

## 비대칭단면 주형을 갖는 3차원 사장교의 고유진동해석

Free Vibration Analysis of a 3-dimensional Cable-Stayed Bridge  
with the Unsymmetric Girder Cross-section김 철 영\* · 장 승 필\*\*  
Kim, Chul Young · Chang, Sung Pil

## Abstract

The lateral forces such as the earthquake and wind my cause the torsion to be coupled with the lateral bending in the girder, the cross-section of which has only one axis of symmetry. This induces additional stresses especially in cables arranged in double-planes. Since this effect cannot be considered by using the conventional frame elements, the stiffness and the mass matrices of the geometrically nonlinear thin-walled frame element are developed in this study to model the girder. The equivalent modulus of elasticity proposed by Ernst is used for the cable elements. Verification of the present theory is made through a numerical example. Then, the free vibration of a three dimensional cable-stayed bridge is analyzed to study the coupled flexural-torsional behavior.

## 要 旨

지진이나 바람과 같은 횡방향 하중이 가해졌을 때, 일반적으로 수직하중 축에 대해서만 대칭인 단면을 갖는 교량의 주형은 횡방향 휨과 비틀림이 결합된 거동을 하게되어 특히 사장교의 케이블등에는 예상치 못했던 추가응력이 유발될 수 있다. 이러한 거동은 일반적인 뼈대요소로는 해석할 수 없으므로, 본 연구에서는 가상일의 원리와 운동에너지로부터 임의의 단면형상을 갖는 기하학적 비선형 3차원 뼈대요소의 강도매트릭스와 질량매트릭스를 유도하여 주형을 모델링하고, 케이블요소는 Ernst가 제안한 등가탄성계수를 사용한다. 그리고 해석예를 통하여 이론의 타당성을 검증한 후, 3차원 사장교 모델의 고유진동해석을 수행하여 주형의 휨-비틀림 결합작용을 연구한다.

## 1. 序 論

사장교는 2차대전 이후 유럽을 중심으로 하여 발

달되어온 교량의 한 형태로서 주경간이 150m에서 350m 정도일때 경제적인 교량으로 알려져 있으며<sup>1)</sup>

\*정회원 · 명지대학교 공과대학 토목공학과, 전임강사

\*\*정회원 · 서울대학교 공과대학 토목공학과, 교수

2), 긴 경간을 교각 대신 교탑에 달아맨 케이블로써 지지하는 구조이다.

사장교의 개념은 오래전부터 있어 왔으나, 1955년 스웨덴에 현대적인 형태의 사장교가 처음 건설된 이후로<sup>(4)</sup>, 최근들어 경량 고강도 재료의 개발과 시공기술의 발달에 힘입어 전 세계적으로 건설이 활발해지고 있으며, 국내에도 다수의 교량이 건설되었거나 시공중에 있다.

이러한 사장교는 그 구조적이 특성 때문에 일반적인 선형해석으로는 정확한 거동을 파악할 수 없게 하는 몇 가지 요인을 가지고 있다<sup>(3, 4, 5)</sup>. 그것은 긴 경간으로 인해 처짐이 상대적으로 크게 발생하고, 케이블이 자중에 의해 현수곡선을 이루어 인장력의 크기에 따라 곡선형상이 변하며, 경사진 케이블로 인해 주형과 교탑에 큰 압축력이 유발되어 휨에 대한 강성이 줄어드는 효과를 가져온다.

따라서 이러한 영향을 고려한 비선형해석이 필수적이지만, 일단 사하중의 작용하에서 케이블에 소기의 인장력이 도입된 사용상태에서는 선형거동을 한다고 가정할 수 있다<sup>(3, 6, 7)</sup>. 이것은 케이블에 인장력이 도입되면 현수곡선의 처짐(Sag)이 작아지게 되고, 사용하중하에서는 주형의 처짐이 제한되므로 축력의 변화도 작아지기 때문이다.

초기의 사장교 해석은 주로 선형해석에 머물렀고, 특정구조에 한해서만 적용시킬 수 있는 제한이 있었다. 강도법에 의한 사장교 비선형 해석은 Lazar<sup>(8)</sup>가 케이블은 등가 탄성계수를 사용하고 주형과 교탑의 압축력은 안정함수(Stability Function)를 써서 적용하였고, Fleming<sup>(3, 5)</sup>은 여기에 케이블의 초기 인장력을 고려할 수 있도록 발전시켰다. 그러나 이들을 포함한 대부분의 논문들은 사장교를 평면구조로 가정하여 해석하였다. 일반적인 동적해석에 관해서는 Morris<sup>(10)</sup>가 그의 정적해석에 관한 연구<sup>(5)</sup>를 바탕으로 지진에 의한 사장교의 동적거동을 연구하였다. 하지만 이 논문에서는 평면구조에 지진의 수직성분과 교축방향의 성분(Longitudinal Component)이 작용하는 경우만을 다루었다.

그 밖에도 최근에 들어 사장교의 동적거동을 다룬 많은 논문들이 발표되었는데, 대부분 기하학적 비선형성을 고려한 비선형 해석은 하였으나, 평면구조로 가정하거나, 3차원 구조로 해석을 하여도

주형단면의 비대칭성은 고려하지 않은 연구를 하였다.

그러나, 사장교를 비롯한 일반 교량의 주형은 일반적으로 1축에 대해서만 대칭인 단면 형태를 갖고 있으므로 바람이나 지진동에 의한 횡방향하중이 가해졌을 때에는 휨과 비틀림이 결합된 거동을 하게 되어, 특히 사장교에서 교탑과 주형을 연결하는 케이블들이 두개의 평면에 배치되었을 경우에는 설계시 예상치 못했던 추가응력이 발생할 수 있다. 따라서 지진하중이나 풍하중에 의한 사장교의 동적거동을 연구하기 위해서는, 상기한 사장교의 비선형성을 포함하여 주형의 축력-휨-비틀림의 결합작용을 고려할 수 있는 이론의 전개가 필요하게 된다.

본 논문에서는 지금까지 연구되어온 사장교의 비선형성을 포함하고, 축력-휨-비틀림의 결합작용을 받는 일반적인 비대칭 박막단면 주형을 고려할 수 있도록 절점당 7개의 자유도를 갖는 기하학적 비선형 3차원 뼈대요소를 사용한다. 이를 위해 가상일의 원리를 적용하여 증분구간에서의 변형에너지를 유도한 뒤 형상함수를 가정하고 부재 접선강도 매트릭스를 구한다. 케이블의 비선형성은 등가탄성계수를 사용하여 고려하고 전체적인 정적 비선형해석은 Newton-Raphson방법을 이용한다. 운동에너지로부터 변위형상함수를 이용해 질량 매트릭스를 유도한 후 본 논문에서 제시한 이론의 타당성을 입증하기 위하여 예제를 해석한다. 그리고 3차원 사장교 모델을 선택하여 주형단면의 도심과 전단중심이 일치하지 않았을 때의 영향을 파악하기로 한다.

