

單純支持 變斷面 기둥의 臨界荷重 및 後挫屈 舉動

Critical Loads and Post-Buckling Behaviour of
Simply Supported Tapered Columns

李炳求* · 吳相晉** · 牟正萬***

Lee, Byoung Koo · Oh, Sang Jin · Mo, Jeong Man

Abstract

Numerical methods are developed to obtain the critical loads and to analyze the post-buckling behaviour of the linearly varying tapered columns. The non-dimensional differential equations governing the elastica of post buckled column are derived by third order and solved numerically using the Runge-Kutta method and Regula-Falsi method.

Three kinds of cross-sectional shape with simply supported end constraint are applied in unmerical examples. As the numerical results, the equilibrium paths, the typical elastica of post buckled columns and the critical load vs. section ratio curves are presented in figures. Also, the effects of cross-sectional shape factor on critical loads and postbuckling behaviour are presented in tables.

要 旨

이 論文은 單純支持 變斷面 기둥의 臨界荷重 및 後挫屈 舉動에 관한 研究이다.

이 論文에서는 變斷面을 갖는 後挫屈 기둥의 正確彈性曲線을 支配하는 微分方程式을 3次理論에 依하여 誘導하고, 이 微分方程式을 Runge-Kutta method와 Regula-Falsi method를 이용하여 臨界荷重과 後挫屈 기둥의 正確彈性曲線을 算出하였다.

實際의 數值解積 例에서는 變化높이 矩形斷面, 變化幅 矩形斷面, 正方形斷面/圓形斷面の 3가지 斷面形狀에 대하여 數值解析하였다.

數值解析의 結果로, 荷重-처짐의 平衡經路, 後挫屈 기둥의 正確彈性曲線, 臨界荷重-斷面化 사이의 關係를 그림에 나타내었다. 또한 斷面形狀係數가 臨界荷重과 後挫屈 舉動에 미치는 影響을 分析하였다.

* 正會員 · 圓光大學校 土木工程科 教授

** 正會員 · 圓光大學校 工業技術開發研究所 研究員

*** 正會員 · 裡里農林高等學校 農業土木科

1. 序 論

기둥은 構造工學 分野에서 가장 基本이 되는 構造單位 中の 하나이다. 構造部材를 變斷面으로 하는 경우에 材料가 절약되는 經濟的 잇점이 있을 뿐만 아니라 美的 感覺이나 施工性 등으로 인하여 變斷面을 더욱 많이 이용할 展望이다.

기둥의 解析은 2次理論(second order theory)과 2次理論(third order theory)에 의한 解析으로 大別된다. 2次理論은 처짐의 1階微分項을 無視하여 解析하는 方法으로 臨界荷重은 固有值問題(eigen value problem)로 구할 수 있다. 그러나 後挫屈 舉動은 後挫形(buckling mode shape)만 決定된 正確彈性曲線(elastica)을 구할 수 없으므로 後挫屈 舉動의 解析은 不可能하다.

3次理論은 처짐의 1階微分項을 考慮하여 解析하는 方法으로 後挫屈 기둥의 正確彈性曲線을 算出할 수 있으므로 臨界荷重 뿐만 아니라 後挫屈 기둥의 舉動을 解析할 수 있다. 變斷面 기둥에 대한 研究는 많은 文獻들에 發表되고 있으며 本 研究와 關聯된 文獻을 考察하면 다음과 같다.

劉 等⁽¹⁾은 1984년에 一端固定 他端自由인 變斷面 기둥의 臨界後挫荷重에 관한 論文을 發表하였다. 이 論文에서는 2次理論에 의하여 이론을 전개하고 이를 Bessel 函數에 의한 解와 有限要素에 의한 近似解로 臨界荷重을 산출하였다.

李 等⁽²⁾은 1990년에 單純支持된 變斷面 기둥의 大變形 解析에 관한 論文을 發表하였다. 이 研究에서는 對稱變化斷面을 갖는 變化幅 矩形斷面の 臨界荷重을 구하였다.

