

다구찌의 손실함수를 이용한 특성치의 경제적 허용차 설계 —Economic Tolerance Design of Quality Characteristics

by the TAGUCHI's Loss Function—

崔文壹*
姜昶旭**
黃義徹***

Abstract

If the specifications of product, in general, are determined too wide, the precision of product becomes diminished. Otherwise, it costs dearly to keep the precision.

Therefore, it is realistic to consider various factors in determining specification of quality characteristics. TAGUCHI defines quality of an object as "Quality is the loss that a product causes to society after being shipped, other than any losses caused by its intrinsic function". Particularly, to improve the performances of product, TAGUCHI focuses his attention on the product design and process design which enable the functional characteristics of product to be robust to noises. In this paper, by the TAGUCHI's loss function, the characteristics which affect the variation of a product performance are classified into the scrappable characteristics and the reworkable characteristics when the target values of functional characteristics have been determined. And we will determine the tolerance of each characteristic which minimize the quality cost by the cost function which considers the economic factors and probability features of each characteristic.

1. 서 론

제품의 기능은 그것을 형성하는 요인군의 영향을 받아 변동한다. 이러한 요인들은 제어 가능한 것과 제어 할 수 없는 것으로 분류하는데, 전자를 설계변수라 하고, 후자를 잡음(noise)이라고 부른다[3]. 이러한 기능의 변동이 최소화될 수 있도록 설계변수의 최적조건을 결정하는 문제는 대단히 중요하다. 기존의 전통적인 방법은 잡음을 통제하거나 제거함으로써 그 변동의 최소화를 꾀하였으나 실질적인 효과는 얻지 못하고 비용과 노력만을 많이 들인 결과를 가져오게 하였다.

다구찌는 제품의 기능을 향상시키기 위하여 라인오피스질관리(off-line QC) 단계에서 제품의 기능특성치가 잡음에 둔갑(robust)하도록 제품설계와 공정설계를 하는 데 역할을 두고 있는데 이것은 적은 비용을 들여서 목표치와 허용한계를 만족시키는 설계변수의 최적값을 결정하는 방법으로 평가되고 있다. 이와 같은 방법으로 최적조건을 구하였으나 기능특성치의 변동이 만족할만한 상태가 아닌 경우에 직교배열표를 이용한 실험계획법으로 기능특성치에 영향을 주는 특성치의 허용차를 설계하였다.

허용차를 좁게하면 소기의 기능을 만족시킬 수 있지만, 사용코스트(사용자코스트)가 높아져 시장경쟁력을 약화시킨다. 한편 허용차를 넓히면 부품의 가격은 낮아지지만 성능이 저하된다. 과거에는 치수허용차에 관한 설계지침이 명확하지 않았기 때문에 설계자는 필요한 치수허용차를 도면에 기입할 때 높은 정밀도를 요구하는 경향이 있다. 그 결과 과잉품질이 되어 생산코스트는 높고 생산성을 떨어지게 하는 경우가 많았다[7].

본 연구에서는 부품(item)의 기능특성에 중요한 영향을 주는 특성치(그것이 계량치이고 정특성치(static characteristic)에 속하며, 망부특성치인 경우)에 대하여 다구찌의 손실함수식을 이용한 비용식을 구하여 특성

*한양대학교 대학원 산업공학과

**한양대학교 산업공학과 조교수

***한양대학교 산업공학과 교수

치에 대한 기대비용이 최소화 되도록 특성치의 허용차를 결정하는 방법을 연구하는 데 그 목적을 두고 있다.

2. 단일 특성치에 대한 허용차 설계

2.1 손실함수

일반적으로 손실함수의 형태는 알려져 있지 않거나 복잡하다. 다구찌는 품질을 “품질은 제품이 출하된 시점으로부터 성능특성치의 범위과 부작용 등으로 인하여 사회에 끼친 유형, 무형의 총손실(total loss)이다”라고 정의하고 특성치의 값이 목표치로부터 편차가 클수록 손실이 커지며 이 편차가 목표치와 일치하면 손실은 없다라는 가정하에 2차식으로 근사화한 손실함수($L(y)$)를 다음과 같이 제안하고 있다[3].

특성치를 y , 목표치를 m 이라고 놓으면

$$L(y)=k(y-m)^2 \quad (2.1)$$

이 된다.

이때 k 는 기능특성치의 허용한계를 $m \pm \Delta$, 측정치가 y 가 이러한 허용한계를 벗어날 때 소비자가 제품을 수리하거나 폐기하는데 소요되는 손실을 A 원이라 하면

$$k=A/\Delta^2 \quad (2.2)$$

으로 나타내었다.

