

境界積分 方程式法에 의한 港內 靜穩度 解析 Analysis on the Harbor Tranquility by Boundary Integral Equation Method

李哲應* · 片宗根** · 李吉成*

Chul Eung Lee*, Chong Kun Pyun** and Kil Seong Lee*

要 旨 : 본 연구에서는 境界積分 方法을 사용하여 기존에 문제점으로 지적되었던 외해 경계조건을 임의의 가상 경계상에湧出點을 분포시키는 기법으로 처리하여 港灣 入口의 防波堤나 기타 構造物 등에 의하여 발생되는 波浪의 廻折效果를 반영하였다. 또한 港內의 에너지 損失效果는 部分 反射概念을 사용하여 해석하였다. 본 연구의 數值的 檢證은 解析解를 구할 수 있는 直四角形 港灣과 여러 半圓形 港灣에 대한 波浪應答 特性을 비교하였으며 그 결과는 잘 일치하였다. 또한 厚浦港에 대한 波高分布를 계산하여 水理 模型實驗의 結果 및 時間依存 緩傾斜 方程式을 이용한 數值模型의 結果와 비교하여 좋은 結果를 얻었다.

Abstract □ In this paper, the harbor tranquility problem is analysed by an improved boundary integral equation method. The effect of the diffracted wave transformation induced by the breakwater and structures located at a harbor mouth is considered. Partial reflection concept is also used to consider energy dissipation effects. The present model is verified by comparing the results of the model for rectangular and semi-circular harbors with the analytic solutions, they show a reasonable agreement. Also the wave height distribution of the HUPO harbor computed using the present model agree well to those from the previous hydraulic model tests. It also shows a good agreement with the results from the time-dependent mild slope equation model.

1. 緒 論

海象變動이나 氣象變動에 의하여 外海에서 발생한 波浪이 港內로 진입하여 港內에 振動을 유발하고 이런 진동은 港內에 정박중인 船舶이나 기타 堤防 構造物 등에 피해 요인으로 작용할 수 있다. 특히 港內로 진입하는 波의 週期가 港內의 固有週期 중의 하나와 일치하면 共振現象이 발생하여 상당한 피해가 일어날 수 있다. 따라서 기존 港內의 擴張이나 改良, 새로운 港內의 신설시 임의의 入射波에 대한 港內의 波浪應答을 정확히 예측하여 그 피해를 최소화하는 것이 필요하다. 그러나 이에 대한 연구는 포함된 諸般 因子들의 복잡성으로 인하여 종합적인 港內 靜穩度 解析은 주로 많은 시간과 비용이 드는 水理 模型實驗에 의존하고 있다. 따라서 비록 제한된 適用限界

등의 문제점은 있으나, 數值的 方法에 의한 港內 靜穩度 解析技法이 필요하다.

港內 靜穩도 해석은 일반적으로 有限 差分法 및 境界積分 方程式法 등의 嚴密解法과 近似 境界積分法 (Sogreah法), Takayama法 및 波向線法 등의 近似解法으로 구분된다. 엄밀해법은 支配 方程式을 離散化 시키는 것 이외의 근사식을 사용하지 않고 해석하는 수치해석 방법으로 임의의 형상에의 適用성과 嚴密성이 뛰어나나 대상으로 하는 波의 波長이 짧고 港의 규모가 큰 경우에는 실용적이지 못하다. 반면 근사해법은 엄밀성이 부족하나 港의 규모에 비하여 波長이 충분히 짧은 경우에도 적용이 가능하여 실제 설계에 많이 사용하는 유효한 방법이라 하겠다.

먼저 엄밀해법에서 유한차분법의 경우, 波動 方程式을 이용하여 매 시간 단계마다 水位와 線流量을 결

*서울대학교 土木工學科(Department of Civil Engineering, Seoul National University, Seoul, 151-742, Korea)

**明知대학교 土木工學科(Department of Civil Engineering, Myong Ji University, Seoul, 120-728, Korea)

정하는 방법을 Ito와 Tanimoto(1972), Maruyama와 Kajima(1985), Copeland(1985) 등이 연구하였으며 Raichlen과 Naheer(1976)는 對象領域을 두 개의 영역, 즉 外海領域과 港內領域으로 구분하여 항내영역에서는 유한 차분기법을 외해영역에서는 Helmholtz 方程式과 境界條件을 만족하는 해를 구하여 港灣入口에서 接合시키는 방법으로 해석하였다. 또한 海洋研究所(1987)에서는 雙曲線型 緩傾斜 方程式을 이용하여 浦項新港에 대한 波高分布를 해석하였고, 劉等(1989)이 Copeland模型을 사용하여 北坪港에 대한 波高分布를 구하였다. 또한 郭等(1990)은 Maruyama가 제안한 時間依存 緩傾斜 方程式을 이용하여 任意 反射率 境界를 포함시켜 厚浦港에 대한 波高分布를 계산하였다.

반면 유한요소법인 경우에는 要素 形狀의 선택에 임의성이 있고 복잡한 형상의 항만에 대하여도 쉽게 적용할 수 있을 뿐만 아니라 境界條件 처리에 별다른 어려움을 요하지 않아 현재 일반적으로 사용하는 방법으로 많은 연구가 진행되어 왔다. 이 중 Berkhoff(1972, 1976)는 緩傾斜 方程式을, Chen과 Mei(1974)는 淺水 方程式을 지배 방정식으로 하여 港內領域에서는 有限 要素技法을, 外海領域에서는 湧出點 分布(source distribution)와 級數形態의 解析解를 이용하는 複合 要素法(Hybrid Element Method)을 이용하여 해석하였다. 또한 이와 같은 복합 요소기법을 이용하여 Ganaba等(1982), Chen(1986), Lee(1989) 등은 경계면에서의 吸收와 海底 摩擦에 의한 에너지 損失에 대하여 연구하였다. Bettles와 Zienkiewicz(1977)는 無限 要素技法이라는 좀 다른 접근방법을 사용하여 해석하였다.

경계적분 방정식법의 경우에는 유한차분법이나 유한요소법과는 달리 未知數가 경계상에 한정되어 있다는 長點이 있으나, 해안선이 일직선이라는 가정과 함께 항내에서 水深變化에 의한 효과와, 해저면에서의 마찰 등에 의한 에너지 손실 효과를 충분히 고려하지 못하는 短點이 있다. 이 방법의 대표적인 연구로서 Hwang과 Tuck(1970)는 임의형상 항만에의 적용이 가능한 기존의 방법이 대상영역을 외해와 항내영역으로 구분하여 양 지역의 해를 항만입구에서 접합시켜 계산하는 방법들과는 다르게 항만 입구에서의 경계 조건을 제거하여 하나의 積分 方程式을 사용하여 해석하였다. 반면 Lee(1971, 1972, 1975)는 양 지역의

해를 항만 입구에서 접합시키는 방법으로 여러 개가 연결된 水域 및 항만 내부에 섬(Island)이 존재하는 경우 등에 대하여 연구하였다. 또한 Mattioli(1978)는 수심변화를 갖는 直四角形 항만에서 장주기파에 대한 항만의 응답특성을 연구하였으며 Yoshida와 Ijima(1983)는 항내에서의 波浪運動에 대한 速度 포텐셜을 나타내기 위하여 Green 3次定理를 이용하여 해석하고, 외해영역에서는 Lee(1971)가 사용한 방법을 이용하여 수심변화에 대한 파도 응답특성을 해석하여 Mattioli(1978)의 결과와 비교하였다. Kusaka(1988)는 수심효과를 고려하기 위하여 항만을 여러 개의 部分 水域으로 구분한 다음, 수역간에는 수심의 차이가 있지만 각각의 수역상에서는 수심이 일정하다고 가정하여 해석하였다. 또한 에너지 損失效果를 고려하기 위하여 임의의 内部 反射率을 부여하였으며, 항만 입구의 防波堤나 構造物 등에 의한 廻折效果를 고려하기 위하여 外海 境界條件을 級數解의 형태로 나타내어 해석하였다. 이와 같은 방법에 의하여 구해진 결과를 水理 模型實驗 결과와 비교하였다.