黃 等⁽³⁾은 1991년에 평면판의 彈塑性 挫屈特性을 解析하였다. 이 論文에서는 挫屈荷重을 解析하기 위하여 固有值解析에 의한 subspace 反復技法을 使用하였다.

Sakiyama⁽⁴⁾는 1986년에 truncated-cone 變斷面 기둥을 2次理論에 의하여 微分方程式을 誘導하고 이를 數值積分하여 挫屈荷重을 산출하였다.

Kounadis 等⁽⁵⁾은 1987년에 單純支持된 等斷面 矩形斷面에 대하여 材料의 非線形성을 考慮한 임계 하중을 산출하였다. 이 論文에서는 荷重-變位 사이의 關係式은 2次理論을 利用하였고, 挫屈形은 正弦曲線으로 假定하여 臨界荷重을 算出하였다.

Kounadis 等⁽⁶⁾은 1988년에 橫方向 補強材를 갖는 기둥의 後挫耐力에 관한 論文을 發表하였다. 이 論文에서는 Rayleigh-Ritz 에너지法을 利用하여 橫方向으로 補強된 기둥의 挫屈耐力를 산출하였다.

本 研究는 3次理論에 의하여 變斷面 기둥을 解析하여 臨界荷重과 後挫屈 舉動을 解釋하는데 研究目的이 있다.

本 研究에서 基本假定은 다음과 같다.

- 1) 기둥은 線形彈性 理想기둥이다.
- 2) 기둥의 蹴은 非壓縮性이다.
- 3) 臨界荷重은 分岐荷重은 分岐荷重(bifurcation load)으로 定義한다.

2. 기둥의 變斷面

本 研究에서 기둥의 變斷面은 一般的으로 널리 使用되고 있는 그림 1과 같이 直線的으로 變化하는 變斷面 기둥(tapered column)으로 한다. 그림 1(a)에서 기둥의 길이를 l , 左端과 右端의 斷面 2차모멘트를 各各 I_a, I_b 라 한다. 이때 기둥의 中立軸을 따라서 測定된 기둥의 任意點 s 에서의 斷面 2차모멘트 I_s 는 I_a 를 기준으로 하면 다음 식과 같이 表示된다.⁽⁷⁾

$$\begin{aligned} I_s &= I_a[1 + (d_b/d_a - 1)s/l]^m \\ &= I_a[1 + (k - 1)s/l]^m \end{aligned} \quad (1.1)$$

여기서,

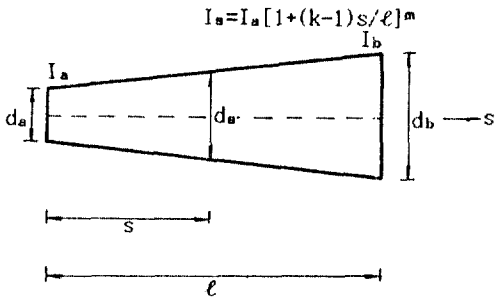
$$k = d_b/d_a \quad (1.2)$$

윗 식에서 d_a, d_b 는 그림 1(a, b)와 같이 기둥의 左端과 右端의 斷面諸元이다. (1.1)식에서 k 는 (1.2)식과 같이 d_b/d_a 로 變斷面の 幾何學的 決定해주는 無次元比이며, 이 論文에서는 斷面比(section ratio)로 定義한다. 또한 m 은 斷面形狀에 따라 決定되는 斷面形狀係數이다.