2.2 허용차 설정방법

전수선별검사를 하는 경우에 검사 대상이 되는 품질특성치는 검사기준에 따라 합격·불합격으로 판정되는데, 이때 다구찌의 품질에 대한 정의[4]와 손실함수를 이용하여 다음의 두 비용, 첫째 불량으로 판정된 제품을 수리 또는 폐기하는데 소요되는 불합격비용(rejection cost), 둘째 규격의 범위안에 있어 합격판정이 되었으나 목표치와의 편차에 의해 발생하는 손실인 합격비용(acceptance cost)을 고려함으로써 특성치의 허용차를 쉽게 결정할 수가 있다.

어떤 부품의 특성치 y 의 목표값을 m , 허용차를 $[-\delta, \delta]$, 허용차를 벗어났을 때의 손실을 A 라 하고 y 의 측정치와 목표값과의 편차가 표준정규분포를 한다고 가정하자. 이때 y 에 영향을 주는 특성치 x 의 규격이 $m_1 \pm \delta_1$, 규격을 벗어났을 때 평균손실을 r , 특정치 x 가 단위량 변화할 때 y 에 미치는 영향을 β 라 하고, x 의 측정치와 목표값과의 편차가 역시 표준정규분포를 한다고 하면 식(2.1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$L(x)=k(\beta(x-m_1))^2 \quad (2.3)$$

여기서 $\delta_1=x-m_1$ 이라 놓으면 $L(x)$ 는

$$L(x)=k\beta^2\delta_1^2 \quad (2.4)$$

와 같이 된다.

그리고 기대 합격 비용(EA)은 식(2.5)과 같이 나타낼 수 있다.

$$EA=\int_{-\delta}^{\delta} k\beta^2x^2f(x)dx \quad (2.5)$$

여기서 $f(x)$ 는 x 의 확률밀도 함수이다.

기대불합격비용(ER)은 식(2.6)과 같이 된다.

$$ER=rP(rej)=r(1-\int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx) \quad (2.6)$$

여기서 $P(rej)$ 는 특성치 x 가 허용차의 범위 밖에 있을 확률이다.

따라서 특성치의 총기대비용(ETC)은

$$ETC=EA+ER \quad (2.7)$$

으로 나타낼 수 있다.

여기서 총기대비용(ETC)을 최소화 하는 최적 허용차 δ^* 는 목표값과의 편차로부터 발생하는 비용과 특성치가 허용한계를 벗어났을 때 발생하는 비용(재작업비용 또는 폐기비용)이 일치하는 곳에서 구할 수 있다. 그러므로 최적허용차는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} L(\delta_1) &= r \\ \delta_1^* &= \sqrt{r/k}(1/\beta) \end{aligned} \quad (2.8)$$

가 된다[2].

3. 다수 특성치에 대한 허용차 설계

3.1 가 정

- (1) 각 특성치는 망복 특성치만을 고려하며, 이들은 모두 양의 연속적인 값을 갖는다.
- (2) 각 특성치들은 독립이다.
- (3) 각 특성치들은 두부류, 특 폐기특성치(scrappable characteristics)와 재작업특성치(reworkable characteristics)로 구분한다.
- (4) 관심있는 특성치($x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$)의 품질변동으로 인한 손실은 가법적이다. 즉,

$$L_n(x_1x_2, \dots, x_n) = k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + \dots + k_nx_n^2$$

이다.

- (5) 각 특성치들의 측정치와 목표값과의 편차는 정규분포를 한다.
- (6) 손실함수는 y 축에 대칭이다.

3.2 용어의 설명

δ_i	: i번째 특성치의 상한 허용차
$P(S)$: 모든 폐기특성치들을 합격시키는 확률
P_i	: i번째 특성치가 합격될 확률
r_i	: i번째 재작업특성치를 재작업하는데 소요되는 비용
R_i	: i번째 폐기특성치를 폐기하는데 소요되는 비용
S_i	: i번째 폐기특성
W_i	: i번째 재작업특성
$ER(S_i)$: i번째 폐기특성치가 불합격 되었을 때 소요되는 기대비용
$EA(S_i)$: i번째 폐기특성치를 합격시키는데 소요되는 기대비용
$ER(W_i)$: i번째 재작업특성치가 불합격되었을 때 소요되는 기대비용
$EA(W)$: 재작업특성치를 합격시키는데 소요되는 기대비용
ETC	: 각 특성치들의 기대 총비용
β_i	: 특성치 x_i 의 규격이 단위량 변화할 때 기능특성치 y 에 미치는 영향

