의 전달

함수 행렬  $K(S)$ 는 다음과 같은 극한거동을 한다.<sup>(6)</sup>

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} K(S) \rightarrow [C(SI-A)^{-1}B]^{-1} C(SI-A)^{-1}H \\ = G^{-1}(S)G_F(S) \quad (15)$$

LTR 결과식 (15)과 함께 보상된 플랜트 출력 부분에서 절단한 루프전달함수 행렬  $T(S)$ 의 극한거동은 다음과 같다.<sup>(6)</sup>

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} T(S) \rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} G(S)K(S) \\ = G(S)G^{-1}(S)G_F(S) = G_F(S) \quad (16)$$

위의 식은 LQG/LTR 보상은  $\rho$ 가 0으로 접근할 때 플랜트 전달함수 행렬  $G(S)$ 의 역수와 목표필터 루프전달함수  $G_F(S)$ 로 루프전달회복이 이루어짐을 보여주고 있다. 이러한 LTR이 이루어질려면 MBC 보상이 플랜트의 다이내믹스  $G(S)$ 를 삭제(cancellation)시키고 필터루프 다이내믹스  $G_F(S)$ 로 대체(substitution)시켜져야 한다. 즉, MBC 보상의 극점들이 플랜트 다이내믹스  $G(S) = C\Phi(S)B$ 의 영점들을 삭제시켜야 한다. 그러나 플랜트 전달함수  $G(S)$ 의 영점이  $S$ -좌표의 오른쪽 평면에 존재한다면 MBC 보상의 극점은  $S$ -좌표의 오른쪽 평면에 있어야 한다. MBC 보상의 극점이  $S$ -좌표의 오른쪽 평면에 있어야 한다는 것은 불안정 MBC 보상을 제작할 수 있어야 한다는 것으로 엔지니어링 상 불가능한 것이다. 그래서 플랜트 다이내믹스에 비최소위상 영점이 존재하는 경우에는 식 (16)과 같은 완전한 루프전달회복이 이루어질 수 없다. 그리고 최소위상 플랜트인 경우일지라도 MBC 보상의 영점들은 목표필터 루프전달함수  $G_F(S) = C(SI-A)^{-1}H$ 의 영점들과 같은 방향과 위치를 가지고 있어야 한다. 이와같이 설계대상으로 주어진 플랜트가 비최소위상일 경우 완전한 루프전달회복이 이루어지지 않으므로 이론적으로 LQG/LTR 방법을 그대로 적용

할 수는 없다.

### 2.3 새로운 LQG/LTR 설계방법

LQG/LTR 설계 방법이 비 최소위상 플랜트에 적용될 수 없는 문제를 해결하기 위하여 본 논문에서는 다음과 같은 구조의 케환 제어 시스템을 고려한다.

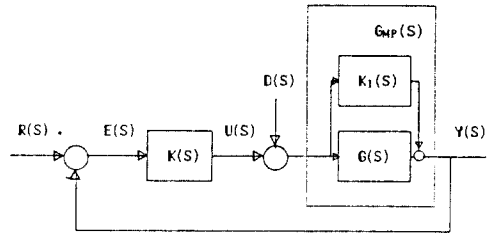


그림 5. 피드백 제어시스템의 구조  
Fig 5. Feedback control system structure

그림 5에서  $K_1(S)$ 는 비최소 위상 플랜트  $G(S)$ 를 최소위상으로 근사화 시키기 위하여 도입된 feed-forward 보상이기이다. 따라서 본 논문에서 제안하는 LQG/LTR 방법은 비최소 위상 플랜트를 최소위상 플랜트로 근사화하는 단계인  $K_1(S)$ 의 설계, 근사화된 비최소위상 플랜트에 대한 목표필터 루프의 설계, 그리고 루프 전달회복 단계로 구성된다.