그림 1(a, b)에서 斷面の 變化諸元을 d_s 라 하면 이 d_s 는 直線的 變化하므로 기둥의 任意點 s 에서 d_s 는 다음과 같이 表示된다.

$$d_s = d_a[1 + (k - 1)s/l] \quad (2)$$

(1.1)식의 變斷面式은 어떤 斷面形狀에도 適用할 수 있으나 그림 1(b)와 같이 3가지 斷面形狀에 대



(a) 기둥의 변화斷面

(1.1)式과 (3)式을 比較하면 다음과 같이 斷面形狀係數 m 을 구할 수 있다.

$$m=3 \quad (4)$$

2.2 變化幅 矩形斷面

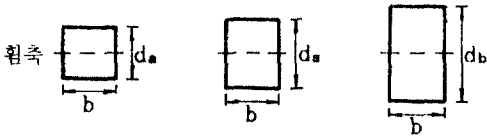
마찬가지 方法으로 그림 1(b)의 (2) 斷面形狀과 같이 均一높이 b , 變化幅 d 를 갖는 矩形斷面 기둥의 斷面形狀係數 m 을 구하면 다음과 같다.

$$m=1 \quad (5)$$

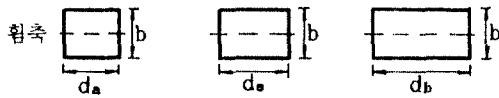
2.3 正方形斷面 또는 圓形斷面

마찬가지 方法으로 그림 1(b)의 (3) 斷面形狀과 같은 正方形斷面 또는 圓形斷面に 대하여 斷面形狀係數 m 을 구하면 다음과 같다.

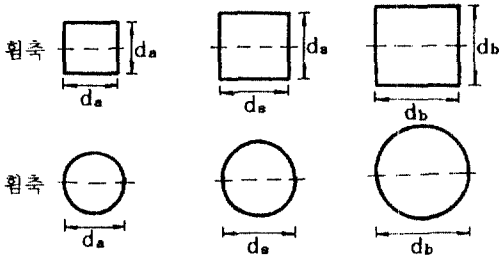
$$m=4 \quad (6)$$



(1) 變化높이 矩形斷面($m=3$)



(2) 變化幅 矩形斷面($m=1$)



(3) 正方形斷面/圓形斷面($m=4$)

그림 1. 기둥의 變化斷面 및 斷面形狀

하여 斷面形狀係數 m 값을 決定한다.

2.1 變化높이 矩形斷面

그림 1(b)의 (1) 斷面形狀과 같이 均一幅 b , 變化높이 d_s 를 갖는 矩形斷面 기둥의 임의점 s 에서 I_s 는 (2)式을 利用하면 다음 式과 같이 表示된다.

$$\begin{aligned} I_s &= b d_s^3 / 12 \\ &= (b d_a^3 / 12) [1 + (k-1)s/l]^3 \\ &= I_a [1 + (k-1)s/l]^3 \end{aligned} \quad (3)$$

4. 微分方程式의 誘導

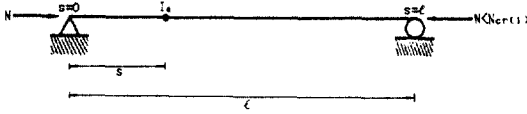
左端은 回傳支點, 右端은 移動支點을 갖는 單純支持 變斷面 기둥이 그림 2(a, b)와 같이 軸荷重 N 을 받고 있다. 이 기둥은 第1臨界荷重 $N_{cr(1)}$ 보다 작은 荷重을 받으면 그림 2(a)와 같이 直線狀態를 維持하나 第1臨界荷重보다 큰 荷重을 받으면 挫屈하여 그림 2(b)와 같은 正確彈性曲線을 이루게 된다. 이 曲線의 左側端으로부터 기둥의 軸方向을 따라서 測定된 s 에서의 諸變數는 (x, y, θ, M, I_s) 이다. 여기서 (x, y) 는 正確彈性曲線을 定義해주는 直交座標系, θ 는 斷面回傳角, M 은 彎모멘트, I_s 는 앞에서 언급한 바와 같이 變斷面の 斷面 2次모멘트이다. 以後에 I_s 는 I 로 表示한다. 또한 그림 2(b)에서 θ_0, H 는 各各 後挫屈 기둥의 初期回傳角과 移動支點의 水平方向 처짐을 나타낸다. 기둥의 軸은 非壓縮性이므로 後挫屈 기둥의 移動支點에서 s 는 기둥의 길이 l 과 같다.

