동요 아래에서의 극점의 보존

김 형 중* · 김 기 택*

Pole Preservation under Perturbation

Hyoung Joong Kim · Gi Taek Kim

ABSTRACT

Abstract–Consider a problem to keep half of the poles unchanged when some of the coefficients of stable characteristic polynomials are perturbed. A procedure was proposed[3] for the problem. However, the pole assignment procedure has not been addressed. A simple algorithm for the procedure is proposed in this paper.

I. 서 론

상태공간(state space)에서 시스템의 선형 방정식

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + E(t)x(t) = (A + E(t))x(t) \quad \cdots\cdots (1)$$

이 주어졌다고 가정하자. 여기서, E(t)는 시스템의 모델링 오차를 나타내는 행렬을 의미한다. 시스템 행렬 A는 점근적으로 안정하다고 가정한다. 그렇다면 E(t)가 0이 아닐때라도 (A+E(t))가 점근적으로 안정하게 만들 수 있는가? 일반적으로 시스템의 모델은 부정확하며 모델이 약간씩 변동할 수 있기 때문에 E(t)와 같은 동요(perturbation)를 고려하는 것은 당연하다. 그래서 안정도를 보장하는 동요의 최대 한계는 얼마나 되는지 알아내려는 연구는 많이 이루어졌다[1, 2].

만일 시스템의 특성다항식 (charateristic polynomial) g(s)가

$$g(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots\cdots + a_n \quad \cdots (2)$$

로 주어졌는데 계수 일부가 변동했다고 가정하자. 그리고 계수가 변동하기 전의 (2)의 극점의 반은 계수가 변동한 후에도 변동하지 않은 상태 그대로 유지시키려고 한다. 과연 그것이 가능한가? 여기서, (2)의 근(root)도 극점이라고 부르기로 하자. 동요가 발생하기 전의 극점(pole)은 동요가 발생하면 변하게 된다. 모든 극점이 다 원래의 상태를 유지하게 하는 것은 불가능하지만, 극점의 반은 변동하지만 나머지 반이 변동하지 않게 만들 수는 있다.

보존하고 싶은 극점이 알려지면 그 극점으

로부터 특정다항식 p(s)를 얻을 수 있다. 보존하지 않아도 되는 극점으로부터 q(s)를 얻으면 원래의 특정다항식 g(s)는

$$g(s) = p(s)q(s) \quad \cdots\cdots (3)$$

$$g(s) + \Delta g(s) = p(s)[q(ds) + \Delta q(s)] \quad \cdots\cdots (4)$$

의 관계식을 얻게 된다. 그런데, $\Delta q(s)$를 구하기 위해서는 $\Delta g(s) = p(s)\Delta q(s)$의 방정식을 풀어야 하나 이 방정식이 비선형이고, $\Delta g(s)$만큼의 동요가 발생할 때마다 매번 이런 비선형방정식을 풀어야 하므로 대단히 번거롭다. 이런 번거로움을 피할 수 있는 조직적인 절차는 이미 제시되었다[3]. 이 방법은 컴패니언(companion) 행렬의 특성을 이용해 일단 비선형행렬방정식의 해를 구한 후 선형연산을 하기만 하면 된다. 따라서 동요가 매번 달라도 단순한 선형연산만으로도 특정한 극점을 항상 보존할 수 있다.

그러나 제시된 절차에서는 보존해야 할 극점을 행렬에 배정하는 방법은 제시되지를 않았다. 이 논문에서는 극점을 행렬에 배정하는 체계적인 방법을 제시한다. 또 제시된 절차는 q(s)에만 동요가 있는 경우만 다루었으나, p(s)에도 동요가 있을 때 그것도 다룰 수 있는 방법을 제시했다.

Ⅱ. 행렬의 분할

시스템의 특성다항식 g(s)가 (2)로 주어지면 이것의 컴패니언 행렬은

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (5)$$

으로 표현된다. 이때 적절한 퍼뮤테이션 행렬(permutation matrix) P를 선택하여 상사변환(similarity transform)하면 행렬 A를

$$Z = PAP' = \begin{pmatrix} 0 & I \\ C & B \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (6)$$

로 변환시킬 수 있다. 여기서 I는 $m \times m(n=2m)$ 항등행렬(identity matrix)이며, C는 또 다른 컴패니언 행렬이고, B는 처음 열(row)을 제외한 나머지 원소는 모두 0인 특수한 행렬이다.

예를 들어

$$g(s) = s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4$$

에 대해 컴패니언 행렬은

$$\begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

로 주어지며 퍼뮤테이션 행렬 P를

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

로 잡으면 변환된 행렬 Z는

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_2 & -a_4 & -a_1 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

로 주어진다.

행렬 (6)을 분할하기 위해 다음과 같이 상사변환하면

$$Q=\begin{pmatrix} I & O \\ X & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & I \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & O \\ -X & I \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -X & I \\ C-BX-X^2 & X+B \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

와 같이 된다. 여기서 다음 조건

$$X^2+BX-C=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

을 만족하는 X를 구하면 Q는

$$Q=\begin{pmatrix} -X & I \\ 0 & X+B \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

와 같이 된다. 그런데 Q는 A로부터 상사변환을 통해 얻었기 때문에 당연히 A와 Q의 고유치(eigenvalues)는 일치하게 된다. B는 특성다항식의 일부 계수를 그대로 지니고 있기 때문에 X에 동요가 없다면 (X+B)의 동요는 바로 B의 동요를 의미하게 된다.