단주기파 해석에 실용적인 근사해법중 근사 境界積分法(Sogreah法)은 Biesel과 Ranson(1961)이 光學에서 Kirchhoff 廻折理論을 확장하여 항내 파고분포를 계산하기 위해 제안한 방법이고, Larsen(1977)의 波向線法은 타원형의 境界值 問題를 波向線을 따른 初期值 問題로 변형하여 해석하는 방법이다. 또한 Takayama(1981)는 항내에서의 파랑변형을 防波堤 開口部와 岸壁 끝 부분에서의 廻折 및 反射 두 가지로 나누어, 前者는 半無限 防波堤에 의한 廻折係數를, 後者에 대하여는 岸壁을 島提로 보는 경우의 반사파의 理論解를 이용하여 계산하고 이것을 에너지적으로 重疊하는 方法을 제안하였다.

또한 직사각형 항만이나 원형 항만 같은 단순한 형상에 대한 엄밀해는 Fourier 解析法과 接合漸近展開法(Matched Asymptotic Expansion Method)을 사용하여 구할 수 있다. Fourier 해석법의 경우에는 Miles와 Munk(1961), Ippen과 Goda(1963) 및 Lee(1971) 등에 의하여 연구되었으며, 접합접근 전개법의 경우는 Su(1973), Mei와 Petroni(1973), Üntüata와 Mei(1975), Roger와 Mei(1978), 趙(1991) 등에 의하여 연구되었다. 本 研究에서는 境界積分 方程式法을 이용하여 항만 입구의 防波堤나 기타 구조물 등에 의하여 발생하는 파랑의 廻折效果를 고려하기 위하여

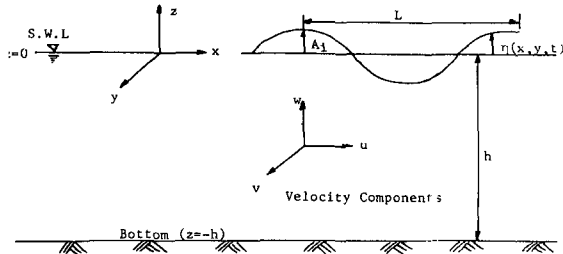


Fig. 1. Definition sketch of the coordinates system

외해 경계조건을 임의의 가상 경계에 용출점을 분포시키는 방법으로 개량하여 도입하였다. 또한 항내 안벽이나 저면 마찰에 따른 에너지 손실효과를 고려할 수 있도록 임의 반사를 개념을 도입한 數值模型을 수립하여 항만 波浪 應答特性을 Fourier 解析法과 接合漸近 展開法에 의해 구한 해석해와 비교하였다. 또한 厚浦港에 대한 파고분포를 계산하여 水理 模型 實驗 結果 및 時間依存 緩傾斜方程式을 이용하여 기존에 계산된 수치결과와 비교하여 本 模型의 타당성을 검토하였다.

2. 數學的 模型

2.1 支配 方程式

Fig. 1과 같이 水平面을 x, y 평면으로, 鉛直上向을 z축으로 하였으며, 對象流體는 非壓縮性이고, 流體運動을 非回轉性이라 가정하면 Laplace 방정식을 만족하는 速度 포텐셜이 존재한다.

連續 方程式에 速度 포텐셜 $\Phi(x, y, z, t)$ 를 도입하면 다음 式 (1)의 Laplace 방정식을 얻을 수 있다.

$$\nabla^2 \Phi(x, y, z, t) = 0 \quad (1)$$

그리고 式 (1)은 다음의 경계조건, 式 (2)의 바닥 境界條件(Bottom Boundary Condition)과 式 (3)의 수면의 運動學的 自由表面 境界條件(Kinematic Free Surface Boundary Condition) 및 式 (4)의 動力學的 自由表面 境界條件(Dynamic Free Surface Boundary Condition)을 만족한다.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, y, z, t)_{z=-h} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (3)$$

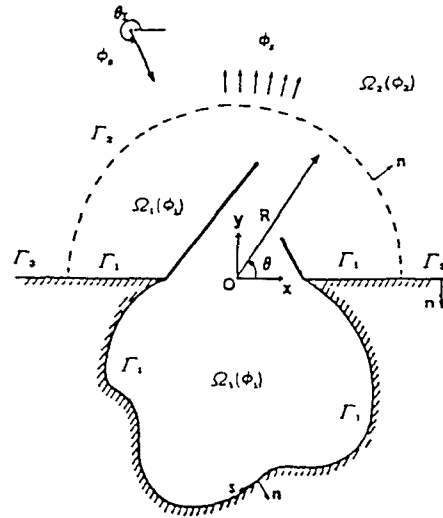


Fig. 2. Computational domain and boundary

$$\eta = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{z=0} \quad (4)$$

여기서 t는 時間, η는 水面變位, g는 重力 加速度이다.

대상 유체영역에서 海底傾斜가 충분히 완만하다고 하고, 유체운동이 시간 t에 대해 調和運動을 한다면, 式 (1)을 만족하는 해를 變數 分離法에 의하여 다음 式 (5)와 같이 나타내면 $\phi(x, y)$ 는 式 (6)의 緩傾斜 方程式을 만족한다.

$$\Phi(x, y, z, t) = \phi(x, y) \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{-i\omega t} \quad (5)$$

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \phi) + k^2 CC_g \phi = 0 \quad (6)$$

여기서 k는 波數, ω는 角 周波數, C는 波速이고 C_g는 群速度를 나타낸다.

특히 대상영역의 수심이 일정하다고 가정하면 式 (6)은 다음 式 (7)의 Helmholtz 方程式이 된다.

$$\nabla^2 \phi(x, y) + k^2 \phi(x, y) = 0 \quad (7)$$

본 연구에서는 式 (7)을 支配 方程式으로 하여 Fig. 2와 같은 半無限 領域에 접속된 임의의 형상의 항만에 대하여 해석하였다. 式 (7)은 타원형 編微分 方程式이기 때문에 해를 결정하기 위해서는 對象領域의 全 境界상에 境界條件이 주어져야 한다. 따라서 본 연구에서는 港灣領域에서는 Γ₁, 海岸線에서는 Γ₃의 固定

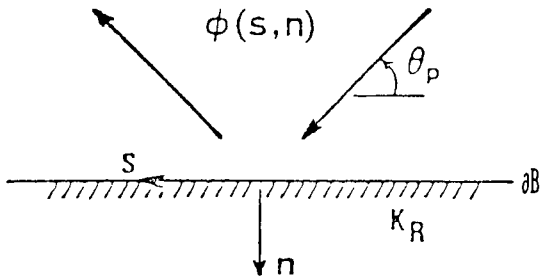


Fig. 3. Absorbing boundary system

境界條件(部分 吸收條件)이, 無限 遠方에서는 散亂波에 대한 放射條件(Radiation Condition)을 주었다.

2.2 境界條件

2.2.1 固定 境界條件(部分 吸收條件)

Fig. 3과 같은 座標系에서 反射率 K_R 을 갖는 直線 境界상에 角度 θ_p 를 가지고 入射하는 파의 部分 反射를 생각한다. 이때 部分 重複波의 速度 포텐셜을 $\phi(s, n)$ 이라 하면 다음의 式 (8)과 式 (9)가 성립한다 (Behrendt and Jonsson, 1984 ; Kusaka, 1988).