3次理論에 의한 기둥 軸上の 諸變數(x, y, θ, M, I) 사이의 s 에 대한 關係式들은 다음과 같다.⁽⁸⁾

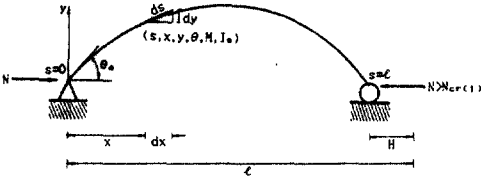
$$d\theta/ds = -M/EI \quad (7.1)$$

$$dx/ds = \cos\theta \quad (7.2)$$

$$dy/ds = \sin\theta \quad (7.3)$$



(a) 前挫屈 기둥



(b) 後挫屈 기둥

그림 2. 前挫屈 및 後挫屈 기둥 形狀

(7.1)式에서 E는 기둥 材料의 彈性係數이다.

그림 2(b)에서 기둥 軸上 s에서 힘모멘트 M은 靜力學적으로 다음 (8)式과 같이 구할 수 있다.

$$M = Ny \quad (8)$$

(8)式을 (7.1)式에 代入하면 다음 式과 같다.

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{Ny}{EI} \quad (9)$$

(9)式에서 $d^2\theta/ds^2$ 을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{ds^2} &= -\frac{N}{EI} \frac{dy}{ds} + \frac{Ny}{EI^2} \frac{dI}{ds} \\ &= -\frac{N \sin\theta}{EI} + \frac{Ny}{EI^2} \frac{dI}{ds} \end{aligned} \quad (10)$$

(1.1)式에서 dI/ds 를 구하면 다음 式과 같다.

$$\frac{dI}{ds} = \frac{m(k-1)I^2}{l} \left[1 + (k-1)\frac{S}{l} \right]^{m-1} \quad (11)$$

微分方程式을 無次元으로 誘導하기 위하여 다음의 無次元 變數들을 利用한다.

$$\lambda = s/l \quad (12.1)$$

$$\xi = x/l \quad (12.2)$$

$$\eta = y/l \quad (12.3)$$

이제 (10)式에 (1.1)式, (11)式을 代入하고 (12.1)-(12.3)式의 無次元 變數들을 利用하면 다음 (13.1)式

의 微分方程式을 誘導할 수 있고, (7.2)式과 (7.3)式은 (12.1)-(12.3)式을 利用하면 (13.2)式과 (13.3)式으로 誘導된다.

$$\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} = -\frac{\pi^2 n \sin\theta}{[1 + (k-1)\lambda]^m} + \frac{\pi^2 m(k-1)n\eta}{[1 + (k-1)\lambda]^{m+1}} \quad (13.1)$$

$$\frac{d\xi}{d\lambda} = \cos\theta \quad (13.2)$$

$$\frac{d\eta}{d\lambda} = \sin\theta \quad (13.3)$$

(13.1)式에서 n은 無次元 荷重變數(load parameter)로 다음 式과 같이 表示된다.

$$n = \frac{Nl^2}{\pi^2 EI_0} \quad (14)$$

기둥은 單純支持되어 있으므로 $s=0$ (回傳支點)에서 $x=y=M(=-EI\theta/ds)=0$ 이므로 (12.0)-(12.3)式을 利用하면 다음과 같은 境界條件이 誘導된다.

$$\xi=0, \lambda=0 \text{에서} \quad (15.1)$$

$$\eta=0, \lambda=0 \text{에서} \quad (15.2)$$

$$d\theta/d\lambda=0, \lambda=0 \text{에서} \quad (15.3)$$

또한 $s=l$ (移動支點)에서 $y=M=0$ 이므로 역시 (12.1)-(12.3)式을 利用하면 다음과 같은 境界條件이 誘導된다.

$$\eta=0, \lambda=1 \text{에서} \quad (16.1)$$

$$d\theta/d\lambda=0, \lambda=1 \text{에서} \quad (16.2)$$

以上에서 後挫屈 기둥의 正確彈性曲線을 支配하는 微分方程式과 기둥의 回傳支點($s=0$) 및 移動支點($s=l$)의 境界條件을 誘導하였다.