## 2. 정적 비선형 해석

### 2.1 기하학적 비선형 3차원 뼈대요소의 접선강도 매트릭스

고정된 직각좌표상에서 변형 전 최초의 상태(시간 0)에서부터 현상태(시간 t)까지  $\Delta t$ 의 변형이 발생하여, 시간 t에서  $\Delta t$ 의 응력으로 외력  $\underline{R}$ 과 평형을 이루고 있다고 생각한다. 이 평형상태를 기준으로 하여 외력이  $\underline{R}$ 에서  $+\Delta \underline{R}$ 로 변화하였을 때 t와 t +  $\Delta t$ 사이의 구간에서 증분 방정식을 유도한다. 시간 t에서의 상태를 초기 상태로 생각하면 t와 t +  $\Delta t$ 사이의 구간에서는  $\underline{u}$ 의 초기응력을 받고 있는 연속체가  $\Delta \underline{R}$ 의 외력 증분에 의해 변형과 응력이 각각과  $\Delta \underline{\epsilon}, \Delta \underline{\sigma}$ 가 생기는 것이다.

따라서 중분구간에서 가상 변형에너지의 증분은  

$$\delta(\Delta U) = \int_V \sigma_{ij} \cdot \delta(\Delta \epsilon_{ij}) dV \quad (1)$$
 로 쓸 수 있다.

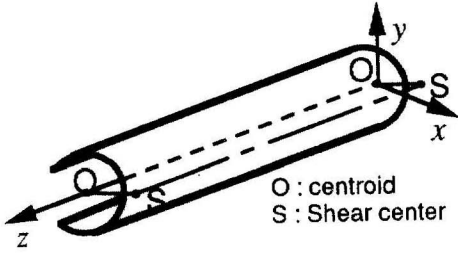


그림1. 임의단면 3차원 뼈대의 좌표계

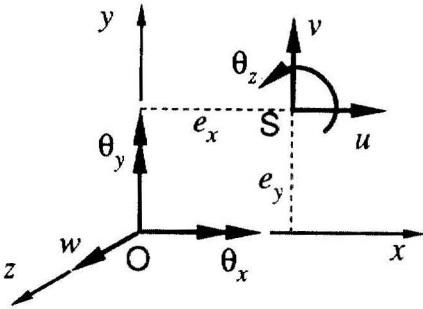


그림2 단면의 변위 성분

임의의 단면형상을 가지는 직선 뼈대 요소가 그림1과 같은 좌표축 상에 놓여 있을 때 원점에서 z 만큼 떨어진 단면의 도심의 변위성분을 그림2와 같이 정의한다면, t와 t+Δt사이의 구간에서 부재내 임의의 한 점 P(x, y, z)가 휨과 비틀림 그리고 축방향 변위가 결합하여 변형을 일으켰을 때의 총 변위 성분은

$$\hat{w} = w + \theta_y y - \theta_x x - \phi' \omega = w - u'x - v'y - \phi' \omega \quad (2a)$$

$$\hat{u} = u - \phi \cdot (y - e_y) \quad (2b)$$

$$\hat{v} = v + \phi \cdot (x - e_x) \quad (2c)$$

와 같다. 여기서 φ는 전단중심을 축으로한 회전변위를 나타내며 ω는 뒹함수이고, ( )'는 d()/dz를 뜻한다.

일반적인 뼈대부재는 축방향강성이 휨강성에 비해 매우 크며, 변위는 유한하지만 전단변형도는 작다고 가정하여 이들의 고차항들을 무시하면 다음과 같은 비선형 변위변형도 관계를 얻을 수 있다.

$$\epsilon_z = \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (3a)$$

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} \quad (3b)$$

$$\tau_{zy} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \quad (3c)$$

여기에 식(2)를 대입하여 정리하면 그림 2의 단면변위성분으로 변형도를 나타낼 수 있다.

$$\epsilon_z = (w' - u'x - v'y - \phi' \omega) + \frac{1}{2} [(u' + e_y \phi')^2 - 2y \phi' (u' + e_y \phi') + y^2 \phi'^2 + (v' - e_x \phi')^2 + 2x \phi' (v' - e_x \phi') + x^2 \phi'^2] \quad (4a)$$

$$\tau_{zx} = -\phi' \frac{\partial \omega}{\partial x} - \phi' y + \phi' e_y \quad (4b)$$

$$\tau_{zy} = -\phi' \frac{\partial \omega}{\partial y} + \phi' x - \phi' e_x \quad (4c)$$

단면의 형상에 따른 단면계수를 다음과 같이 정의하면

$$\int_A dA = A, \int_A x dA = I_y, \int_A y dA = I_x, \int_A \omega dA = I_\omega$$

$$\int_A (x^2 + y^2 - x \frac{\partial \omega}{\partial y} + y \frac{\partial \omega}{\partial x}) dA = J \quad (5)$$

$$\int_A x dA = \int_A y dA = \int_A \omega dA = \int_A xy dA = \int_A x \omega dA = \int_A y \omega dA = 0$$

A는 단면적, I<sub>x</sub>와 I<sub>y</sub>는 단면 2차 모멘트, I<sub>ω</sub>는 뒹상수, J는 비틀림 상수가 된다.

단면변위성분에 대응하는 단면력과 Connor<sup>(11)</sup>가 사용한 Force Parameter들을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} F_z &= \int_A \phi dA, Q_x = \int_A \tau_{zx} dA, Q_y = \int_A \tau_{zy} dA, \\ M_T &= \int_A [(x - e_x) \tau_{zy} - (y - e_y) \tau_{zx}] dA = \int_A (x \tau_{zy} - y \tau_{zx}) dA + Q_x e_y - Q_y e_x, \\ M_x &= \int_A y \sigma_z dA, M_y = - \int_A x \sigma_z dA, M_\omega = \int_A \phi \omega dA, \\ M_P &= \int_A \phi (x^2 + y^2) dA, M_R = \int_A (\tau_{zx} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial \omega}{\partial y}) dA, \\ M_{st} &= M_T - M_R \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 F<sub>z</sub>는 축력, Q<sub>x</sub>, Q<sub>y</sub>는 전단력, M<sub>x</sub>, M<sub>y</sub>는 휨모멘트 M<sub>ω</sub>는 Bimoment, M<sub>T</sub>는 전단중심에 대한 비틀림 모멘트로서 St.Venant비틀림(Unrestrained St. Venant Torsion)M<sub>st</sub>와 구속된 비틀림(Restrained Torsion)M<sub>R</sub>의 합으로 나타나며, M<sub>P</sub>는 Connor가 사용한 Force Parameter이다.