3.3 경제적 모형의 설정

어떤 한 부품의 기능특성치 y 의 목표값을 m , 허용차를 $[-\delta, \delta]$, 허용차를 벗어났을 때의 손실을 A 라 하자. 이때 기능특성치에 영향을 주는 특성치 z 개(x_1, x_2, \dots, x_z), 그 특성치의 규격이 $m_1 \pm \delta_1, m_2 \pm \delta_2, \dots, m_z \pm \delta_z$, 규격을 벗어났을 때 손실을 r_1, r_2, \dots, r_z , 각 특성치 $x_i (i=1, 2, \dots, z)$ 와 목표치와의 차가 표준 정규분포를 한다고 가정하고, 각 특성치가 단위량 변화할 때 기능특성치에 미치는 영향을 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_z$ 라 하자.

모델을 수량화하기 위하여 검사의 결과를 두개의 상호배반적인 사건 A, B로 나누면 다음과 같다.

(A) : 폐기특성치가 적어도 하나이상 허용차를 벗어나는 경우

(B) : 폐기특성치가 모두 허용차를 만족한 경우.

각 특성치들이 독립적이기 때문에 모든 폐기특성치들이 합격되는 확률 $P(S)$ 는

$$P(S) = \prod_{i \in S} P_i, i=1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

가 된다.

(A)에 대해서는 그 부품(item)을 폐기해야 하기 때문에 폐기비용($ER(S)$)을 고려하고, 이때 폐기비용은 그 부품(item)을 만들기 위하여 투자한 총비용을 총생산갯수로 나누어줄 값이 된다.

$$ER(S) = R[1 - P(S)] \quad (3.2)$$

(B)에 대해서는 (1) 폐기특성치들이 허용차내에 있어서 이 부품(item)을 출하하였을 때 목표치와의 편차에 의하여 발생하는 사회적 손실($EA(S)$), (2) 재작업 특성치들이 허용차내에 있어 이 부품(item)을 출하하였을 때 목표치와의 편차에 의해 발생하는 사회적 손실($EA(S)$)과 (3) 재작업 특성치들이 규격밖에 있어 재작업하는데 소요되는 비용($ER(S)$)을 고려할 수 있다.

(1)에 대한 비용은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$EA(S) = \sum_{\substack{i, j \in S \\ x_j \in [-\delta_j, \delta_j]}} \int \left[\sum_{i \in S} k_i \beta_i^2 x_i^2 \right] \prod_{j \neq i} f_j(x_j) dx_j \quad (3.3)$$

여기서 $f_j(x_j)$ 는 x_j 의 확률밀도함수이다.

각 특성치들이 독립적이기 때문에 다음과의 식으로 나타낼 수 있다.

$$EA(S) = \sum_{i \in S} [EA_i \prod_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} P_j] \quad (3.4)$$

(2)에 대한 비용은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$EA(W) = (\sum_{i \in W} EA_i) P(S) \quad (3.5)$$

(3)에 대한 비용은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$ER(W) = (\sum_{i \in W} r_i (1 - P_i)) P(S) \quad (3.6)$$

결과적으로 한 부품(item)의 기대총비용(ETC)은

$$ETC = EA(S) + ER(S) + EA(W) + ER(W) \quad (3.7)$$

이다.

식(3.7)에서 세번째, 네번째 항의 재작업특성치에 대하여 단일 특성치모델에 적용시키고 폐기특성치의 허용차를 구하기 위한 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$ETC = EA(S) + ER(S) + (\sum_{i \in W} ETC_i) P(S) \quad (3.8)$$

$P(S) = 1 - (1 - P(S))$ 라 놓으면

$$ETC = \sum_{i \in S} [EA_i \prod_{j \in S} P_j] + (R - \sum_{i \in W} ETC_i)(1 - P(S)) + \sum_{i \in W} ETC_i \quad (3.9)$$

으로 된다.

$$R' = R - \sum_{i \in W} ETC_i \text{라 하고,} \quad (3.10)$$

식(3.9)의 $1 - P(S)$

$$1 - \prod_{i \in S} P_i = (1 - P_i) \left(\sum_{i \in S} P_i \right) + (1 - \prod_{i \in S} P_i)$$

라 하면, (3.9)식을 다음과 같이 쓸 수 있다. 따라서

$$ETC = \{EA_i + [R - \sum_{j \neq i} EA_j/P_j](1 - P_i) + \prod_{j \neq i} P_j + \sum_{j \neq i} EA_j \prod_{l \neq i, l \neq j} P_l + R'(1 - \prod_{j \neq i} P_j)\} + \sum_{i \in W} ETC_i \quad (3.11)$$

이때 식(3.11)에서 첫번째 항은 i번째 폐기특성치가 종비용에 미치는 영향을 나타내고 첫번째 항을 제외한 나머지 항들은 i번째 폐기특성치를 제외한 나머지 특성치가 종비용에 미치는 영향을 나타낸다.