4. 數值解析 方法

위의 微分方程式과 境界條件을 利用하면 기둥의 臨界荷重과 後挫屈 舉動을 解析할 수 있는 正確彈性曲線을 얻을 수 있다.

먼저 주어진 斷面比 k와 無次元 荷重變數 n에

대한 後挫屈 기둥의 正確彈性曲線을 얻을 수 있는 數值解析 方法을 說明하면 다음과 같다.

微分方程式 (13.1)-(13.3)式을 數值積分하기 위해서는 $\lambda=0$ 에서의 初期值 $\xi, \eta, \theta_a, d\theta/d\lambda$ 값을 알아야 한다. 이들 初期值 中에서 (15.1)-(15.3)式의 境界條件과같이 $\lambda=0$ 에서 $\xi, \eta, d\theta/d\lambda$ 의 값은 "0"으로 알려져 있지만 $\lambda=0$ 에서의 初期回傳角 θ_a 값은 未知이다. 그러나 $\lambda=1$ 에서 (16.1), (16.2)式의 境界條件과 같이 $\eta=d\theta/d\lambda=0$ 가 알려져 있다. 따라서 주어진 無次元 荷重變數 n 에 대한 後挫屈 기둥의 正確彈性曲線의 數值解析은 $\lambda=1$ 에서 $\eta=d\theta/d\lambda=0$ 를 滿足시키는 $\lambda=0$ 에서의 初期回傳角 θ_a 를 찾는 問題로 形成된다.

이를 위하여 微分方程式의 數值積分은 Runge-Kutta method⁽⁹⁾를 利用하고, θ_a 값은 bracketing method 中에 하나인 Regula-Falsi method⁽¹⁰⁾를 利用한다. 즉 θ_a 값을 먼저 假定하고 (15.1)-(15.3)式의 境界條件을 初期值로 하여 $\lambda=0$ 에서 $\lambda=1$ 까지 微分方程式 (13.1)-(13.3)式을 Runge-Kutta method에 의하여 數值積分한다. 數值積分의 結果로 $\lambda=1$ 에서 η 와 $d\theta/d\lambda$ 가 計算되므로 이 計算된 값들이 (16.1), (16.2)式의 境界條件 $\eta=d\theta/d\lambda=0$ 를 滿足하는지 檢討한다. 만일 滿足하지 않으면 θ_a 를 다시 假定하여 위의 過程을 반복시행한다. 이때 θ_a 는 1×10^{-10} 에서 始作하고 適當한 增分씩 증가시키면서 數值積分한다. 반복시행하는 過程에서 $\lambda=1$ 에서의 η 값의 부호가 바뀌면 참 θ_a 값은 前段階에서 假定한 θ_a 값과 現段階에서 假定한 θ_a 값 사이에 存在한다. η 값의 부호가 바뀌는 2개의 θ_a 값을 찾으면 참 θ_a 값은 Regula-Falsi method를 利用하여 찾는다.

$\lambda=1$ 에서 $\eta=0$ 가 되는 θ_a 값을 찾으면 이 θ_a 값에 대하여 $\lambda=1$ 에서 $d\theta/d\lambda=0$ 인지 檢討하고, 滿足하면 이 θ_a 값으로 確定하고 滿足하지 않으면 위의 全過程을 반복시행하여 $\lambda=1$ 에서 $\eta=d\theta/d\lambda=0$ 이 되는 θ_a 값을 찾는다.