#### 가. feed-forward 보상이 설계

주어진 비최소위상 플랜트를 최소위상인 플랜트 모델로 변환시키는 feed-forward보상기  $K_1(S)$ 는  $G(S)$ 의 루우프 특성과  $G_{MP}(S)$ 의 루프특성이 유사하게 하며 이득이 최소로되도록 설계되어야 한다. 이러한  $K_1(S)$ 의 결정은 비 최소위상 플랜트의 근사화 논문에서 자세히 논의되었으므로 본 논문에서는 결과식만을 이용한다.

그림 5에서  $G_{MP}(S)$ 는 다음 식으로 표현된다.

$$G_{MP}(S) = G(S) + K_1(S) \quad (17)$$

제어기 전달함수  $K_1(S)$ 를 다음과 같은 형태로 가정한다.

$$K_1(S) = \frac{S(b_{n-2}S^{n-2} + b_{n-3}S^{n-3} + \dots + b_1S + b_0)}{a_nS^n + a_{n-1}S^{n-1} + \dots + a_1S + a_0} \quad n=1,2,\dots \quad (18)$$

주어진 비 최소위상 플랜트의 전달함수의 주파수 영역 특성을 고려하여 선정하고 보상기  $K_1(S)$ 의 미지계수(unknown coefficient)들을 식(17)에 의해 결정한다. 이 방법은  $G_{MP}(S)$ 의 선정이 너무 임의적이며 근사화된 최소위상의 플랜트 차수가 증가하는 문제점을 내포하고 있다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 다음과 같은 최적 근사화 방법을 이용한다. 식(17)은 다음과 같이 변형된다.

$$K_1(S) = G_{MP}(S) - G(S)$$

설계대상으로 주어진 비최소위상 전달함수를 내부함수(inner function)와 외부함수(outer function)로 분해하면 제어기 TFM은

$$\begin{aligned} K_{II}(S) &:= W_1(S) K_1(S) \\ &= G_1(S) [G_1^{-1}(S) W_2(S) - W_1(S) G_0(S)] \end{aligned} \quad (19)$$

로 된다. 여기서  $W_2(S)$ 와  $W_1(S)$ 는  $G_{MP}(S)$ 와  $G(S)$ 의 주파수 영역 특성을 고려하여 선택한 무계행렬로 실제 미지행렬은  $W_1(S)$ 가 된다.  $G_1^{-1}(S) W_2(S)$ 를 안정인 부분과 비 안정인 부분으로 나누면 비 안정인 부분은 다음과 같이 상태공간으로 표시할 수 있다.

$$R = \begin{bmatrix} A & B \\ C & O \end{bmatrix} \quad (20)$$

보상기  $K_1(S)$ 의 최대 이득인 근사오차의 하한(lower bound)은 Hankel 연산자의  $\infty$ 노름으로 다음과 같다.

$$\| \Gamma_R \|_{\infty} = \lambda = [\lambda_{\max}(LcLo)]^{1/2} \quad (21)$$

여기서  $\lambda_{\max}$ 는 고유치의 최대값을 나타내며  $Lc$ 와  $Lo$ 는 각각 다음의 Lyapunov방정식의 해이다.

$$\begin{aligned} ALc + LcA^T + BB^T &= 0 \\ A^TLo + LoA + C^TC &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$\omega_0$ 를  $\lambda$ 에 대응하는 고유벡터라고 하고  $f(S)$ 와  $g(S)$ 를 식(23)으로 정의하면

$$f(S) := \begin{bmatrix} A & \omega_0 \\ C & O \end{bmatrix} g(S) : \begin{bmatrix} -A^T & Lo\omega_0 / \lambda_{\max}^{1/2} \\ B^T & O \end{bmatrix} \quad (23)$$

이 되어 비 안정된  $G_1^{-1}(S)W_2(S)$ 에서 최소거리에 있는 안정인 전달함수  $W_1(S)G_0(S)$ 는 다음과 같다.

$$W_1(S)G_0(S) = G_1^{-1}(S)W_2(S) - \lambda f(S) / g(S) \quad (24)$$

미지인 가중행렬  $W_1(S) = [G_1^{-1}(S)W_2(S) - \lambda f(S) / g(S)]G_0^{-1}(S)$ 로 구하여지며 최적 근사모델  $G_{MP}(S)$ 는 다음식으로 된다.

$$G_{MP}(S) = W_1^{-1}(S)W_2(S) \quad (25)$$

따라서 보상기  $K_1(S)$ 은 주어진 비 최소위상 플랜트의 주파수 특성을 고려하여 가중함수  $W_2(S)$ 를 선정하고 식(24)와 식(25)를 이용하여 근사화된 최소위상 플랜트를 구하며 식(17)을 이용하여 설계한다.