구간  $\Delta t$ 에서 미소길이  $dz$ 의 요소내에 저장된 가상 변형에너지의 증분은 섬유의 신장에 의한 것과 전단변형에 의한 것으로 이루어지며 이는 다음과 같다.

$$\delta(\Delta U) = \int_A \{ {}^{1+4}\sigma_z \delta(\Delta \epsilon_{zz}) + {}^{1+4}\sigma_z \tau_{zx} \cdot \delta(\Delta \tau_{zx}) + {}^{1+4}\sigma_z \tau_{zy} \cdot \delta(\Delta \tau_{zy}) \} dA \quad (7)$$

이제 식(7)의 변형도 대신 식(4)의 관계를 대입한 후, 단면계수와 단면력에 관한 식(5)와 (6)을 이용하여 정리하고 고차의 비선형항들을 무시하면 길이  $l$ 인 부재에 대하여 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\delta(\Delta U) = \delta(\Delta U_i) + \delta(\Delta U_e) + \delta(\Delta U_g) \quad (8)$$

$$\delta(\Delta U_i) = \int_0^l \{ F_z \cdot \delta w' - M_x \cdot \delta v'' + M_{st} \cdot \delta \phi' - M_\omega \cdot \delta \phi'' \} dz \quad (9a)$$

$$\delta(\Delta U_e) = \int_0^l [ EA w' \delta w' + EI_x v'' \delta v'' + EI_y u'' \delta u'' + GJ \phi' \delta \phi' + EI_\omega \phi'' \delta \phi'' ] dz \quad (9b)$$

$$\delta(\Delta U_g) = \int_0^l [ F_z \cdot u' \delta u' + F_z \cdot v' \delta v' + \{ F_z (e_x^2 + e_y^2) - 2M_x e_y + 2M_y e_x + M_p \} \phi' \delta \phi' + (F_z e_y - M_x) (u' \delta \phi' + \phi' \delta u') - (F_z e_x - M_y) (v' \delta \phi' + \phi' \delta v') ] dz \quad (9c)$$

여기서 변위 성분들인  $u, v, w$  와  $\phi$ 는 증분변위들을 뜻한다.

외적 가상일의 증분을  $\delta(\Delta W)$ 라고 하면 가상일의 원리에 따라  $\delta(\Delta U) = \delta(\Delta W)$ 이며 식(8)의 관계에서 부터

$$\delta(\Delta U_e) + \delta(\Delta U_g) = \delta(\Delta W) - \delta(\Delta U_i) \quad (10)$$

와 같이 적을 수 있다. 이 식이 증분방정식이 되어,  $\delta(\Delta U_e)$ 는 부재의 접선 탄성 강도매트릭수(Tangent Elastic Stiffness Matrix)를 형성하고,  $\delta(\Delta U_g)$ 는 접선 기하강도매트릭수(Tangent Geometric Stiffness Matrix)를 형성하게 된다.

식(10)의 우변은 증분 단계에서의 불평형하중이 되며  $\delta(\Delta W) = \delta(\Delta U_i)$ 이면 평형이 이루어진 상태가 된다.

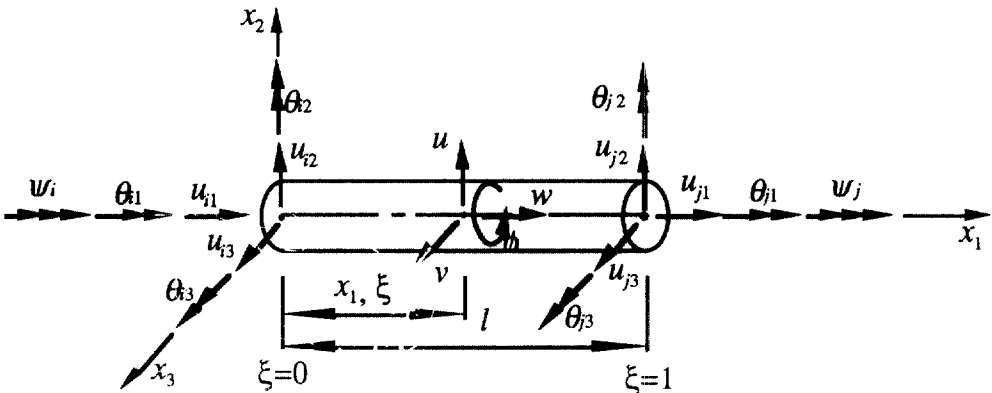


그림 3. 3차원 뼈대요소의 절점변위

3차원 뼈대 부재를 그림 3과 같이 각 절점당 7개의 자유도를 갖는 직선부재로 가정한다. 앞에서 연속체인 뼈대에 대하여 채택한 좌표계는 부재축을 z축으로 하는 x-y-z 좌표계였으나, 유한요소로서의 뼈대부재에 있어서는 부재축을  $x_1$ 축으로 하여  $x_1-x_2-x_3$ 좌표계를 사용하였으므로 앞에서 사용한 단면계수 및 단면력에 관한 기호들중 축을 나타내는 첨자들은 z는 1, x는 2, 그리고 y는 3으로 바꾸어 사용

한다. 여기서  $\phi$ 는 비틀림각의 미분량으로서 뒀에 해당하는 변위성분이다.

식 (8)에서 부재의 증분 변형에너지를 부재내 임의 단면에서의 도심의 증분변위( $u, v, w$ )와 단면의 증분회전( $\phi$ )으로 표시하였으므로, 이들과 증분 절점변위  $\{u\} = \{\psi, U_1, U_2, U_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \Psi\}^T$  사이에 형상함수(Shape Function)를 가정하여 관계지으면 부재의 증분 변형에너지를 부재의 증분 절점변위로

표시할 수 있다. 부재의 축방향변위(w)는 선형형상 함수를 사용하고 그외의 변위들(u, v, ϕ)에는 3차의 Hermite다항식을 사용하여 가정하고, 적분을 수행하여 정리하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\delta(\mathcal{U}_b) = \{\delta u\}^T [k_c] \{u\} \quad (11a)$$

$$\delta(\mathcal{U}_g) = \{\delta u\}^T [k_g] \{u\} \quad (11b)$$

여기서  $[k_c]$ : 부재 탄성강도 매트릭스

$[k_g]$ : 부재 기하강도 매트릭스

이며 이들은 부록 1과 2에 수록되어 있다. 여기서 첨자 1, 2, 3은 각각  $x_1, x_2, x_3$ 축에 관계된 값임을 나타내며, i, j는 각각 부재의 i단, j단에서의 값을 뜻한다.

### 2.2 케이블 요소의 접선 강도 매트릭스

자중에 의해 현수곡선을 이루며 쳐져있는 케이블은 양단에서의 변위와 케이블에 도입되는 인장력이 비례관계를 이루지 않는다. 일반적으로 케이블 양단의 변위는 3가지 요인에 의해 생기게 되는데, 그 첫째는 부재의 변형에 의해 생기는 것으로 이는 인장력에 비례하며, 두번째는 케이블 처짐(sag)의 변화에 의한 것이고, 세번째는 인장력이 커질수록 케이블 단면의 강선들의 배열이 변하면서 생기는 변위가 있다.

이러한 요인들에 의한 사강도 케이블의 실제 거동을 간편하게 고려하는 방법으로서, 현수곡선을 이루는 케이블 부재를 직선부재로 가정하고, 그대신 재료의 성질인 탄성계수를 기하학적 영향을 고려할 수 있는 등가탄성계수(Equivalent Modulus of Elasticity)<sup>(2, 3, 5)</sup>로 대체하면서 선형의 변위-변형도 관계를 가정하는 방법이 있다.