여기서 K_R 은 入射파와 反사파의 위상차 ϵ 을 포함하는 反사율로 $K_R = |K_R|e^{i\epsilon}$ 과 같이 표시할 수 있으며 0과 1 사이의 값을 갖는다. 또한 s 는 ∂B 에 대하여 접선방향을 가지는 좌표이고, n 은 법선방향을 가지는 境界상의 좌표로 정의한다.

$$\phi = e^{i(k_{np} n + k_{sp} s - \omega t)} \tag{8}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = ik \frac{1 - K_R}{1 + K_R} \sin \theta_p \phi \text{ at } n=0 \tag{9}$$

그러나 式 (9)는 入射角 θ_p 의 函數로 되어 있어 境界상에서 入射각 θ_p 를 구하지 못하면 境界조건으로 사용하는 것이 불가능하고 항내와 같은 항만 境界에 여러 方向으로부터 파가 入射하는 경우에는 入射角 θ_p 가 하나로 결정되지 못한다. 따라서 式 (9)를 境界조건으로 사용하기 위하여, θ_p 와는 독립적인 線形 近似 境界條件을 아래와 같은 수학적 展開에 의하여 구할 수 있다.

만약 θ_p 가 작지 않은 경우

$$k_{np} = k \sin \theta_p \tag{10a}$$

$$k_{sp} = k \cos \theta_p \tag{10b}$$

로 놓을 수 있다. 式 (10a, b)를 양변 제곱하여 더한 다음 Taylor級數를 이용하면 다음의 式 (11)이 된다.

$$k_{np} = k \sqrt{1 - (k_{sp}/k)^2} = k \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{k_{sp}}{k} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{k_{sp}}{k} \right)^4 - \dots \right] \tag{11}$$

式 (11)에서 $(k_{sp}/k)^4$ 이상의 항을 무시한 다음, 式 (8)에서 얻을 수 있는 $\partial^2 \phi / \partial s^2 = -k_{sp}^2 \phi$ 의 관계를 이용하면 式 (9)로부터 θ_p 의 영향을 감소시킬 수 있는 다음의 近似式 (12)를 얻을 수 있다.

$$ik \frac{\partial \phi}{\partial n} + \alpha k^2 \phi + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} = 0 \tag{12}$$

여기서 α 는 吸收率로 다음과 같다.

$$\alpha = \frac{1 - K_R}{1 + K_R}$$

式 (12)를 式 (9)과 비교하여 볼때 式 (12)의 처음 두 항이 式 (9)에서 $\theta_p = 90^\circ$ 인 경우와 동일하다. 따라서 式 (12)는 式 (9)의 형태를 내재하면서 θ_p 와의 관계를 없앤 근사식으로 수치 계산상의 고정 境界조건으로 사용할 수 있다. 그러므로 이 근사적인 境界조건의 특성을 알아보기 위해 完全吸收인 경우($K_R = 0$)를 선택하여 反射率과 入射角 θ_p 와의 관계를 살펴 보자. 먼저 式 (12)의 처음 두 항을 가지고 계산한 反사율을 K_{R1} 이라 하고 2차 미분의 高次項을 포함시켜 계산한 反사율을 K_{R2} 라고 할 때, 式 (8)을 이용하면 $n=0$ 에서 다음의 式 (13)과 式 (14)를 얻을 수 있다.

$$K_{R1} = \frac{\sin \theta_p - 1}{\sin \theta_p + 1} \tag{13}$$

$$K_{R2} = - \left[\frac{\sin \theta_p - 1}{\sin \theta_p + 1} \right]^2 \tag{14}$$

Fig. 4가 入射각 θ_p 와 K_R 과의 관계를 나타낸 것으로 K_{R1} 은 式 (13)에 의하여, K_{R2} 는 式 (14)에 의하여 계산한 결과로 빗금친 부분이 θ_p 에 따라 발생하는 오차의 크기를 나타낸 것으로서 θ_p 가 작아지면 오차 反사율 K_R 의 絕對值가 커지고 있음을 알 수 있다. 만약 $|K_R| < 0.05$ 인 조건을 가정한다면, K_{R1} 인 경우는 $\theta_p > 65^\circ$, K_{R2} 인 경우에는 $\theta_p > 40^\circ$ 인 條件을 만족해야 만 式 (12)를 부분흡수 고정 境界조건으로 사용할

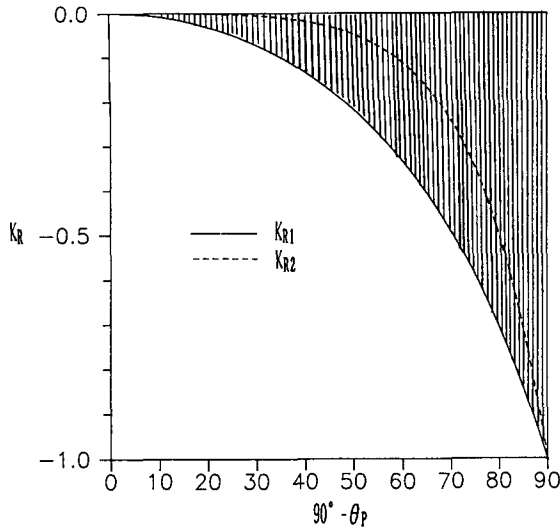


Fig. 4. Reflection coefficient K_R for the absorbing boundary condition as a function of the angle of incidence θ_p

수 있다. 본 연구에서는 계산의 간편성을 위하여 高次項을 포함시키지 않은 다음의 식 (15)를 사용하였다.

$$ik \frac{\partial \phi}{\partial n} + \alpha k^2 \phi = 0 \quad (15)$$

2.2.2 放射條件

외해영역에서의 速度 포텐셜 ϕ_2 를 다음의 식 (16)와 같이 2개의 成分으로 나누어 표현하면

$$\phi_2 = \phi_o + \phi_s \quad (16)$$

이고, 여기서 ϕ_o 는 入射波와 反射波 速度 포텐셜의 합이며 ϕ_s 는 다음 식 (17)의 Sommerfeld의 放射條件을 만족하는 散亂波의 速度 포텐셜이다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left(\frac{\partial \phi_s}{\partial R} - ik \phi_s \right) = 0 \quad (17)$$

2.2.3 外海 境界条件

현재 대상으로 하고 있는 半無限 領域에서 영역 전체를 離散化하여 계산한다는 것이 불가능하여 어떠한 외해 境界條件이 필요하게 된다. 따라서 外海 境界面 Γ_2 바깥쪽에서 水深이 일정하다고 가정하면 다음과 같은 외해 境界조건을 이용할 수 있다(Zienkiewicz et al., 1977; Pos, 1985).

1) Γ_2 상에서 放射條件이 近似的으로 성립한다고 가정하는 方法

2) Γ_2 상에서 외부의 ϕ_o 를 식 (16)의 放射條件을 만족하는 級數形態의 해로 표현하여 놓고 Γ_2 상에서 내부해와 接續하여 그 係數를 결정하는 方法(예: Mei, 1983)

3) 외부영역을 Γ_2 상에 놓은 湧出點(Source) 또는 2重 湧出點(Doublet) 分布로 나타내고 내부해와 接續하여 그 強度를 결정하는 方法(Zienkiewicz et al., 1977)

4) 形狀函數가 指數函數 형태를 가지는 無限要素를 사용하는 方法(Bettes & Zienkiewicz, 1977)

本 研究에서는 Green函數를 이용하여 境界상에 湧出點과 2重 湧出點을 분포시킨 다음, 그 強度를 가지고 내부영역의 해를 계산하기 때문에 3)의 方法을 이용하여 해석하였다.