#### 나. 목표 필터루프 설계

목표 필터루프는 근사화된 최소위상 플랜트에 대하여 설계한다. 근사화된 플랜트의 전달함수  $G_{MP}(S)$ 는 다음과 같이 상태공간의 식으로 표현된다.

$$G_{MP}(S) = C_{MP}(S)I - A_{MP})^{-1}B_{MP}$$

다음 그림과 같은 모델링 오차를 포함하는 TFL 구조를 고려한다.

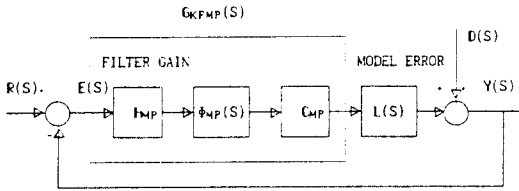


그림 6. 모델링 오차를 갖는 TFL 구조  
Fig. 6. TFL structure with modelling error

그림 6에서 TFL의 루프전달함수 행렬  $G_{FMP}(S)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$G_{FMP}(S) = C_{MP}(S)I - A_{MP})^{-1}H_{MP} \quad (26)$$

TFL의 감도전달함수 행렬  $S_{FMP}(S)$ 과 케루프 전달함수 행렬  $G_{FMP}(S)$ 는 각각

$$S_{FMP}(S) = 1 / [1 + G_{FMP}(S)] \quad (27)$$

$$C_{FMP}(S) = G_{FMP}(S) / [1 + G_{FMP}(S)] \quad (28)$$

로 정의되며 필터이득행렬  $H$ 는 필터 루우프의 TFM들의 특이치 선도가 그림 2와 그림 3을 만족하도록 선정되어야 한다. TFL은 칼만필터의 구조와 동일하므로 필터이득행렬  $H_{MP}$ 는 다음과 같이 구한다.

$$H_{MP} = \frac{1}{\mu} P_{MI} C_{MP}^T \quad (29)$$

여기서 행렬  $P_{MP}$ 는 근사화된 최소위상 플랜트에 대한 필터대수 Riccati 방정식으로부터 결정된다.

$$A_{MP} P_{MP} + P_{MP} A_{MP}^T + L L^T - \frac{1}{\mu} P_{MP} C_{MP}^T C_{MP} P_{MP} = 0 \quad (30)$$

식(30)은 다음의 칼만필터의 주파수 영역 등가식(kalman filter frequency domain equality)을 만족하며 스칼라  $\mu$ 와 행렬  $L$ 은 이 등가식으로 부터 선정할 수 있다.

$$[1 + G_{FMP}(S)] [1 + G_{FMP}(S)]^T = 1 + 1/\mu [C_{MP}\Phi_{MP}(S)L]^T [C_{MP}\Phi_{MP}(S)L] \quad (31)$$

식(31)는 다음식을 만족한다.

$$G_{FMP}(S) \approx \frac{1}{\mu^2} C_{MP}(S)I - A_{MP})^{-1}L \quad (32)$$

따라서 스칼라  $\mu$ 와 행렬  $L$ 은 TFM들의 특이치 선도인 그림 2와 그림 3을 만족하도록 선정한다. 이렇게 설계된 목표 필터 루프는 안정도-강인성 및 성능-강인성을 만족하며  $G_{MP}(S)$ 는  $G(S)$ 와 주파수 영역 성능이 같아지도록 선정된 함수이므로  $G(S)$ 가  $G_{MP}(S)$ 로 바뀌어도 성능-강인성 및 안정도 강인성에는 영향을 주지 않는다.