Ernst가 최초로 유도한 등가탄성계수는 다음과 같이 표시된다.<sup>(2)</sup>

$$E_{eq} = \frac{E}{1 + \frac{(\gamma \cdot H)^2}{12\sigma^2}} E \quad (12)$$

여기서 E: 케이블의 탄성 계수

$\gamma$ : 케이블의 단위 체적당 무게(단위 중량)

H: 케이블의 수평 투영 길이

$\sigma$ : 케이블의 인장 응력

이제 케이블을 탄성계수  $E_{eq}$ 인 선형 직선 트러스 부재로 간주할 수 있으므로 케이블 부재의 접선 강도 매트릭스는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[k_c] = \frac{E_{eq} \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

## 3. 고유진동 해석

### 3.1 3차원 뼈대 요소의 질량 매트릭스

비대칭 단면이며 뒀에 대한 자유도를 갖는 3차원 뼈대 부재의 분포 질량 매트릭스 (Consistent Mass Matrix)를 구하기 위해 운동에너지의 1차 변분을 단면변위의 함수로 표시하고 이 변위와 부재 절점변위와의 관계를 대입하여 적분하도록 한다.

먼저 길이  $\ell$ , 단위질량  $\rho$ 인 3차원 뼈대 부재의 운동에너지는

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \underline{\dot{u}}^T \underline{\dot{u}} dV \quad (14)$$

로 표시할 수 있는데, 여기서  $\underline{u} = \{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$ 이며  $(\ ) = \partial(\ ) / \partial t$ 를 나타낸다.

운동에너지를 한번 변분한후 임의의 시간  $t_0$ 에서  $t_1$ 까지 적분하고  $\delta u(t_0) = \delta u(t_1) = 0$  임을 이용하면 다음과 같으며, 이것은 관성력이 한 가상일과 같다.

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = - \int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho \cdot \delta \underline{u}^T \underline{\ddot{u}} dV dt \quad (15)$$

부재내에서는  $\rho$ 가 일정하다고 하면  $t_0 \sim t_1$  구간 내 임의의 시간 t에서 다음과 같이 적을 수 있다.

$$-\delta T = \rho \int_V \delta \underline{u}^T \underline{\ddot{u}} dV \quad (16)$$

$\underline{u} = \{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$ 의 관계를 대입하고  $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ 에 대해서는 식 (2)의 관계를 이용하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$-\delta T = \rho \int_0^L [A(\delta u \cdot \ddot{u} + \delta v \cdot \ddot{v} + \delta w \cdot \ddot{w}) + I_0 \delta \phi \cdot \ddot{\phi} + I_x \delta v' \cdot \ddot{v} + I_y \delta u' \cdot \ddot{u} + I \omega \delta \phi' \cdot \ddot{\phi} + A e_y (\delta \phi \cdot \ddot{u} + \delta u \cdot \ddot{\phi}) - A e_x (\delta \phi \cdot \ddot{v} + \delta v \cdot \ddot{\phi})] dz \quad (17)$$

여기서  $I_0 = I_x + I_y + A(e_x^2 + e_y^2)$ 이다.

식 (17)의 u, v, w, ϕ 대신 2.2절에서 사용한 것과 동일한 형상함수를 사용하여 부재 절점변위를 대입하고 적분을 수행하여 매트릭스 형태로 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$-\delta T = \{\delta u\}^T [m] \{\ddot{u}\} \quad (18)$$

여기서  $[m]$ 이 3차원 뼈대 요소의 분포질량 매트릭스이며 이는 부록 3에 수록되어 있다.

### 3.2 케이블 부재의 질량 매트릭스

케이블을 등가탄성계수를 가지는 직선 트러스 부재로 가정하였으므로 케이블의 분포질량

매트릭스는 일반적인 트러스요소의 분포질량매

표1. 박벽 캔틸레버의 고유진동수

MODE NO.	Compressive Force P=0		Compressive Force P=1790N	
	by FRIBERG	Present Analysis	by FRIBERG	Present Analysis
1	31.80	31.80	25.01	25.01
2	63.76	63.77	61.28	61.31
3	137.5	137.83	136.0	136.32
4	199.0	199.05	192.4	192.40
5	278.2	278.58	274.9	275.29
6	483.9	484.62	478.5	479.32
7	556.3	556.41	550.7	550.90
8	657.3	658.27	654.8	655.93
9	767.5	769.16	760.8	762.63
10	1075	1079.69	1067	1071.74

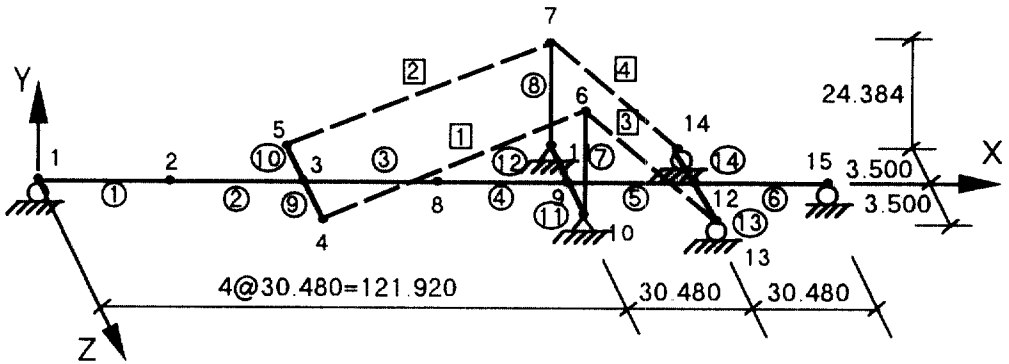
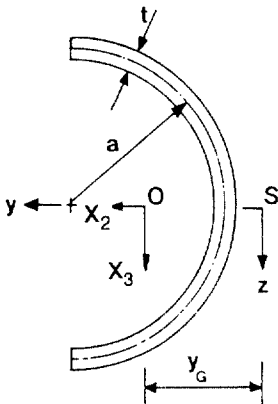


그림 5. 3차원 사장교 모델



$a = 24.5 \text{ mm}$   
 $t = 4.0 \text{ mm}$   
 $y_G = 15.5 \text{ mm}$   
 $z_G = 0.0 \text{ mm}$   
 $L = 820 \text{ mm}$   
 $m = 0.835 \text{ kg/m}$   
 $A = 308E-6 \text{ m}^2$   
 $I_2 = 92.6E-9 \text{ m}^4$   
 $I_3 = 17.7E-9 \text{ m}^4$   
 $I_{\omega} = 1.52E-12 \text{ m}^6$   
 $J = 1.64E-9 \text{ m}^4$   
 $E = 68.9 \text{ GPa}$   
 $G = 26.5 \text{ GPa}$

그림 4. 박벽 캔틸레버의 단면형상과 단면계수

트릭스와 동일하며 이는 다음과 같다.

$$[m_c] = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

#### 4. 해석예

##### 4.1 박벽보의 고유진동 해석

본 논문에서 사용한 기하학적 비선형 3차원 뼈대 요소의 강도매트릭스와 질량매트릭스가 정당한 지를 밝히기 위하여 P.O. Friberg<sup>(12)</sup>가 연구한 1축 대칭 단면인 박벽보(Thin-Walled Beam)의 고유치문제를 해석하였다. Friberg는 Bernoulli의 보 이론과 St. Venant Theory를 적용하여 도심과 전단중심이 일치하는 선형보에 대해 12×12의 강도 매트릭스와 질량 매트릭스를 유도하여 휨-비틀림 결합

진동을 연구하였다. 이어 1985년의 논문<sup>(13)</sup>에서는 Vlasov의 미분 방정식으로부터 뒀을 고려한 비대칭단면 박벽보의  $14 \times 14$  비선형 강도 매트릭스와 질량 매트릭스를 이끌어 내었다. 이를 이용하여 그림 4와 같은 반원형 개단면을 갖는 캔틸레버에 축력이 없을때와 압축력이 작용할때에 대해 각각 10개의 고유치를 구하였다.