3. 境界積分 方程式法

3.1 境界積分 方程式

Helmholtz 方程式 (7)을 支配方程式으로 하여 Green 定理를 內해영역과 外해영역에 적용하면 다음의 식 (18)과 식 (19)를 얻는다. 이때 Helmholtz 방정식을 만족하는 主要解를 第1種 0次の Hankel 函數 $H_0^{(1)}(kr)$ 을 선택한다.

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y) = & \lambda \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} [\phi_1(\mu, \nu) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr) \\ & - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial}{\partial n} \phi_1(\mu, \nu)] ds(\mu, \nu) \text{ in } \Omega_1 \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_s(x, y) = & \lambda \left(\int_{\Gamma_3 + \Gamma_\infty} ds - \int_{\Gamma_2} ds \right) [\phi_s(\mu, \nu) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr) \\ & - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial}{\partial n} \phi_s(\mu, \nu)] \text{ in } \Omega_2 \quad (19) \end{aligned}$$

여기서 $r = \sqrt{(x-\mu)^2 + (y-\nu)^2}$ 이고, λ 는 境界내부에 있을 경우에는 $-i/4$, 境界선상에 있을 때는 $-i/2$, 境界외부에 있을 때는 0이 된다. 또한 (μ, ν) 는 境界상에 있는 湧出點의 위치이다.

式 (18)과 식 (19)에 境界조건 (15)와 (17)式을 대입하여 정리하면 다음의 최종적인 境界積分 方程式

(20)과 (21)을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y) &= \lambda \int_{\Gamma_1} \left[\frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr) - ik\alpha H_0^{(1)}(kr) \right] \\ &\quad \phi_1(\mu, \nu) \, ds + \lambda \int_{\Gamma_2} \left[\phi_1(\mu, \nu) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr) \right. \\ &\quad \left. - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial}{\partial n} \phi_1(\mu, \nu) \right] ds \text{ in } \Omega_1 \quad (20) \\ \phi_s(x, y) &= \lambda \int_{\Gamma_3} \left[\frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr) - ik\alpha H_0^{(1)}(kr) \right] \\ &\quad \phi_s(\mu, \nu) \, ds - \lambda \int_{\Gamma_2} \left[\phi_s(\mu, \nu) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr) \right. \\ &\quad \left. - H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial}{\partial n} \phi_s(\mu, \nu) \right] ds \text{ in } \Omega_2 \quad (21) \end{aligned}$$

따라서 위의 境界積分 方程式을 풀기 위하여 $\vec{x}=(x, y)$ 를 Γ_1, Γ_2 및 Γ_3 상에서 택하고 境界面을 작은 要素 (Segment) Δs 로 나누어 각 요소상에서 속도 포텐셜이 일정하다는 가정과, Γ_2 상에서는 $\phi_1 = \phi_0 + \phi_s$, $\partial\phi_1/\partial n = \partial(\phi_0 + \phi_s)/\partial n$ 의 조건을 이용한 다음, 적분 방정식을 연립방정식으로 변환하여 境界상에서의 速度 포텐셜을 구한다. 또한, 항내 및 항외의 속도 포텐셜은 境界면의 속도 포텐셜을 이용하여 式 (18)과 式 (19)를 이용하여 구할 수 있다.

3.2 聯立 方程式

대상영역 全 境界상의 要素數를 N 개, 외해 境界面의 요소수를 NP 개라 하면, 항내 영역 Ω_1 과 외해영역 Ω_2 에서 다음의 式 (22)와 式 (23)의 聯立 方程式을 만들 수 있다.

$$AN \cdot \phi = BN + QQ1 \cdot C \quad \text{on } \Gamma_1 \text{ and } \Gamma_2 \quad (22)$$

$$H \cdot \phi = QQ2 \cdot C \quad \text{on } \Gamma_2 \text{ and } \Gamma_3 \quad (23)$$

여기서

$$\phi = \phi_1(\vec{X}_i) \quad ; \quad i=1, 2, \dots, N$$

$$AN = \left[1 - \lambda \left[\frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr_{ij}) - ik\alpha H_0^{(1)}(kr_{ij}) \right] \Delta s_j \quad ; \quad i=j$$

$$\left[-\lambda \left[\frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr_{ij}) - ik\alpha H_0^{(1)}(kr_{ij}) \right] \Delta s_j \quad ; \quad i \neq j$$

$$; \quad i=j=1, 2, \dots, N$$

$$BN = \begin{cases} -\phi_0(\vec{X}_i) + \lambda \sum_{j=1}^{NP} \left[\frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr_{ij}) \phi_0(\vec{X}_j) \right. \\ \left. - H_0^{(1)}(kr_{ij}) \frac{\partial}{\partial n} \phi_0(\vec{X}_j) \right] \Delta s_j \quad ; \quad i=1, 2, \dots, NP \\ \lambda \sum_{j=1}^{NP} \left[\frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr_{ij}) \phi_0(\vec{X}_j) - H_0^{(1)}(kr_{ij}) \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial n} \phi_0(\vec{X}_j) \right] \Delta s_j \quad ; \quad i=NP+1, NP+2, \dots, N \end{cases}$$

$$QQ1 = -\lambda H_0^{(1)}(kr_{ij}) \Delta s_j \quad ; \quad i=j=1, 2, \dots, N$$

$$QQ2 = \lambda H_0^{(1)}(kr_{ij}) \Delta s_j \quad ; \quad i=j=1, 2, \dots, NP$$

$$H = \begin{cases} 1 + \lambda \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr_{ij}) \Delta s_j \quad ; \quad i=j \\ \lambda \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr_{ij}) \Delta s_j \quad ; \quad i \neq j \end{cases} \quad ; \quad i=j=1, 2, \dots, NP$$

$$C = \frac{\partial}{\partial n} \phi_s(\vec{X}_j) \quad ; \quad j=1, 2, \dots, NP$$

여기서

\vec{X}_i 는 境界상에 있는 위치벡터(x_i, y_i),

r_{ij} 는 \vec{X}_i 와 \vec{X}_j 사이의 거리($|\vec{X}_i - \vec{X}_j|$),

Δs_j 는 境界상의 j 번째 요소의 길이.

式 (22)과 式 (23)을 더 정리하면 式 (24)과 式 (25)로 나타낼 수 있다.

$$\phi = S + M1 \cdot C \quad \text{on } \Gamma_1 \text{ and } \Gamma_2 \quad (24)$$

$$\phi = M2 \cdot C \quad \text{on } \Gamma_2 \text{ and } \Gamma_3 \quad (25)$$

여기서

$$S = AN^{-1} \cdot BN$$

$$M1 = AN^{-1} \cdot QQ1$$

$$M2 = H^{-1} \cdot QQ2$$

따라서 式 (24)와 式 (25)를 항만 입구에서 접합시키면 전 境界상의 속도 포텐셜을 구할 수 있다. 또한

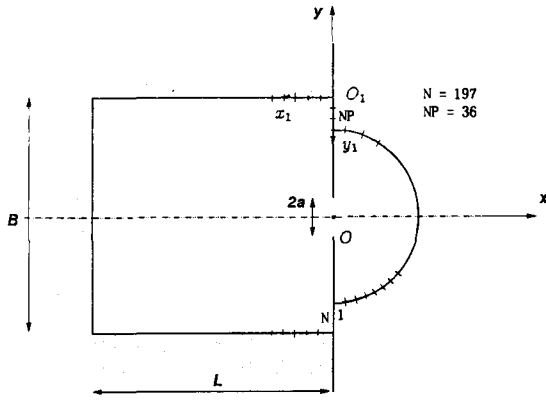


Fig. 5. Definition sketch for a rectangular harbor

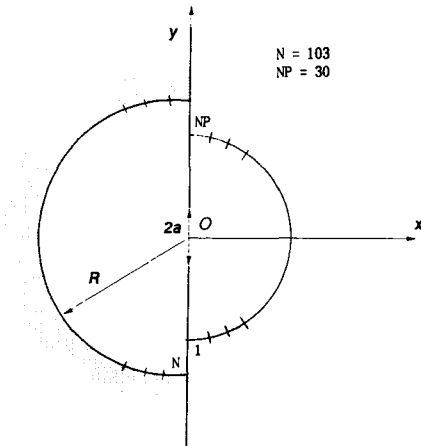


Fig. 6. Definition sketch for a semi-circular harbor

항만의 파랑응답 특성을 해석하는데 일반적으로 사용하는 λ ·反射波에 대한 항내 임의점의 波高比인 增幅比(Amplification Factor)를 다음式 (26)과 같이 정의할 수 있다.

$$R = \frac{|\phi(x, y, t)|}{|A_i \phi_0(x, y) e^{-i\omega t}|} \quad (26)$$

여기서 A_i 는 入射波의 振幅이다.