#### 다. 루프전달회복(LTR)

LQG/LTR의 마지막 단계인 케루프 전달함수 행렬이 제어이득행렬을 선정함에 따라 목표 필터 루프에 점근적으로 접근하게 되는 루프 전달 회복에 대하여 논의한다. LQG/LTR 보상기의 설계 파라미터인 제어이득행렬  $G_{MP}$ 는 다음 식으로부터 결정된다.

$$G_{MP} = \frac{1}{\rho} B_{MP}^T K_{MP} \quad (33)$$

여기서  $K_{MP}$ 는 다음의 제어대수 Riccati 방정식의 해이다.

$$-K_{MP} A_{MP} - A_{MP}^T K_{MP} - C_{MP}^T C_{MP} + \frac{1}{\rho} K_{MP} B_{MP} B_{MP}^T K_{MP} = 0 \quad (34)$$

표준공간모델(standard space model)의 플랜트에서  $[A_{MP}, B_{MP}]$ 가 안정가능(stabilizability)하고  $[A_{MP}, C_{MP}]$ 가 검출가능(detectability)하며 플랜트의 임출력수가 같으면  $\rho \rightarrow 0$ 일때 위의 제어대수 Riccati 방정식의 근한계동은 다음 식들을 만족한다.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} K_{MP} \simeq 0 \quad (35)$$

$$-C_{MP}^T C_{MP} + \left(\frac{1}{\rho^{1/2}} K_{MP} B_{MP}\right) \left(-\frac{1}{\rho^{1/2}} B_{MP}^T K_{MP}\right) \rightarrow 0 \quad (36)$$

식(33)와 식(34)를 결합하면  $\rho \rightarrow 0$  값에 따라

$$(\rho^{1/2} G_{MP})^T (\rho^{1/2} G_{MP}) \rightarrow C_{MP}^T C_{MP} \quad (37)$$

가 성립한다. 따라서  $\rho$ 가 0으로 접근할 때 제어이득 행렬  $G_{MP}$ 의 근한계동은 다음과 같다.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{1/2} G_{MP} \rightarrow U C_{MP} \quad (38)$$

여기서  $U$ 는  $U^T U = I$ 인 단위행렬(unitary matrix)이다.

제어시스템이 안정하고 위의 근한계동식(38)이 만족될 때 모델기준 보상기(MBC)의 전달함수 행렬  $K_{MP}(S)$ 는 다음과 같은 근한계동을 한다.

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} K_{MP}(S) \\ \rightarrow [C_{MP}(SI - A_{MP})^{-1} B_{MP}]^{-1} C_{MP}(SI - A_{MP})^{-1} H_{MP} \\ = G_{MP}^{-1}(S) G_{FMP}(S) \end{aligned} \quad (39)$$

LTR 결과식(39)과 보상된 플랜트 출력부분에서 절단한 루프전달함수 행렬  $T_{MP}(S)$ 의 근한계동은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} T_{MP}(S) \rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} G_{MP}(S) K_{MP}(S) = \\ G_{MP}(S) G_{MP}^{-1}(S) G_{FMP}(S) \\ = G_{FMP}(S) \end{aligned} \quad (40)$$

따라서 LQG / LTR 보상기는  $\rho$ 가 0으로 접근할 때 전달함수 행렬  $G_{MP}(S)$ 의 역수 그리고 복소평면 루프전달함수  $G_{FMP}(S)$ 로 루프전달회복이 이루어짐을 보여주고 있다. MBC 보상기가 플랜트의 다이내믹스  $G_{MP}(S)$ 를 삭제(cancellation)시키고 필터부의 다이내믹스  $G_{FMP}(S)$ 로 대체(substitution)시키는 과정에서 문제점이었던 비 최소위상인 플랜트의 문제는 feed forward 보상기를 추가하여 해결될 수 있다.