같은 경우에 대해 본 논문의 프로그램을 사용하여 해석해 보았으며 Friberg의 해석결과에 대비하여 표 1에 나타내었다. 여기서 낮은 모드에서는 Friberg의 결과와 매우 잘 일치하며, 10번째 모드에서는 약 0.4%의 오차를 보인다.

따라서 본 연구에서 유도한 기하학적 비선형 3차원 뼈대요소의 강도매트릭스와 질량 매트릭스는 타당하다고 판단된다.

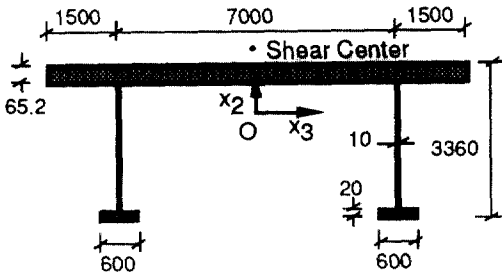


그림 6. 주형의 단면형상

표 2. 단면계수

MEMBER	A(m <sup>2</sup> )	I <sub>2</sub> (m <sup>4</sup> )	I <sub>3</sub> (m <sup>4</sup> )	J(m <sup>4</sup> )
PYLON	0.14	0.087	0.087	0.1
CABLE	0.051	—	—	—
IMAGINARY BEAM	100.	1000.	1000.	100.

#### 4.2 3차원 사장교의 고유진동 해석

해석 대상으로 삼은 구조물은 M.C.Tang<sup>(14, 15)</sup>이 사용한 평면 사장교로서 2개의 케이블로써 주형을 지지하는 3경간 연속교이다. 본 논문에서는 이를 그림 5에서와 같이 3차원 모델로 가정하고 단위를 SI단위로 바꾸어 해석하였다. 케이블은 주형의 두 복부판에 정착되는 것으로 가정하여, 선 부재인 주형에 강성이 매우 크고 질량은 없는 가상의 부재(9-14)를 부착하고 여기에 케이블을 연결함으로써, 주형의 비틀림 변위와 케이블 축력간의 관계를

고려하도록 하였으며 교탑의 하부는 단순지지된 것으로 가정하였다.

단면의 형상은 M. C. Tang이 사용한 단면적 및 단면 2차 모멘트와 같은 값을 주는 개단면을 그림 6과 같이 가정하였다. 실제로 사장교의 주형으로는 폐단면인 상자형이 주로 사용되지만, 단면중심과 도심이 일치하지 않는 경우의 휨과 비틀림의 복합거동을 파악하기 위해 전단중심과 도심의 차이가 큰 II형을 선택하였다. 이와의 비교를 위해 똑같은 단면적과 단면 2차모멘트를 갖는 대칭단면을 가정하여 단면 중심과 도심이 일치할 때의 거동을 해석해 보았다. 교탑, 케이블 그리고 교폭을 모델링하기 위한 가상보의 단면계수값은 표2와 같으며, 여기서 교탑과 케이블의 단면적과 단면 2차모멘트는 M. C. Tang이 사용한 값의 반을 사용한 것이다. 단위 질량은 절점 하중으로 주어진 사하중 값에서 역으로 계산하여 주형은 32060kg/m<sup>3</sup>, 교탑과 케이블은 7850kg/m<sup>3</sup>을 사용하였다. 참고문헌에는 사하중의 작용하에 평형을 이루었을 때의 케이블 인장력이 수록되어 있는데 이를 2로 나눈 후 가장 근사한 값을 주는 케이블 초기 인장력을 시산법으로 결정하였다.

표 3. 고유진동수

MODE	UNSYM.	*	SYM.	*
1	0.603	Y	0.603	Y
2	0.742	T	0.888	Y
3	0.888	Y	1.212	Z
4	1.233	ZT	1.645	P
5	1.591	ZT	1.648	P
6	1.645	P	1.988	Y
7	1.649	P	3.454	Y
8	1.988	Y	3.727	T
9	2.480	T	3.956	Z
10	3.454	Y	4.005	Y
11	4.005	Y	5.103	A
12	4.070	Z	5.644	Y
13	5.103	A	7.755	Y
14	5.485	T	7.949	T
15	5.645	Y	8.211	Z