4. 港内 靜穩度 解析

4.1 數值模型의 檢證

境界積分 方程式法에 의하여 수립된 본 연구의 數值模型의 타당성을 檢證하기 위하여 Fourier 解析法에 의하여 解析解를 구할 수 있는 直四角形 港灣(Lee,

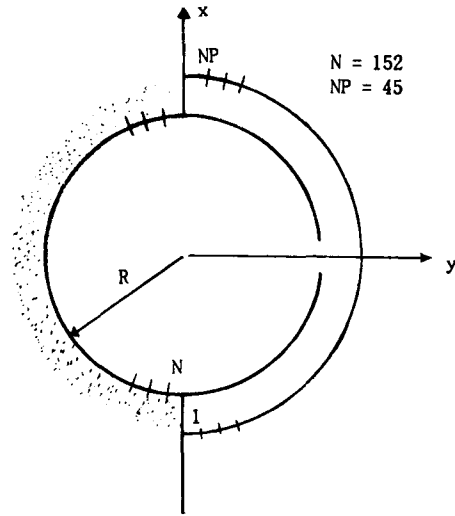


Fig. 7. Definition sketch for a semi-circular harbor with protruding breakwater

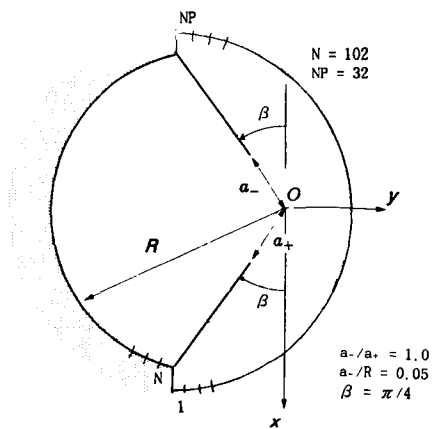


Fig. 8. Definition sketch for a semi-circular harbor with inclined breakwater

1971)의 波浪應答 特性과 接合漸近 展開法에 의하여 엄밀해를 구할 수 있는 半圓形 港灣(趙, 1991) 및 항 入口에 방파제를 갖는 半圓形 港灣(Mei and Petroni, 1973)의 波浪應答 特性을 比較하였다. Fig. 5에 直四角形 港灣을, Fig. 6에 半圓形 港灣을, 그리고 Fig. 7, 8에 방파제를 갖는 半圓形 港灣을 나타내었다. 먼저 Fig. 5의 直四角形 港灣에 대하여는 항만 전 境界 要素수(N)를 197개, 외해 境界 要素수(NP)를 36개로 하여 數值計算을 하였으며, Fig. 6의 半圓形 港灣의 경우는 N=103개, NP=30개로 하여 계산을 하였다. 또한 Fig. 7의 圓形 형태의 방파제를 갖는 半圓形 항

만의 경우는 N=152, NP=45를, Fig. 8의 경우는 N=102, NP=32로 하였다. 이때 각 要素의 최대 크기는 L/10(L: 파장)을 넘지 않게 하였다. 이는 境界積分方程式法이 경계면을 따른 적분식을 離散化하여 계산하여 방법이기에 때문에 경계면을 따른 要素의 크기가 數値解의 결과에 직접적인 영향을 준다. 따라서 일반적으로 사용하고 있는 위의 制約條件(L/10)을 만족하여야만 정도가 높은 수치해를 얻을 수 있다(Chen and Mei, 1974). 특히 날카로운 모서리 부근에서는 요소의 크기를 위의 제약식보다도 훨씬 작게 하여야 한다. 또한 수치계산 결과와 比較하기 위하여 다음의 解析解를 사용하였다.

i) 直四角形 港灣의 解析解

$$\phi(x, y) = \frac{1}{S_0 + \bar{S}_m + \bar{B}_0} [S_0(x, y) + S_m(x, y)]$$

여기서,

$$S_0(x, y) = -\frac{d \cos k(y+1)}{bk \sin(kl)}$$

$$S_m(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \left[\sin \frac{m\pi}{b} (d+d_0) - \sin \frac{m\pi}{b} d_0 \right]}{m\pi \beta_m \sin \beta_m l} \cos \left(\frac{m\pi}{b} x \right) \cosh \beta_m (y+1) \quad (\otimes)$$

$$\bar{S}_0 = -\frac{d}{bk} \cot kl$$

$$\bar{S}_m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2b \left[\sin \frac{m\pi}{b} (d_0+d) - \sin \frac{m\pi}{b} d_0 \right]^2}{(m\pi)^2 \beta_m \tanh \beta_m l}$$

$$\bar{B}_0 = -\frac{i}{2} \left(J_c + i \frac{i}{\pi} Y_c \right) \Delta s$$

ii) 半圓形 港灣의 解析解

$$\phi = A_0 [J_0(kr) - \mu_0(kr)Y_0(kr)] + A_1 \cos \theta [J_1(kr) - \mu_1 Y_1(kr)]$$

기타 자세한 변수는 앞에서 언급한 참고문헌을 참고하기 바란다.

Fig. 9-1은 직사각형 항만의 波浪應答 特性을 나타낸

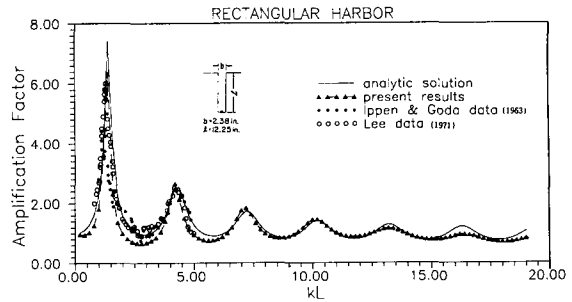


Fig. 9-1. Response curves for a fully open rectangular harbor

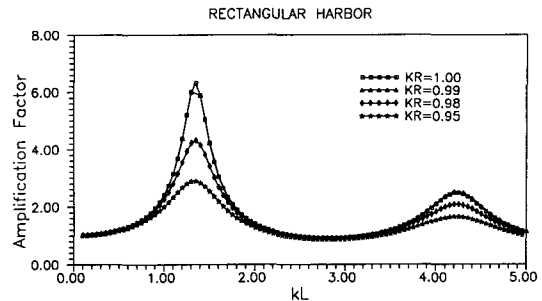


Fig. 9-2. Response curves for a rectangular harbor as a function of the reflection coefficient

것으로서, 實線으로 나타낸 것이 Fourier 해석법에 의하여 구한 解析解(Lee, 1971)이고 ●와 ○로 나타낸 것이 水理 模型實驗에 의하여 얻은 결과(Ippen & Goda, 1963 ; Lee, 1971)이다. 본 수치모형으로 구한 결과를 앞에서 언급한 결과와 비교할 때 共振點의 위치나 增幅比의 크기가 모두 잘 일치하고 있다. 또한, 未知數가 境界상에 한정되어, 입력자료 준비에 커다란 어려움이 없는 본 수치계산 방법의 장점을 이용하여 파장이 비교적 작은 영역에 대하여도 계산하였는데 이에 대한 결과도 매우 잘 일치하고 있다. 따라서 항내 파랑 응답문제에서 대두되는 문제중의 하나인 단주기파 해석에 있어서도 제한적인 유용성을 갖는다고 생각된다. 또한 Fig. 9-2는 장주기파에 대한 부분반사의 효과를 알아보기 위하여 반사계수의 변화에 대한 파랑응답 특성을 나타낸 것으로서 반사계수의 작은 변화에도 증폭비의 차이가 크게 나타나고 있어 반사계수에 매우 민감함을 알 수 있다.