### III. 시뮬레이션

본 논문에서 제안된 새로운 LQG / LTR 방법의 타당성을 입증하기 위한 시뮬레이션 예제 플랜트로 다음과 같이 1과 5에 우정면 영점을 갖는 플랜트를 고려 하였다.

$$G(S) = \frac{(S-1)(S-5)}{S(S+2)^2}$$

Suh<sup>10,11</sup>의 근사화 방법을 이용하여 비 최소위상 플랜트를 최소위상으로 근사화시키기 위한 최소위상 플랜트의 영점을 -1로 선택하였을 때 최소위상 플랜트  $G_{MP}(S)$ 와 보상기  $K_1(S)$ 의 전달함수는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} G_{MP}(S) &= \frac{S^2 + 5S^2 + 10S^3 + 10S^2 + 5S + 1}{0.302S^5 + 2.375S^4 + 7.096S^3 + 9.801S^2 + 5.76S + 0.85} \\ K_1(S) &= \frac{6.981S + 2.858}{0.0319S^3 + 1.162S^2 + 11.24S + 0.2} \end{aligned}$$

복소 필터 루우프를 설계하기 위하여  $\mu = 0$ ,  $I = L = I$ 로 선택 하였으며 루우프 전달 회복을 위한 제어 가중치  $\rho$ 는  $\rho = [1, 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}]$ 로, 그리고 상태 가중행렬은  $Q = C_{MP}^T C_{MP}$ 로



선택하였다. 이때의 TFL 및 LTR과정을 그림 7에 보였다.

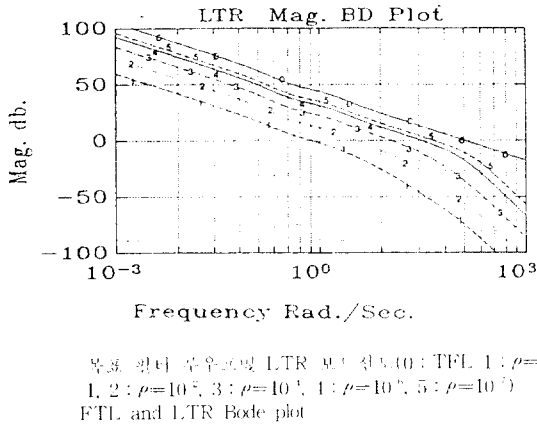


그림 7에서 TFL은 그림 3과 비교하면 제어기 설계목표인 성능-강인성과 안정도-강인성을 보장함을 알 수 있다. 또한  $\rho=10^{-7}$ 에서도 정확한 루우프 전달회복을 얻을 수는 없었지만  $\rho$ 값이 0으로 접근함에 따라 목표루우프에 근접함을 보여준다. 위상에 대한 보드선도는 저주파 영역에서 목표루우프에 정확히 일치하여 목표 루우프가 보장하고 있는 안정도-강인성 및 성능-강인성을 보장하고 있음을 보였다. 그러나 근사화된 플랜트의 차수가 증가하고 최소위상 플랜트를 임의로 선정하는 문제점이 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위한 방안으로 제안된 최적 근사화 방법을 이용하여 보상기를 설계하는 방법의 예를 보인다. 비 최소위상 플랜트와 근사화된 최소위상 플랜트의 가중함수  $W_2(S)$ 를

$$W_2(S) = \frac{10(S+1)}{(S+0.1)}$$

로 선택하면 보상기  $K_1(S)$ 과 근사화된 최소위상 플랜트  $G_{MP}(S)$ 는

$$K_1(S) = \frac{-0.2792S^2 + 20.367S + 8.6458}{0.7208S^2 + 14.367S + 13.6458}$$

$$G_{MP}(S) = \frac{S^2 + 8.9614S + 7.9614}{1.387S(S+2)^2}$$

이다. 근사화된 플랜트는 주어진 비 최소위상 플랜트와 동일한 극점을 갖는다. 목표 필터 루우프를 설계하기 위한 가중치의 루우프 전달회복을 위한 가중치는 앞의 예제와 동일하게 선택하였다. 이때의 TFL 및 LTR보드선도는 그림 8에 보였다.