식(3.11)에서 첫번째 항이 단일 특성치모델의 종비용식을 나타내므로 폐기특성치의 규격을 결정하기 위하여 첫번째 항을 $ETC_i(S)$ 라 하면

$$ETC_i(S) = EA_i + [R - \sum_{j \neq i} EA_j/P_j](1 - P_i) \quad (3.12)$$

를 얻게 된다.

식(3.12)식은 단일 특성치모델의 종비용식을 나타내고, $R - \sum_{j \neq i} EA_j/P_j$ 는 단일특성치모델의 특성치가 허용 한계를 벗어났을 때 발생하는 비용이므로 식(2.8)에서 구한 방법을 이용하여 i번째 폐기특성치를 합격시키는 비용과 i번째특성치를 제외한 모든 폐기특성치를 합격시키는 총기대비용의 합이 폐기비용 R' 과 같을 때 모든 폐기특성치의 허용차를 구할 수 있다.

$$k_i \beta_i^2 x_i^2 = (R - \sum_{j \neq i} EA_j/P_j) \quad i, j=1, 2, \dots, n \quad (3.13)$$

3.4 허용차 설정방법

다수 특성치모델을 이용하여 각 특성치의 최적허용차를 설정하는 절차는 다음과 같다.

단계 1 식(2.10)을 이용하여 각 특성치의 허용차 δ_i ($i=1, 2, \dots, n, \dots, z$)를 구한다.

단계 2 δ_i 를 이용하여 P_i ($i=1, 2, \dots, n$)를 구한다.

단계 3 모든 재작임특성치에 대한 총기대비용의 합은 식(2.7)을 사용하여 구하고 R' 는 식(3.10)을 이용하여 계산한다.

단계 4 δ_i 를 $\delta_i(0)$, $m=1$, $i=1$ 이라 놓는다.

단계 5 $\delta_h(m-1)$ ($n \geq h \geq i$)와 $\delta_g(m)$ ($1 \leq g < i$)을 이용하여 폐기특성치중 i번째 폐기특성치의 허용 차 $\delta_i(m)^*$ 을 식(3.13)을 이용하여 구한다.

단계 6 $i < n$ 이면 $i=i+1$ 로 놓고 단계 5로 간다. 그렇지 않으면 단계 7로 간다.

단계 7 $\delta_i(m-1)$ 과 단계 6에서 구한 $\delta_i(m)$ 을 비교하여 그것의 차가 $|\delta_i(m) - \delta_i(m-1)| < 0.00001$ 이면 단계 8로 간다.

단계 8 $\delta_i(m)$ 을 δ_i^* 라 하고 i번째 특성치의 허용차를 구하는 절차를 종료한다.

4. 수치예제

기능특성치 y 에 영향을 주는 특성치에 관한 데이터가 표 1과 같이 주어져 있다고 가정한다. 표 1의 데이터를 이용하여 각 특성치에 대한 경제적 허용차를 결정하여 본다.

표 1. 특성치에 관한 데이터

특성치	분류	기여율(β_i)	k_i	폐기비(R)	재가공비(r)
x_1	Scrapable	0.48	6.94	8	—
x_2		0.42	6.94	8	—
x_3		0.56	6.94	8	—
x_4	Reworkable	0.18	6.94	—	1.8
x_5		0.20	6.94	—	2
x_6		0.18	6.94	—	2

3.4절의 단계 1로부터 각 특성치의 이온차와 합격점 확률을 구하는 단계의 비용은 식(2.7)을 이용하여 계산한 결과는 표 2와 같다.