\* Y: Y-directional Displacement Mode

Z: Z-directional Displacement Mode

T: Torsional Displacement Mode

A: Axial Displacement Mode

P: Mode of Pylon

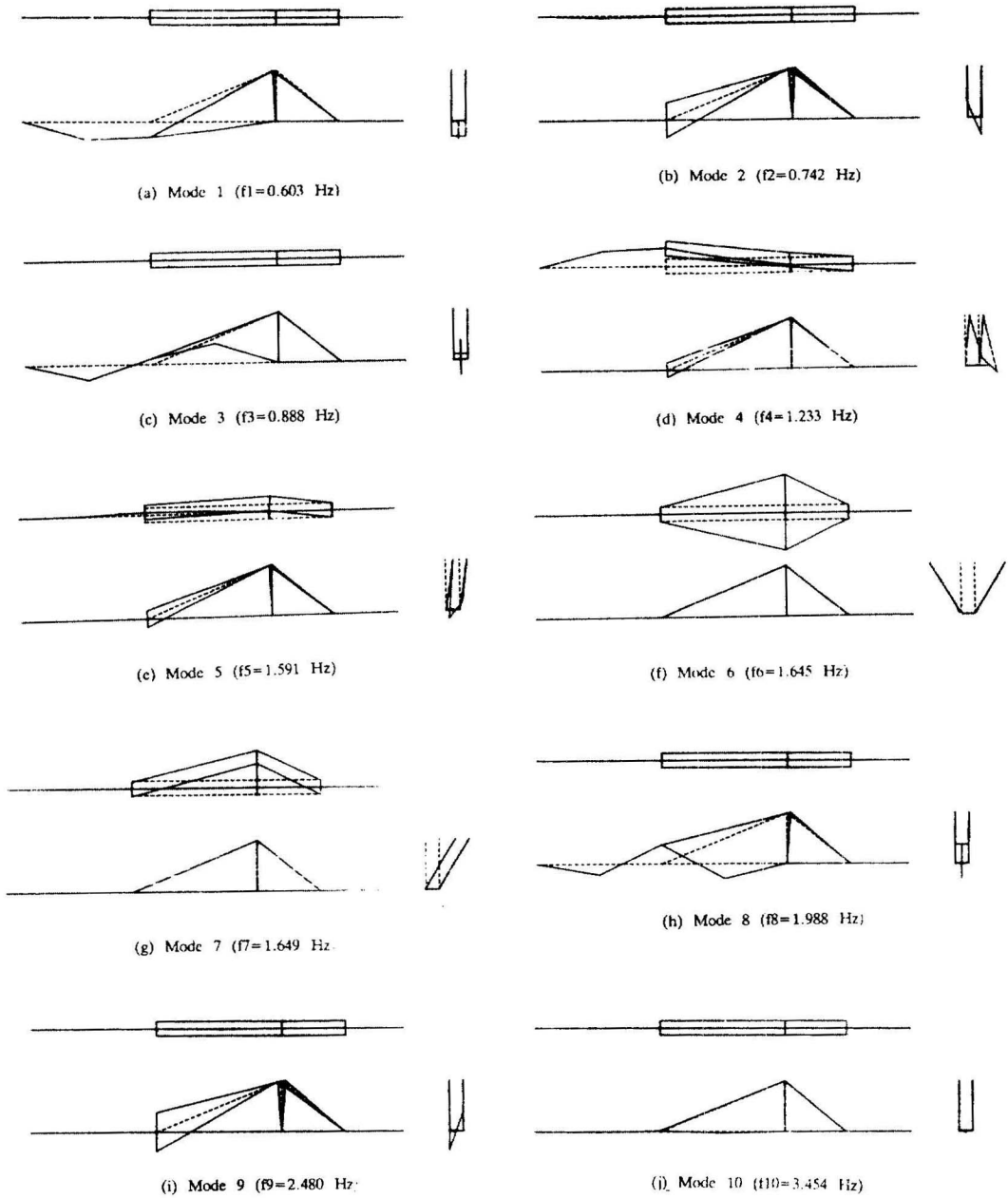


그림 7. 비대칭 주형단면일 경우의 모드형상



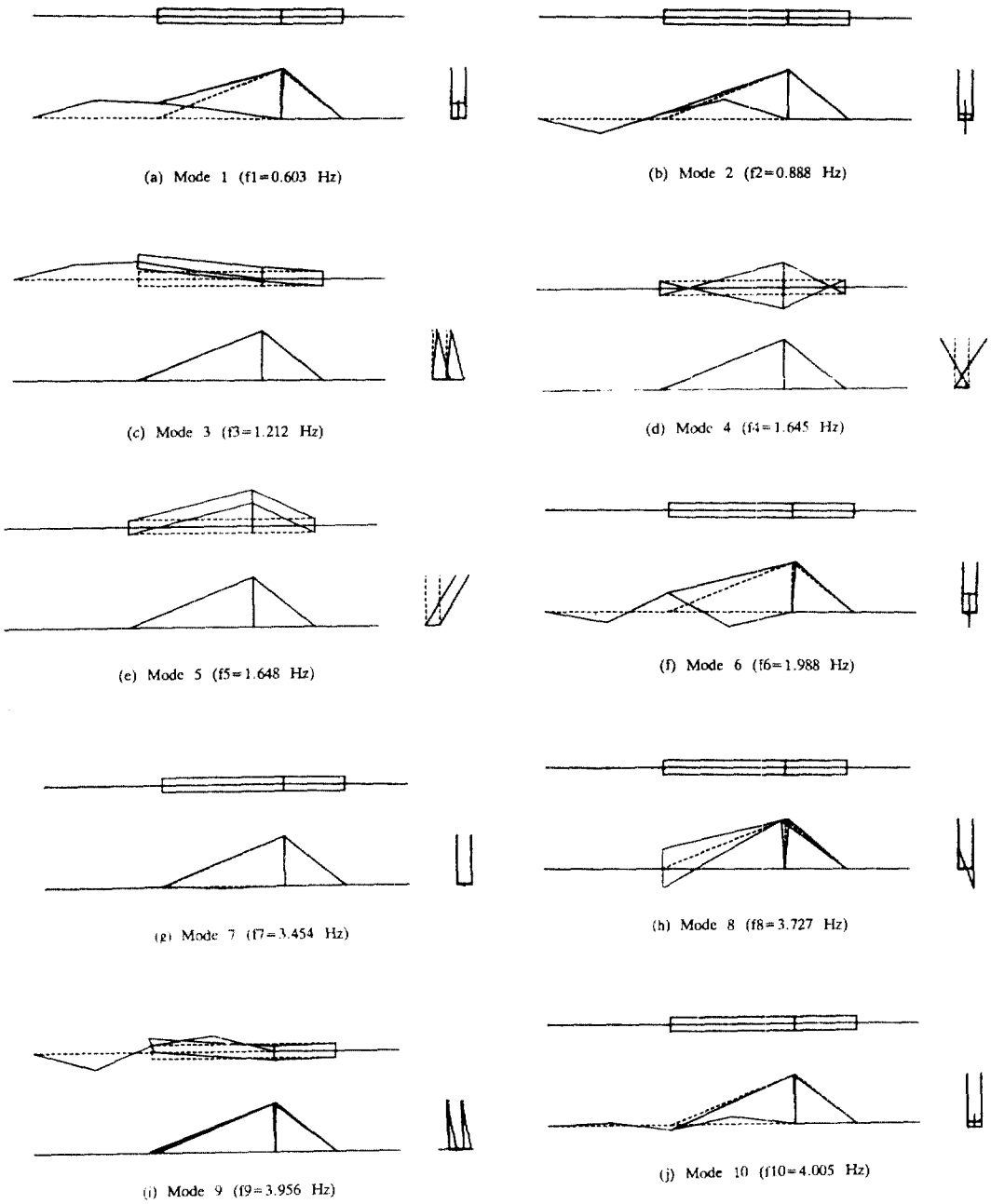


그림 8. 대칭 주형단면일 경우의 모드형상

이상과 같은 자료를 가지고 고유진동 해석을 수행하여 주형을 비대칭 단면으로 가정했을 때와 대칭 단면으로 가정했을 때에 대해 각각 15개의 모드를 구하였다. 표 3에 고유 진동수를 수록하였으며, 그 중 각각 10개의 모드 형상을 그림 7과 그림 8에 나타내었다. 그림 7은 비대칭 단면 주형일 때의 모드 형상이고 그림 8은 주형을 대칭 단면으로 가정했을 때의 결과이다. 표 3의 \*는 각 모드가 어느 방향의 변위가 지배적인지를 표시한다. 즉 Y는 Y방향의 수직 변위, Z는 Z방향의 수평 변위, T는 주형의 비틀림변위, A는 주형의 축방향 변위 그리고 P는 Pylon의 모드가 지배적임을 나타낸다.

여기서 알 수 있는 것은 그림 8의 대칭 단면일 경우에는 각 모드에서 수평방향의 변위와 주형의 비틀림 변위성분이 분리되어 나타나지만 그림 7의 경우에는 수평 방향의 변위와 주형의 비틀림이 결합되어 나타난다. 즉 주형 단면의 대칭축 방향인 수직 변위가 지배하는 모드는 비대칭 단면이나 대칭 단면에서 서로 동일한 결과를 준다. (비대칭 단면의 모드 1, 3, 8, 10과 대칭단면의 모드 1, 2, 6, 7은 서로 같다.) 하지만 비대칭 단면의 모드 4와 모드 5에서는 전단중심과 도심의 차이로 인하여 수평변위와 비틀림이 결합되어 나타난다.