Fig. 10-1은 반원형상의 항만에 대한 波浪應答 特性으로 접합점근 전개법에 의하여 구한 해석해(趙, 1991)와 比較한 것으로서 항만 입구의 開放比(a/R,

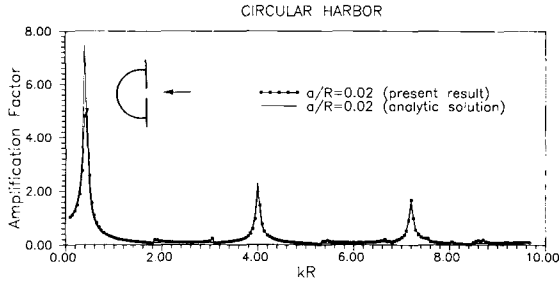


Fig. 10-1. Response curves for a partially open semi-circular harbor($a/R=0.02$)

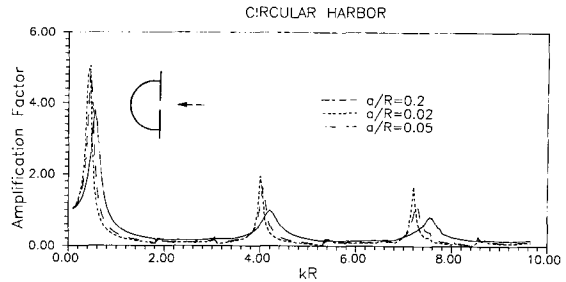


Fig. 11. Response curves as a function of the opening ratio(a/R)

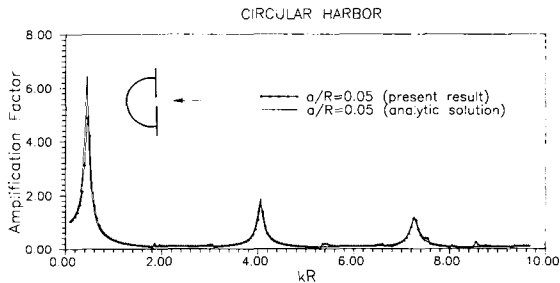


Fig. 10-2. Response curves for a partially open semi-circular harbor($a/R=0.05$)

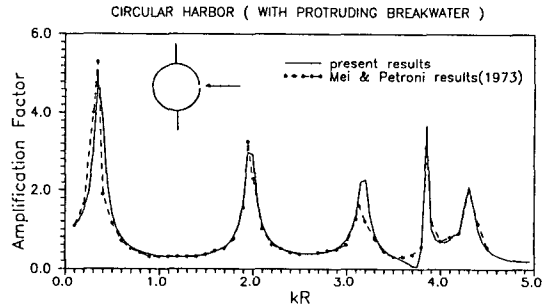


Fig. 12. Response curves for a semi-circular harbor with protruding breakwater

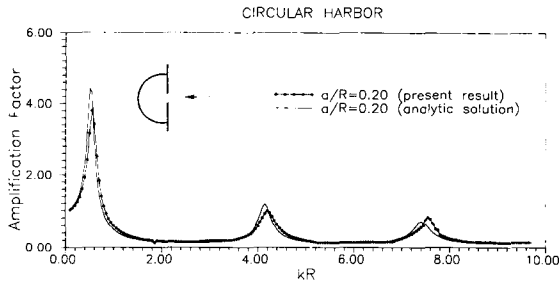


Fig. 10-3. Response curves for a partially open semi-circular harbor($a/R=0.20$)

a 는 항만 입구의 폭, R 은 항만의 반지름)가 0.02로 入射波의 파장에 비하여 항만 입구가 매우 작은 경우이다. 이 결과도 또한 共振點의 위치나 增幅比의 크기가 매우 잘 일치하고 있다. 그러나 Helmholtz 모드에서 미지수를 전 경계상에 대하여 평균하여 접합시키는 반면 본 수치 계산에서는 항만 입구를 작은 要素로 나누어 각각의 요소에 대하여 접합시켰기 때문에 발생한 차이로 생각된다. $a/R=0.05$ 인 Fig. 10-2의 경우도 같은 결과를 보이나, Fig. 10-3의 $a/R=0.2$ 인 경우에는 共振點의 위치나 增幅比의 크기에 약간의 차이를 보이고 있다. 이는 항만입구의 폭이 Fig. 10-1

이나 Fig. 10-2보다 큰 경우로 入射波의 波長이 항만 入口幅에 비하여 매우 크다는 接合漸近 展開法의 가정에 약간 어긋나기 때문이라 생각된다. Fig. 11은 항만 入口의 開放比 차이에 따른 항내의 共振 特性을 알아보기 위하여 나타낸 것으로서 港灣 入口가 작아짐에 따라 共振點의 위치는 低周波數帶로 이동하고 增幅比의 크기가 크게 나타나는 港灣 逆說(Harbor Paradox) 現象(Miles and Munk, 1961)이 나타나고 있다. 이와 같은 현상은 실제로는 일어나지 않는 현상으로 항내 岸壁이나 防波堤에서의 반사를 完全反射로, 저면에서의 摩擦이나 파랑의 碎破에 의하여 발생하는 에너지 損失效果를 고려하지 않은 결과이다. 본 수치계산에서도 解析解와 비교하기 위하여 안벽이나 방파제를 따른 반사를 完全反射로 하였다. 또한 Fig. 12는 원형형태의 방파제를 갖는 반원형 항만의 共振特性을 나타낸 것으로서 본 연구에서 계산한 결과가 해석해(Mei and Petroni, 1973)와 잘 일치하고 있다. 마찬가지로 Fig. 13은 경사진 방파제를 갖는 반원형 항만의 공진특성을 接合漸近 展開法에 의하여 구한 해석해(趙, 1991) 및 複合 要素法에 의하여 구한

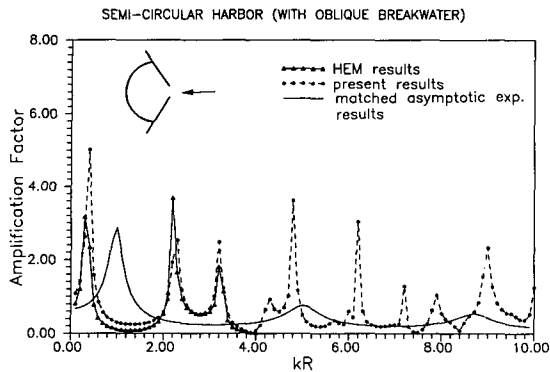


Fig. 13. Response curves for a semi-circular harbor with inclined breakwater

결과와 비교한 것이다. 이때 복합 요소법의 계산 결과는 입력자료를 작성하는 과정에서 요소의 크기가 $L/10$ 의 제약조건을 만족시키기 위하여 kR 이 4일 때까지만 계산하였다. 본 연구의 결과와 복합 요소법의 결과를 비교하면 증폭비의 크기에는 차이를 보이고 있으나 공진점의 위치는 비교적 잘 일치하는 경향을 보이고 있다. 그러나 앞의 두 결과(본 연구와 HEM의 결과)와 해석해는 커다란 차이를 보이고 있어 이에 대한 검토가 필요하다고 생각한다. 이상의 결과에서 살펴보았듯이 방파제나 기타 구조물 등에 의한廻折의 효과를 반영하기 위하여 도입한 외해 경계조건이 만족스럽게 처리되었다고 생각된다.