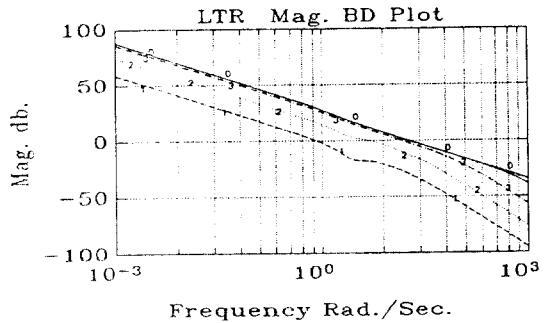


그림 8. 루우프 전달 회복과정(0: TFL 1:  $\rho=1$ , 2:  $\rho=10^{-2}$ , 3:  $\rho=10^{-4}$ , 4:  $\rho=10^{-6}$ , 5:  $\rho=10^{-7}$ )  
Fig 8. LTR procedure

그림 7에 미하여 목표 필터 루우프의 이득은 작지만 안정도-강인성 및 성능강인성을 만족하며  $\rho=10^{-7}$ 에서 루우프 전달 회복이 일어남을 알 수 있다. Stein과 Athans에 의하여 제안된 방법에 의한 LTR과정을 그림 9에 보였다.

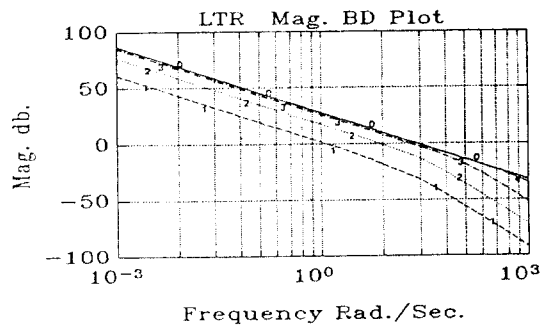


그림 7. Stein 방법에 의한 루우프 전달 회복과정(0: TFL 1:  $\rho=1$ , 2:  $\rho=10^{-2}$ , 3:  $\rho=10^{-4}$ , 4:  $\rho=10^{-6}$ , 5:  $\rho=10^{-7}$ )  
Fig 9. LTR procedure by Stein's algorithm

그림 9의 Stein과 Athans이 제안한 방법으로 근사화 하였을 경우  $\rho \rightarrow 0$ 으로 접근함에 따라 LTR이 일어남을 보이지만 플랜트의 우평면 영점 구조를 그대로 유지함으로써 인하여 이득이 커질수록, 페루우프 극점이 개루프 영점인 우평면 영점으로 접근하게 된다. 각 방법에 대한  $\rho=10^{-7}$ 인때의 페루우프 극점을 표 1에 보였다.

표 1. 각 방법에서 페루우프 극점  
Table 1. Closed loop poles for each methods( $\rho=10^{-7}$ )

First approximation	Optimal approximation	Stein and Athan approximation
-229.1	-2279.9	-3162.2
-72.38+j72.347	-18.848	-35.213
-72.38-j72.347	-2.1497+j0.955	-2.8143
-3.385	-2.1497+j0.955	-1.2888
-2.047+j1.252	-0.9807+j2.6457	3.0432*
-2.047-j1.252	-0.9807-j2.6457	1.1685*
-2.194+j1.537		
-2.194-j1.537		
-0.359+j1.918		
-0.359-j1.918		
-0.306+j0.2142		
-0.306-j0.2142		

표 1에서 보는 바와 같이 본 논문에서 제안된 두 방법에서는 페루우프 극점이 모두 좌평면에 위치하지만 Stein과 Athan의 방법에서는 우평면에 두개의 극점(\* 표시)이 위치한다. 이 극점들은 LTR과정에서 페루우프 극점이  $\rho$ 가 0에 접근할 수록 개루프 영점에 접근하면 개루프 전달함수가 비 최소위상 영점구조를 유지함으로써 인하여 페루우프 극점이 우평면에 위치함을 알 수 있다.