모드 형상에서 특기할 것은 수직 변위에 대한 4번째 이상의 고차 모드형상(비대칭 단면일 경우의 모드 10과 대칭 단면일 경우의 모드 7,10)는 그림상에서 마치 저차의 모드형상인 것처럼 나타나는데, 이는 여러개의 변곡점을 가지는 고차의 모드형상을 나타내기에는 절점수가 부족하기 때문이다. 그리고 비대칭 주형일 경우의 모드 6과 7, 그리고 대칭주형일 경우의 모드 4와 5는 동일한 진동수가 얻어져야 하나 미소한 차이를 보이는 것은 수치계산상의 오차에서 비롯된 것을 판단된다.

## 5. 결 론

사장교를 비롯한 일반 교량의 주형은 일반적으로 1축에 대해서만 대칭인 단면형태를 갖고 있으며, 이러한 주형에 지진이나 바람등에 의해 횡방향의 하중이 가해졌을 때는 휨과 비틀림이 결합된 거동을 하게 되어 특히 사장교의 케이블등에는 설계시 예상치 못했던 추가응력이 발생할 수 있게 된다. 그러나 케이블에 의해 주형과 교탑이 복합적인 거동을 하는 사장교와 같은 경우에는, 교량을 평면구조로 가정하여 각 평면내의 거동을 독립적으로 해석하는 일반적인 방법이나 공간구조로 가정하더라도 주형의 휨과 비틀림을 독립적으로 고려하는 해석으로는 정

확한 거동을 파악할 수 없다.

본 연구에서는 축력 및 휨과 비틀림의 결합작용을 고려할 수 있는 기하학적 비선형 3차원 뼈대요소를 유도하였고, 이 요소의 강도매트릭스와 질량매트릭스의 타당성을 입증하기 위해 1축대칭 개단면을 갖는 내민보의 고유진동해석을 수행하여 Vlasov의 미분방정식을 이용한 결과와 매우 잘 일치함을 보였다.

3차원 사장교 모델을 가정하여 주형 단면의 도심과 전단 중심의 차이를 고려하였을 때와 고려하지 않았을 때를 해석한 결과, 주형 단면의 대칭축 방향인 수직변위가 지배하는 모드는 비대칭단면이나 대칭단면에서 서로 동일한 결과를 주지만, 비대칭단면에서는 전단중심과 도심의 차이로 인하여 수평변위와 비틀림이 강하게 결합되어 나타남을 알았다. 이러한 현상으로 미루어 횡방향의 하중에 의해서는 주형에 휨과 결합된 비틀림이 발생하며 이로 인하여 주형 양면에 배치된 케이블에도 추가응력이 유발될 수 있다. 따라서 특히 전단중심과 도심의 차이가 크고 비틀림 강성이 작은 개단면 주형을 갖는 교량이 지진이나 바람등의 횡하중을 받을 때의 거동을 정확히 파악하기 위해서는 단면의 비대칭성을 고려하여야 할 것으로 판단된다.

## 참고문헌

1. Troitsky, M.S., *Cable-Stayed Bridges*, Crosby Lockwood Staples, London, 1977
2. Podolny, W., Jr. and Scalzi, J.B., *Construction and design of Cable-Stayed Bridges*, John Wiley & Sons, New York, 1976
3. Fleming, J.F., Zek, J.D. and Fabian, R.A., "Nonlinear Behavior of Cable-Stayed Bridges," *Civil Engineering for Practicing and Design Engineers*, Vol.2, 1983, pp. 325~343
4. Lazar, B.E., "Stiffness Analysis of Cable-Stayed Bridges," *Proceedings of ASCE*, ST7, July 1972, pp. 1605~1611
5. Fleming, J.F., "Nonlinear Static Analysis of Cable-Stayed Bridge Structures," *Computers and Structures*, Vol. 10, No. 4, 1979, pp. 621~635
6. Morris, N.F., "Analysis of Cable-Stiffened Space Structures," *Journal of the Structural Division*, ST3, March 1976, pp. 501~513
7. Hegab, H. I. A., "Energy Analysis of Cable-Stayed

Bridges," *Journal of Structural Division*, ASCE, Vol. 112, No. 5, May 1986, pp. 1182~1195

8. Lazar, B.E., "Stiffness Analysis of Cable-Stayed Bridges," *Journal of Structural Division*, ASCE, Vol.98, ST7, 1972, pp. 1605-1612

9. Morris, N.F., "Dynamic Analysis of Cable-Stiffened Structures," *Journal of Structural Division*, ASCE, May 1974, pp. 941-981

10. Fleming J. F. and Egeseli, E. A., "Dynamic Behaviour of a Cable-Stayed Bridge," *Earthquake engineering and Structural Dynamic*, Vol. 8, 1980, pp. 1-16

11. Connor, J. J., *Analysis of Structural Member System*, The Ronald Press Company, 1976

12. Friberg, P.O., "Coupled Vibration of Beams - An

Exact Dynamic Element Stiffness Matrix," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, 1983, pp. 479-493

13. Friberg, P. O., "Beam Element Matrices Derived from Vlasov's Theory of Open Thin-Walled Elastic Beams," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, 1985, pp. 1205-1228

14. Tang, M.C., "Analysis of Cable-Stayed Girder Bridges," *Journal of Structural Division*, ASCE, Vol. 97, ST5, May 1971. pp. 1481-1496

15. Tang, M. C., "Design of Cable-Stayed Girder Bridges," *Journal of Structural Division*, ASCE, Vol. 98, No. ST8, August 1972, pp. 1789-1802

**부록 1. 뼈대요소의 접선 탄성 강도매트릭스**

$[k_e] =$

a						-a			
	b <sub>1</sub>			b <sub>2</sub>			-b <sub>1</sub>		b <sub>2</sub>
		c <sub>1</sub>		-c <sub>2</sub>			-c <sub>1</sub>		-c <sub>2</sub>
			d <sub>1</sub>			-d <sub>2</sub>		-d <sub>1</sub>	
				c <sub>3</sub>			c <sub>2</sub>	c <sub>4</sub>	
					b <sub>3</sub>				b <sub>4</sub>
						d <sub>3</sub>		d <sub>2</sub>	d <sub>4</sub>
							a		
								b <sub>1</sub>	-b <sub>2</sub>
	Symmetric							c <sub>1</sub>	c <sub>2</sub>
									d <sub>1</sub>
									d <sub>2</sub>
									c <sub>3</sub>
									b <sub>3</sub>
									d <sub>3</sub>

$$a = \frac{EA}{L}$$

$$b_1 = \frac{12EI_3}{L^3}, \quad b_2 = \frac{6EI_3}{L^2}, \quad b_3 = \frac{4EI_3}{L}, \quad b_4 = \frac{2EI_3}{L}$$

$$c_1 = \frac{12EI_2}{L^3}, \quad c_2 = \frac{6EI_2}{L^2}, \quad c_3 = \frac{4EI_2}{L}, \quad c_4 = \frac{2EI_2}{L}$$

$$d_1 = \frac{12EI_w}{L^3} + \frac{36GJ}{30L}, \quad d_2 = \frac{6EI_w}{L^2} + \frac{3GJ}{30}$$

$$d_3 = \frac{4EI_w}{L} + \frac{4GJL}{30}, \quad d_4 = \frac{2EI_w}{L} - \frac{GJL}{30}$$