4.2 실제 港灣에의 適用

本 研究에서 적용한 對象港灣은 항의 형상이 비교적 간단하고 항내의 水深이 비교적 일정($h=4m$)한 慶尚北道 蔚津郡 厚浦里內에 위치한 厚浦港으로서 海運 港灣廳 所管인 2種港이며 주로 漁港으로 이용되고 있고, 建設部 國立 建設試驗所에서 1988년 5월부터 8월까지 港內 靜穩度에 관한 水理模型 實驗을 실시하였다. 항만의 일반형상은 Fig. 14와 같으며 海象條件으로는 規則波로 週期 14 sec, 波高 1m, 波向은 SE를 主 方向으로 선택하였다. 또한 수리모형 실험 결과와 비교하기 위하여 Fig. 15와 같이 항내를 區域別로 구분하였다. 이때 수치계산에 사용한 경계면의 요소수는 $N=207$ 개, $NP=62$ 개를 사용하였으며, 항내의 파고비를 계산하기 위하여 사용한 내부점의 총 좌표수는 187개이다.

이와 같은 대상항만에서의 數值計算은 동일 週期와

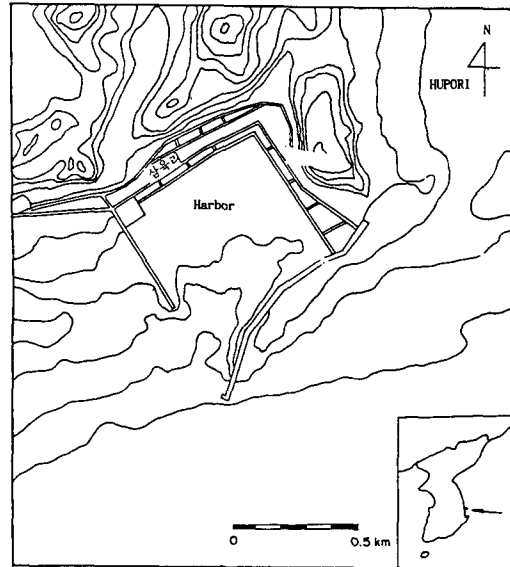


Fig. 14. Configuration of Hupo Harbor

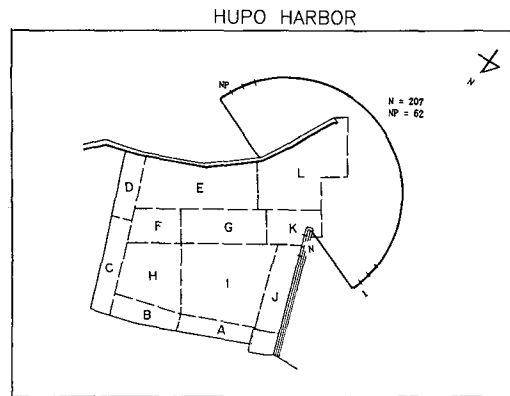


Fig. 15. Division of experimental regions in Hupo Harbor

동일 波向에 대하여 防波堤와 항내 岸壁에서 部分 反射率(K_R)을 변화시켜 행하였다. 이는 항내에서 발생할 수 있는 여러 에너지 損失效果를 境界상에서의 部分 反射率 概念으로 처리하였기 때문이다.

Table 1이 수리모형 실험결과(建設 試驗所, 1988) 및 기존에 본 대상영역에 대하여 수행한 다른 수치모형의 결과(郭 等, 1990)를 본 연구에서 수행한 결과와 함께 나타낸 區域別 平均 波高비이다. 먼저 방파제나 항내 안벽을 따라 完全反射($K_R=1.0, 1.0$)로 가정하여 계산한 경우를 수리모형 실험 결과와 비교하면, 수치해의 결과가 수리모형의 결과와 큰 차이를

Table 1. Comparison of calculated and experimental values

Models Regions	Hydraulic Moel	Time Dependent Mild slope Eq. Model $K_R=0.5, 0.9$	Present Model				
			case 1 $K_R=1.0, 1.0$	case 2 $K_R=0.8, 0.9$	case 3 $K_R=0.7, 0.9$	case 4 $K_R=0.6, 0.9$	case 5 $K_R=0.5, 0.9$
A	0.18	0.19	0.38	0.22	0.20	0.19	0.17
B	0.28	0.13	0.25	0.18	0.17	0.17	0.16
C	0.16	0.13	0.46	0.27	0.23	0.21	0.18
D	0.18	0.12	0.24	0.14	0.13	0.13	0.14
E	0.09	0.10	0.34	0.20	0.17	0.13	0.12
F	0.18	0.19	0.40	0.24	0.19	0.16	0.15
G	0.34	0.20	0.31	0.20	0.18	0.17	0.16
H	0.21	0.12	0.38	0.21	0.17	0.15	0.14
I	0.19	0.22	0.39	0.21	0.18	0.17	0.16
J	0.15	0.27	0.36	0.13	0.11	0.11	0.13
K	0.29	0.31	0.30	0.32	0.29	0.28	0.26
L	0.22	0.19	0.24	0.28	0.27	0.26	0.25
RMS error	*	0.0772	0.1731	0.0741	0.0694	0.0679	0.0699

보이고 있다. 이는 항내에서 여러 인자에 의한 파랑의 에너지 손실이 일어나기 때문이다. 따라서 에너지 손실효과를 처리할 수 있는 어떤 처리법이 수행되어야만 한다. 본 연구에서는 이와 같은 처리법을 部分反射 概念을 이용하여 반사율(Table 1)을 임의로 변화시켜서 계산하였다. 이와 같은 계산된 여러 반사율 중 時間依存 緩傾斜 方程式과 일치된 반사율, 防波堤에서는 $K_R=0.5$, 항내 岸壁에서는 $K_R=0.9$ 인 결과를 대상으로 비교하면, 먼저 A, C, D, F, I 領域에서는 수리모형 실험의 결과 및 다른 수치모형의 결과와 비교적 잘 일치하나 B, G, H 領域인 경우에는 다른 수치모형의 결과와는 잘 일치하지만 수리모형의 결과와는 차이를 나타내고 있다. 또한 J 領域에서는 본 연구의 결과가 다른 수치모형의 결과보다 수리모형의 결과와 잘 일치한다. 특히 E 領域은 防波堤 裏面으로 波浪의 廻折效를 가장 잘 나타내주는 영역으로 다른 영역보다 波高比가 작게 나타나며 본 계산에서도 그와 같은 결과를 얻었다. 또한 RMS 誤차를 시간의존한 경사 방정식을 사용하여 수치계산한 결과와 비교할 때 본 연구의 결과가 수리모형의 결과에 더 근접함을 알 수 있었다. 반면 본 연구의 반사율 변화에 따른 각각의 RMS 오차는 case 4, 3, 5순으로 작고, 短週期波에 대한 반사계수의 영향은 長週期波에 대한 영향보다 작게 나타나고 있음을 알 수 있다. 따라서 안벽이나 방파제를 따른 반사율 개념으로 항내 제반 에너지 손실효과를 비교적 잘 반영할 수 있다고 생

각된다.