#### IV. 결 론

LQG에서 결여된 강인성을 보완하기 위하여 개발된 LQG/LTR 방법은 비 최소위상 영점들

갖는 플랜트에 대하여 적용될 수 없는 문제를 대포하고 있다. 이러한 문제를 해결하기 위한 방법들이 Stein과 Athans<sup>6</sup>, Moore와 Tay<sup>7</sup>, Suh<sup>10,11</sup>등에 의하여 연구되었지만 비 최소위상 플랜트가 갖는 속성으로 인하여 극히 제한된 주파수 영역에서만 적용이 가능하다.

본 논문에서는 이러한 문제점을 갖는 비 최소위상 플랜트를 Suh가 제시한 닛셋형 오차를 실현하기 위한 feed forward보상기를 이용하여 최소위상 플랜트로 근사화되고 근사화된 최소위상 플랜트에 대하여 제어기 설계시 중요한 특성인 안정도-강인성및 성능-강인성을 만족하도록 목표 루우프를 설계하고 루우프 전달회복시킴으로서 제어기를 설계하는 새로운 비최소위상 플랜트에 대한 LQG/LTR기법을 제안하였다. 비 최소위상 플랜트를 최소위상 플랜트로 근사화시키는 과정에서 최소위상 영점이나 가중함수를 근사화된 최소위상 플랜트가 주어진 비 최소위상 플랜트의 특성과 같아지도록 선택할 수 있는 융통성을 갖음으로서 주어진 비 최소위상 플랜트의 응답과 근사화된 최소위상 플랜트의 응답이 유사하도록 선택하며 근사화된 최소위상 플랜트에 LQG/LTR을 설계함으로써 Stein과 Athans, Moore와 Tay등에 의하여 제안된 알고리즘에서의 페루우프 극점위치와 주파수 영역 제한성을 해결하였다. 시뮬레이션 예제를 들어 제안된 방법의 타당성을 보였으며 단일입출력 플랜트뿐 아니라 다입력-다출력인 플랜트, 복수개의 비 최소위상 영점을 포함하는 플랜트에 대해서도 적용될 수 있음을 보였다.

#### 참 고 문 헌

1. Anderson, B.D.O., and Moore, J.B., 'Linear Optimal Control', Printice Hall, 1971.
2. Kwakernaak, H., and Sivan, P., 'Linear Optimal Control Theory', Wiley Interscience, 1972.
3. J.C. Doyle, "Guaranteed Margins for LQG regulator", IEEE Trans. on Auto. Contr. Vol.AC-23, Aug., 1978.
4. J.C. Doyle and G. Stein, "Robustness with Observers",

- IEEE Trans. Auto, Contr, Vol.AC-24, 1979.
5. J.C. Doyle and G. Stein, "Multivariable Feedback Design : Concept for Classical Mordern Synthesis", IEEE Trans. Auto, Contr... Vol.AC-26, 1981.
  6. M. Athans and G. Stein, "The LQG / LTR Procedure for Multivariable Feedback Control Design", IEEE Trans. Auto. Contr., Vol.AC-32, No.2, Feb. 1987.
  7. J.B. Moore and T.T. Tay. "Loop Recovery via  $H^\infty / H^2$  Sensitivity Recovery", Int. J. of Contr, Vol-3, 1 989.
  8. B.A. Francis, 'A Course on  $H^\infty$  Control Theory : Lecture Notes in Control and Information Sciences', Berin : Springer-verlag, 1987.
  9. J.C. Doyle, 'Lecture Notes, Advances in Multivariable Control, ONR / Honeywell Workshop, Mineapolis', 1 984.
  10. Vidyasager, M., 'Control System Synthesis : A Factorization Approach', MIT Press, 1985.
  11. M.G. Safanov and M. Athans, "Gain and Phase Margins of Multiloop LQG regulators", IEEE Trans. Auto. Contr., vor. AC-22, 1977.



康 鎭 植 (Jin Shig KANG) 正會員  
1986年 : 濟州大學校 工科大學 通信工學  
科 卒業(工學士)  
1988年 : 漢陽大學校 大學院 電子通信工  
學科 卒業(工學碩士)  
現在 : 同 大學院 博士課程 在學

徐 丙 高 (Byung Sul SUH) 正會員  
漢陽大學校 工科大學 電子通信工學科  
教授