이때 다음의 收斂 基準式을 滿足하면 假定된 θ_a 값은 참 θ_a 값으로 收斂된 것으로 보았다.

$$|\eta| \leq 1 \times 10^{-12}, \lambda=1 \text{에서} \quad (17.1)$$

$$|d\theta/d\lambda| \leq 1 \times 10^{-10}, \lambda=1 \text{에서} \quad (17.2)$$

이와 같이 初期回傳角 θ_a 값을 찾으면 微分方程式

의 數值積分의 結果로 (ξ, η, θ) 가 定義되므로 後挫屈 기둥의 正確彈性曲線을 얻을 수 있고 따라서 기둥의 後挫屈 舉動이 解析된다.

만일 주어진 n 값에 대하여 θ_a 가 $0 \sim \pi$ 사이에 存在하지 않으면 즉 $\lambda=1$ 에서의 η 값의 부호가 바뀌지 않으면 이 n 값은 第1臨界荷重보다 작은 荷重이다.

다음은 주어진 斷面比 k 에 대한 臨界荷重을 찾는 數值解析 方法을 說明한다.

後挫屈 기둥이 挫屈形을 바꿀 때 즉 臨界荷重에서 初期回傳角 θ_a 는 "0"의 값을 經由하게 된다. 따라서 $\theta_a=0$ 되는 n 값을 찾는 問題가 臨界荷重을 찾는 問題로 形成된다. 그러나 微分方程式 (13.1)-(13.3)式에서 $\theta_a=0$ 이면 任意 n 값에 대해서도 만족하므로 臨界荷重을 찾을 수 없다. 따라서 本 研究에서는 $\theta_a=1 \times 10^{-10}$ 에 대한 n 값을 臨界荷重으로 하였다. 즉 (15.1)-(15.3)式의 境界條件과 $\theta_a=1 \times 10^{-10}$ 을 初期值로 하고 (16.1), (16.2)式의 境界條件을 滿足하는 n 값을 찾으면 이 n 값이 無次元 臨界荷重 $n_{cr(i)}$ 가 된다. 여기서 $n_{cr(i)}$ 는 (14)式에 의하여 (18)式과 같이 定義된다.

$$n_{cr(i)} = \frac{N_{cr(i)} l^2}{\pi^2 EI_A}, \quad i=1, 2, 3, 4, \dots \quad (18)$$

윗 식에서 $N_{cr(i)}$ 는 臨界荷重이고 i 는 모드數(mode number)이다.

역시 無次元 臨界荷重 $n_{cr(i)}$ 를 찾는 問題에서도 Runge-Kutta method와 Regula-Falsi method를 利用하였으며, 數值解析 方法은 正確彈性曲線의 數值解析 方法과 同一하고 臨界荷重은 第4臨界荷重까지 구하였다.

本 研究에서 Runge-Kutta method 適用時 段階 길이(step size)는 0.01을 利用하였으며, 이 境遇에 臨界荷重과 正確彈性曲線의 數值解는 充分한 精度로 收斂하였다.

本 研究의 數值解析 結果를 檢證하기 위하여 等 斷面($k=1$)인 境遇에 臨界荷重과 後挫屈 기둥의 初期回傳角 θ_a , 移動支點의 水平처짐 $h=H/(1-\xi_{\lambda-1})$ 및 기둥 中央의 橫方向 처짐 $\eta_{\lambda-0.5}$ 에 대한 本 平均의 結果와 文獻 [11]의 結果를 表 1에 比較하였다. 表 1에서 보인 바와 같이 두 結果는 아주 優秀하게 接近하여 本 研究方法的의 妥當性을 立證할

表 1. 等断面(k=1)* 기둥의 本 研究와 文獻[11]의 結果 比較

比較文獻	無次元臨界荷重, $n_{cr(i)}$			
	i=1	i=2	i=3	i=4
文獻[11]	1.000	4.000	9.000	16.00
本 研究	1.000	4.000	9.000	16.00

n	比較文獻	θ_a	h	$\eta_{\lambda=0.5}$	備考
3.0	文獻[11]	2.593	1.204	0.3536	第 1 모드
	本 研究	2.591	1.204	0.3537	
7.0	文獻[11]	1.987	0.8057	0.0000	第 2 모드
	本 研究	1.986	0.8059	0.0000	
15.0	文獻[11]	1.908	0.3556	-0.1340	第 3 모드
	本 研究	1.909	0.3557	-0.1341	
20.0	文獻[11]	1.305	0.3895	0.0000	第 4 모드
	本 研究	1.304	0.3895	0.0000	

*等断面(k=1)인 경우에 断面形狀係數 m은 기둥의 舉動에 影響을 못미침(13.1式 參照).