5. 結 論

港灣 入口의 防波堤나 기타 構造物 등에 의하여 발생하는 波浪의 廻折效를 고려하기 위하여 도입한 外海 境界條件과 港灣内部 領域에서의 에너지 損失效를 반영시키기 위해 部分 反射概念을 도입하여 改良시킨 境界積分 方程式法을 이용하여 해석한 本 研究에서 다음과 같은 結論을 얻었다.

외해 경계조건 처리를 알아보기 위하여 계산한 直 四角形 港灣이나 半圓形 港灣에 대한 波浪應答 特性을 解析解와 비교하여 본 결과 共振點의 위치나 增幅比의 크기가 매우 잘 일치하였으며, 에너지 損失效를 무시할 경우 港灣 入口의 幅이 작아짐에 따라 共振點의 위치는 低周波數帶로 이동하고 증폭비가 커지는 港灣 逆說現象이 발생함을 알았다. 또한 부분 반사 개념에 의한 에너지 손실효과 반영을 위하여 계산한 厚浦港에 대한 연구에서는 時間依存 緩傾斜 方程式을 이용한 數值模型의 결과 및 水理 模型實驗에 의하여 얻은 결과를 비교하여 볼 때 港內 領域에서의 區域別 波高比가 잘 일치하였다.

따라서 본 연구의 주요 관심사인, 항만입구의 防波堤나 構造物 등에 의해 발생하는 波浪의 廻折效를 반영시키기 위하여 도입한 外海 境界條件의 處理는 만족스럽게 되었다고 보며 또한 항내 여러 因子에

의하여 일어나는 에너지 損失 효과도 비교적 수학적 으로 간단한 部分 反射率 概念을 이용하여 처리할 수 있다고 생각된다. 또한 제한적이기는 하지만 단주기 파에 대한 해석도 가능하리라 생각된다.

參考文獻

- Behrendt, L. and I.G. Jonsson, 1984. The physical basis of the mild slope wave equation, Proc. of 19th. ICCE, ASCE: 941-954.
- Berkhoff, J.C.W., 1972. Computation of combined refraction-diffraction, Proc. 13th. ICCE, ASCE: 471-490.
- Berkhoff, J.C.W., 1976. Mathematical models for simple harmonic linear water waves-Wave diffraction and refraction, Delft Hydraulics Laboratory, Holland, Publication No.163.
- Bettes, P. and O.C. Zienkiewicz, 1977. Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements, *Int. J. for Numerical Methods in Eng.*, **11**(2): 1271-1290.
- Biesel, F. and D. Ranson, 1961. Calculs de diffraction de la houle, AIRH, Dubrovnik.
- Chen, H.S. and C.C. Mei, 1974. Oscillations and wave forces in a manmade harbor in the open sea, Proc. 10th. Symp. Naval Hydrodynamics Office of Naval Research: 573-594.
- Chen, H.S., 1986. Effects of bottom friction and boundary absorption on water wave scattering, *Applied Ocean Research*, **8**(2): 99-104.
- Copeland, G.J.M., 1985. A practical alternative to the mild slope equation, *Coastal Eng.*, **9**: 125-149.
- Ganaba, H.B.C., C. Welford and J.J. Lee, 1982. Dissipative fraction element models for harbor resonance problems, in Kawai, Finite Element Flow Analysis, Univ. of Tokyo Press.
- Hwang, L.S. and E.O. Tuck, 1970. On the oscillations of harbors of arbitrary shape, *J. Fluid Mechanics*, **42**: 447-464.
- Ippen, A.T. and Y. Goda, 1963. Wave induced oscillation in harbor: The solution for a rectangular harbor connected to the open-sea, Rep. No.59, Hydrodynamics Laboratory, M.I.T.
- Ito, Y. and K. Tanimoto, 1972. A method of numerical analysis of wave propagation-Application of wave diffraction and refraction, Proc. 13th. ICCE, ASCE, **1**: 503-522.
- Kusaka, T., 1988. Wave-induced oscillations in a harbor with arbitrary reflectivity and variable depth, *Coastal Eng. in Japan*, **31**(11): 53-67.
- Larsen, J., 1977. Computations of harbor oscillations by ray method, The Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics, Rep. No.S8, The Technical Univ. of Denmark.
- Lee, J.J., 1971. Wave-induced oscillations in harbor of arbitrary geometry, *J. Fluid Mechanics*, **45**: 375-394.
- Lee, J.J., 1972. Oscillations in harbor with connected basins, *J. of the Waterway, Harbor and Coastal Eng.*, ASCE, **98**: 311-331.
- Lee, J.J., 1975. Oscillations in harbor containing island, Proc. Civil Eng. in the Ocean III, I.
- Lee, J.W., 1989. Hybrid element analysis of water waves for harbor design, Ph. D. Thesis, Univ. of Hawaii.
- Maruyama, K. and R. Kajima, 1985. Two-dimensional wave calculation method based on unsteady mild slope equations, Central Research Institute of Electric Power Industry, Japan, Rep., No.384041.
- Mattioli, F., 1978. Wave-induced oscillations in harbors of variable depth, *Computer and Fluids*, **6**: 161-172.
- Mei, C.C., 1983. The applied dynamics of ocean surface waves, Wiley.
- Mei, C.C. and R.P. Petroni, 1973. Waves in a harbor with protruding breakwaters, *J. Waterway, Harbor and Coastal Eng.*, ASCE, **99**: 209-229.
- Miles, J. and W. Munk, 1961. Harbor paradox, *J. Waterways and Harbor Div. ASCE*, **87**: 111-130.
- Pos, J.D., 1985. Asymmetrical breakwater gap wave diffraction using finite and infinite elements, *Coastal Eng.*, **9**: 101-123.
- Raichlen, F. and E. Naheer, 1976. Wave induced oscillations of harbor with variable depth, Proc. 15th ICCE, ASCE: 3536-3556.
- Roger, S.R. and C.C. Mei, 1978. Nonlinear resonant excitation of a long bay, *J. Fluid Mechanics*, **88**: 161-180.
- Su, C.L., 1973. Asymptotic solution of resonances in harbors with connected basins, *J. Waterways Harbors and Coastal Eng.*, ASCE, **99**: 375-392.
- Takayama, T., 1981. Wave diffraction and wave height distribution inside a harbor, Technical Note of the Port and Harbor Res. Ins. Ministry of Transport, Japan, No.367.
- Üntüata, U. and C.C. Mei, 1975. Effects of entrance loss on harbor oscillations, *J. Waterways Harbors and Coastal Eng. Div. ASCE*, **101**: 161-180.
- Yoshida, A. and T. Ijima, 1983. Resonance in harbor of arbitrary topography, Proc. 5th. Int. Conf. on Boundary Elements in Eng.: 217-226.
- Zienkiewicz, O.C., D.W. Kelly and P. Bettes, 1977. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures, *Int. J. for Numerical Methods in Eng.*, **11**(2): 355-375.
- 郭文秀, 洪吉杓, 片宗根, 1990. 時間 依存 緩傾斜 方程式을 이용한 港内 波高分布 計算, 韓國海岸海洋工學會誌, **2** (1): 18-27.
- 建設部 國立 建設試驗所, 1988. 厚浦港 水理模型 實驗報告書.
- 劉東勳, 李錫祐, 金泰仁, 金崇慶, 1989. 北坪港에 관한 波浪 數值 모델링(WAMOI) 適用, 港灣, 韓國 港灣協會, **13** (3): 34-43.
- 趙一衡, 1991. 港灣内 波濤應答과 繫留船舶의 運動解析, 서울大學校 博士學位論文.
- 韓國 海洋研究所, 1987. 浦港 新港 波浪調查 및 모델 實驗 用役 報告書, 第2券.