**부록 2. 뼈대요소의 접선 기하 강도매트릭스**

$[k_g] =$

	a	e <sub>1</sub>		b	-i <sub>1</sub>		-a	k <sub>1</sub>		b	s <sub>1</sub>
		a	e <sub>2</sub>	-b	-i <sub>2</sub>			-a	k <sub>2</sub>	-b	s <sub>2</sub>
			m	-i <sub>2</sub>	i <sub>1</sub>	-n		-e <sub>1</sub>	-e <sub>2</sub>	-m	s <sub>2</sub> -s <sub>1</sub> -q
				c	h <sub>2</sub>			b	i <sub>2</sub>	d	-t <sub>2</sub>
					c	-h <sub>1</sub>		-b	-i <sub>1</sub>		d
						o		i <sub>1</sub>	i <sub>2</sub>	n	-t <sub>2</sub> t <sub>1</sub> -p
								a	-k <sub>1</sub>		-b
	Symmetric								a	-k <sub>2</sub>	b
									m	-s <sub>2</sub>	s <sub>1</sub>
										c	u <sub>2</sub>
											c
											-u <sub>1</sub>
											r

$$a = \frac{6F_1}{5L}, \quad b = \frac{F_1}{10}, \quad c = \frac{2F_1L}{15}, \quad d = -\frac{F_1L}{30}$$

$$e_1 = \frac{3}{5L}(2F_1e_3 + M_{12} - M_{13}), \quad e_2 = \frac{3}{5L}(-2F_1e_2 + M_{13} - M_{12})$$

$$h_1 = \frac{L}{30}(4F_1e_3 + 3M_{12} - M_{13}), \quad h_2 = \frac{L}{30}(-4F_1e_2 + 3M_{13} - M_{12})$$

$$i_1 = \frac{1}{10}(F_1e_3 - M_{12}), \quad i_2 = \frac{1}{10}(-F_1e_2 - M_{13})$$

$$k_1 = \frac{3}{5L}(-2F_1e_3 - M_{12} + M_{13}), \quad k_2 = \frac{3}{5L}(2F_1e_2 - M_{13} + M_{12})$$

### 부록 3. 뼈대요소의 질량매트릭스

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{3}{5L} (2F'_1 - M'_{1P} + M'_{1P}) , & n &= \frac{1}{10} (F'_1 + M'_{1P}) \\
 o &= \frac{L}{30} (4F'_1 - 3M'_{1P} + M'_{1P}) , & p &= \frac{L}{30} (F'_1 - 0.5M'_{1P} + 0.5M'_{1P}) \\
 q &= \frac{1}{10} (F'_1 - M'_{1P}) , & r &= \frac{L}{30} (4F'_1 - M'_{1P} + 3M'_{1P}) \\
 s_1 &= \frac{1}{10} (-F_1e_3 - M_{12}) , & s_2 &= \frac{1}{10} (F_1e_2 - M_{13}) \\
 t_1 &= \frac{L}{30} (F_1e_3 + 0.5M_{12} - 0.5M_{12}) , & t_2 &= \frac{L}{30} (-F_1e_2 + 0.5M_{13} - 0.5M_{13}) \\
 u_1 &= \frac{L}{30} (4F_1e_3 + M_{12} - 3M_{12}) , & u_2 &= \frac{L}{30} (-4F_1e_2 + M_{13} - 3M_{13})
 \end{aligned}$$

where  $F'_1 = F_1(e_2^2 + e_3^2)$

$$M'_{1P} = M_{1P} - 2M_{12}e_3 + 2M_{13}e_2$$

$$M'_{1P} = M_{1P} - 2M_{12}e_3 + 2M_{13}e_2$$

$$M_{1P} = -\beta_1 F_1 + \beta_2 M_{12} + \beta_3 M_{13} + \beta_w M_{1w}$$

$$M_{1P} = \beta_1 F_1 + \beta_2 M_{12} + \beta_3 M_{13} + \beta_w M_{1w}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{A} \int_A (x_2^2 + x_3^2) dA = \frac{I_2 + I_3}{A}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{I_2} \int_A x_3(x_2^2 + x_3^2) dA$$

$$\beta_3 = -\frac{1}{I_3} \int_A x_2(x_2^2 + x_3^2) dA$$

$$\beta_w = \frac{1}{I_w} \int_A \omega(x_2^2 + x_3^2) dA$$

$a_1$						$a_2$							
	$b_1$	$h_1$	$c_1$	$-i_1$	$d_1$	$j_1$	$e_1$	$k_1$					
		$b_2$	$-h_2$	$-c_2$	$i_2$	$d_2$	$-j_2$	$-e_2$	$-k_2$				
			$b_3$	$i_2$	$i_1$	$-c_3$	$j_1$	$-j_2$	$d_3$	$-k_2$	$-k_1$	$-e_3$	
				$f_2$		$-l_2$		$e_2$	$k_2$	$g_2$	$m_2$		
					$f_1$	$-l_1$		$-e_1$	$k_1$		$-g_1$	$m_1$	
						$f_3$		$-k_1$	$k_2$	$e_3$	$m_2$	$m_1$	$-g_3$
							$a_1$						
	Symmetric							$b_1$	$h_1$	$-c_1$	$i_1$		
								$b_2$	$-h_2$	$c_2$	$-i_2$		
									$b_3$	$-i_2$	$-i_1$	$c_3$	
										$f_2$	$-l_2$		
											$f_1$	$-l_1$	
												$f_3$	

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{\rho AL}{3} & a_2 &= \frac{\rho AL}{6} \\
 b_1 &= \frac{156\rho AL}{420} + \frac{36\rho I_3}{30L} , & c_1 &= \frac{22\rho AL^2}{420} + \frac{3\rho I_3}{30} , & d_1 &= \frac{54\rho AL}{420} - \frac{36\rho I_3}{30L} \\
 e_1 &= -\frac{13\rho AL^2}{420} + \frac{3\rho I_3}{30} , & f_1 &= \frac{4\rho AL^3}{420} + \frac{4\rho I_3 L}{30} , & g_1 &= \frac{3\rho AL^3}{420} + \frac{\rho I_3 L}{30} \\
 h_1 &= \frac{156\rho AL e_3}{420} , & i_1 &= \frac{22\rho AL^2 e_3}{420} , & j_1 &= \frac{54\rho AL e_3}{420} \\
 k_1 &= \frac{13\rho AL^2 e_3}{420} , & l_1 &= \frac{4\rho AL^3 e_3}{420} , & m_1 &= \frac{3\rho AL^3 e_3}{420}
 \end{aligned}$$

- \*  $b_2 - g_2$ : substitute  $I_2$  into  $I_3$
- \*  $b_3 - g_3$ : substitute  $I_w$  into  $I_3$  and  $I_w$  into  $A$
- \*  $h_2 - m_2$ : substitute  $e_2$  into  $e_3$

(接受: 1991.1.30)