표 2. 특성치에 모델을 이용하여 계산한 허용차와 합격률

특성치	허용차(δ_i)	합격률(P_i)	기대 비용
x_1	2.2361	0.9747	1.527
x_2	2.5555	0.9894	1.201
x_3	1.9166	0.9447	2.426
x_4	2.8284	0.9953	0.213
x_5	2.6833	0.9927	0.274
x_6	2.9814	0.9971	0.224

3.4절의 단계 3에 의하여 R' 을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R' &= 8 - (0.213 + 0.274 + 0.224) \\ &= 7.281 \end{aligned}$$

3.4절의 단계 4 및 단계 8의 절차에 의하여 계산된 결과는 표 3과 같으며 이것은 FORTRAN과 MATHCAD를 이용하여 계산되어 했다.

표 1. 특성치에 관한 데이터

폐기특성치 반복(m)	x_1		x_2		x_3		기대총비용 (ETC)
	δ_1	P_1	δ_2	P_2	δ_3	P_3	
0	2.2361	0.9747	2.5555	0.9894	1.9166	0.9447	5.0281
1	1.6862	0.9082	1.9482	0.9486	1.5661	0.8827	4.9028
2	1.7847	0.9257	1.7537	0.9205	1.5702	0.8836	4.8795
3	1.8012	0.9283	2.0010	0.9546	1.5504	0.8790	4.8198
4	1.7834	0.9255	2.0079	0.9553	1.5517	0.8793	4.8191
5	1.7827	0.9254	2.0077	0.9553	1.5518	0.8793	4.8191
6	1.7826	0.9253	2.0077	0.9553	1.5518	0.8793	4.8191

표 2와 표 3으로부터 단일 특성치 모델을 이용하여 구한 폐기특성치의 허용차를 갖는 아이템이 불합격될 확률은 8.896%이고, 본 논문에서 제시한 모델을 이용하여 구한 폐기특성치가 불합격될 확률은 13.379%로 나타났다. 이는 단일모델이 품질이 나쁜 부품을 너무 많이 합격시킴으로서 다수 특성치모델의 각 특성치에 대한 기대총비용(4.8191)보다 많은 비용(5.865)이 든다는 것을 알 수 있다. 즉, 허용차를 줄이면 품질이 나쁜 부품을 불합격시킴으로써 1.0459의 이득을 얻게 된다.

따라서 비용을 최소화 하는 최적 허용차는 $\delta_1^* = 1.7826$, $\delta_2^* = 2.0077$, $\delta_3^* = 1.5518$, $\delta_4^* = 2.8284$, $\delta_5^* = 2.6833$, $\delta_6^* = 2.9814$ 임을 알 수 있고 이때 총비용은 4.8191이다.

5. 결 론

규격을 결정하는 데 있어서 허용차를 설계하는 것은 대단히 중요하다. 이전의 허용차의 결정에 있어서는 설계자의 경험과 실험에 의해 결정하여 왔다. 이렇게 하여 결정된 허용차는 불합리 할 뿐만 아니라 많은 손실을 가져온다. 따라서 부품을 생산하기 전에 부품설계단계에서 각 부품의 특성치에 대한 허용차를 경제적으로 제시함으로써 좋은 품질을 얻을 수 있을 뿐만 아니라 시장경쟁력도 높여준다.

본 연구에서는 한 부품(item)의 기능특성치의 변동에 영향을 주는 특성치를 폐기특성치와 재작업특성치로 나누고 이를 특성치에 대한 허용차를 결정하는 절차를 제시하고 수치예제를 통하여 보다 경제적인 허용차 설정방법을 보였다.

앞으로의 연구과제로는 제품의 특성치간에 상관관계가 있는 경우와 각 특성치에 대한 손실이 가법적이 되지 않고 다른 형태로 존재할 경우의 허용차 설계에 관한 연구를 기대한다.

참 고 문 헌

- [1] Tang, K., "Economic Design of Product Specifications for a complete Inspection Plan," *International J. Production Res.*, 26(2), (1988a), pp. 203-217.
- [2] Tang, K., "Design of Two-Stage Screening Procedure Using Correlated Variables : A Loss Function Approach," *Naval Res. Logist. Quart.*, 35(5), (1988d), pp., 513-533.
- [3] Taguchi, G. *Introduction to Quality Engineering*, Tokyo : Asian Productivity Organization, 1986.
- [4] 황의천, 최신품질관리, 서울 : 박영사, 1986.
- [5] 田口玄一, 품질공학강좌1, 서울 : 한국공업표준협회, 1991.
- [6] _____, 품질공학강좌4, 서울 : 한국공업표준협회, 1991.
- [7] _____, 품질공학강좌5, 서울 : 한국공업표준협회, 1991.
- [8] 박성현, 다구찌 방법을 중심으로 한 응용실험계획법, 서울 : 영지문화사, 1990.