그런데 (8)의 방정식은 비선형 행렬방정식이므로 그 해를 직접 구하기는 대단히 어렵다. 그래서 Newton–Raphson 방정식을 풀면 다음과 같은 축차방정식(iteration)

$$X_{k+1}=(2X_k+B)^{-1}(X_k^2+C) \cdots (10)$$

을 얻게 된다. 초기치는 임의로 잡아도 된다. X의 모든 원소가 실수이면 식 (10)은 항상 수렴한다.

Ⅲ. 극점의 배정

방정식 (10)을 풀면 X를 구할 수 있지만 X의 고유치가 어떤 값을 지닐 것인지 미리 알아내기는 곤란하다. 일단 방정식을 푼 연후에 그 고유치를 구해보는 방법 밖의 다른 방도가 아직은 알려지지 않았다. 그래서 본 논문에서는 고유치를 처음부터 배정함으로써 X를 간단히 구하는 방법을 제시한다. 그렇게 되면 보존하고 싶은 고유치 즉 보존하고자 하는 다항식의 극점을 원하는 값으로 배정할 수 있게 된다.

먼저 배정하고 싶은 안정한 극점이 $-p_1$, $-p_2$, $\cdots$, $-p_n$이라면 $(-p_1)^2$, $(-p_2)^2$, $\cdots$, $(-p_n)^2$을 고유치로 하는 컴패니언 행렬 X^2을 만든 다음, 그 제곱근 행렬 X를 구하면 바로 X에 원하는 안정한 극점을 배정한 것이 된다. Newton–Raphson 방정식으로 제곱근 행렬 X를 구하는 표준 알고리듬은

$$X_k={}^1/_2(X_k+(X_k)^{-1}X^2),\ X_0=I \cdots (11)$$

와 같다. 효율적인 제곱근 행렬 계산 알고리듬[4)]은 수렴속도를 향상시키고 오차를 줄인다. 극점 배정 알고리듬의 증명은 너무 분명해서 생략한다.

Ⅳ. 극점의 보존

만일 행렬 B의 첫째 열(row) 계수에 동요가 존재한다면, 그렇지만 행렬 X에는 전혀 동요가 없다면 이 경우 극점을 보존할 수 있나? 식 (8)에서

$$(X+B+\varDelta B)X=C+\varDelta C \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

를 얻게 되므로, $\varDelta B$의 동요는 $\varDelta C$만큼의 동요를 C에 반영하면 되므로

$$\varDelta C=(\varDelta B)X \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

을 풀어 $\varDelta C$를 C에 반영하면 극점의 보존이

간단히 이루어진다. $(A+E(t))$가 늘 안정하게 하려면, 반드시 ΔB는 $(A+E(t))$를 안정하게 하는 값의 범위에 들어가야만 한다는 것은 자명하다[3].

만일 행렬 C의 첫째 열 계수에만 동요가 존재하고 행렬 X의 계수는 전혀 동요가 없다면 당연히 B에만 동요가 존재하는 경우와 마찬가지로 극점의 보존이 가능하다. 따라서 이제는 ΔB를 구하려면

$$\Delta B=(\Delta C)X^{-1} \qquad (14)$$

의 식을 풀면 된다.

V. 예 제

만일 컴패니언 행렬 A가

$$\begin{pmatrix} -8 & -21 & -22 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

로 주어지면 X는 유일하지 않으므로 여러 개 존재한다. A의 고유치 가운데서 특정한 값 −1, −1을 X에 배정하면서 X^2이 컴패니언 행렬이 되도록 할 수는 없을까? $(-1)^2$, $(-1)^2$을 고유치로 갖는 컴패니언 행렬 X^2

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

을 구한 다음 (11)의 방정식을 풀면 X는

$$\begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

가 된다. 이제 $-a_3$에 최대 16만큼의 동요가 발생했다면 ΔB는

$$\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

가 되고 따라서 ΔC는 식 (13)으로부터

$$\begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

가 되기 때문에 $-a_2$와 $-a_4$의 계수 −21과 −8도 각각 8만큼의 동요를 허용하면 당연히 $(A+E(t))$는 원래의 A가 지니고 있던 고유치 −1, −1을 보존함을 알 수 있다.

VI. 결 론

특성다항식이 주어졌을 때 그 다항식의 특정한 계수가 동요를 일으킨다면 시스템을 안정하게 유지시키는 동요의 최대 한계를 구하는 알고리듬은 많이 제시되었다. 그러나 동요가 발생하면 원래 시스템의 극점이 모두 이동하게 되는데 이를 일부라도 고정시킬 수 있는 방법이 논의되었다. 특히, 고정시키고 싶은 극점을 배정하는 체계적인 방법이 최초로 논의되었다. 또 ΔB, ΔC에 동요가 존재하는 경우도 다루었다.

참 고 문 헌

1. Patel, R. V., Toda, M., and Sridhar, B., "Robustness of linear quadratic state feedback designs in the presence of system uncertainty", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-22, pp. 945~949, 1977.
2. Yedavalli, R. K., "Perturbation bounds for robust stability in linear state space models", *International Journal of Control*, Vol. 42, pp. 1057~1517, 1985.

3. 김형중, "다항식의 안정성 확보를 위한 동요의 한계", 과학기술연구, Vol. **30**, pp. 437~439, 1991.
4. Hoskins, W. D., and Walton, D. J., "A faster method of computing the square root of a matrix", ***IEEE Transactions on Automatic Control***, Vol. **AC-22**, pp. 494~495, 1977.