表 2. 本 研究와 文獻[12]*의 第 無次元臨界荷重 比較

k	0.1	0.4	0.6	0.8	1.0
文獻[12]	0.349	0.610	0.749	0.881	1.00
本 研究	0.349	0.610	0.750	0.882	1.00

*文獻[12]에서 變断面式으로 $I_s = I_c [2(1-1/k)s/l + 1/k]^2$, $0 \leq s \leq l/2$ 의 對稱斷面을 使用하였으므로 本 檢證에서도 위의 變断面으로 微分方程式을 誘導하고 臨界荷重을 구하였음(I_c 는 기둥 中央의 断面 2次 모멘트임).

수 있다. 特히 文獻[11]의 값은 完全橢圓積分에 의한 正確解(exact solution)이므로 本 研究結果가 數值解析法에 의한 數值解(numerical solution)이기는 하지만 그 正確性은 매우 優秀한 것으로 評價된다.

表 2는 變断面 기둥의 臨界荷重에 대한 本 研究結果와 文獻[12]의 結果를 比較한 表이다. 文獻[12] 값은 2次理論에 의한 固有值問題로 臨界荷重을 구하였지만 2次理論에 의한 臨界荷重과 3次理論에 의한 臨界荷重은 同一한 값을 갖기⁽¹³⁾ 때문에 서로 比較할 수 있다. 表 2에서도 本 研究結果의 正確性을

5. 數值解析 例

그림 3~5는 断面比 k=2인 變化높이 矩形断面

(m=3), 變化幅 矩形断面(m=1) 및 正方形断面/圓形断面(m=4)의 平衡經路를 나타낸 그림이다. 本 研究에서 平衡經路는 荷重과 初期回轉角 θ_a , 移動支點의 水平처짐 h 사이의 關係로 나타내었다. 第 1 臨界荷重보다 큰 荷重에서는 두 개 이상의 平衡經路를 갖지만 本 研究에서는 初期回轉角 θ_a 가 가장 작은 平衡經路 하나만을 그림에 나타내었다.

이 그림들에서 平衡經路가 分岐하는 곳의 荷重이 臨界荷重이 되는데 n軸上에 □標로 表示하였다. 이 臨界荷重들은 작은 쪽에서부터 第 1, 2, 3, 4臨界荷重 이 되며 第 1, 第 2臨界荷重 사이의 荷重에서 기둥의 挫屈形은 第 1挫屈形이 되며, 높은 모드의 挫屈形도 마찬가지이다.

平衡經路는 挫屈 直後에 θ_a 및 h 모두 큰 變化率을 보이며 特히 第 1臨界荷重 直後에 $n - a\theta_a$ 關係는 매우 큰 變化率을 보이고 있다. 挫屈形의 모드數가 增加할수록 最大初期回轉角 θ_a 및 最大平衡처짐 h는 점점 작아지는 것을 알 수 있으며 初期回轉角 θ_a 는 모두 π 값보다 작은 값을 나타내고 있다.

또한 m=3(그림 3)과 m=1(그림 4)의 境遇에 第 1 挫屈形에서 最大水平처짐 h가 1을 초과하여 기둥의 移動支點이 回轉支點 左側으로 移動할 수 있음을 보여준다.

그림 6~8은 断面比 k=2이고, m=3, 1, 4의 断面形狀에 대한 第 1, 2, 3, 4挫屈形의 正確彈性曲線의

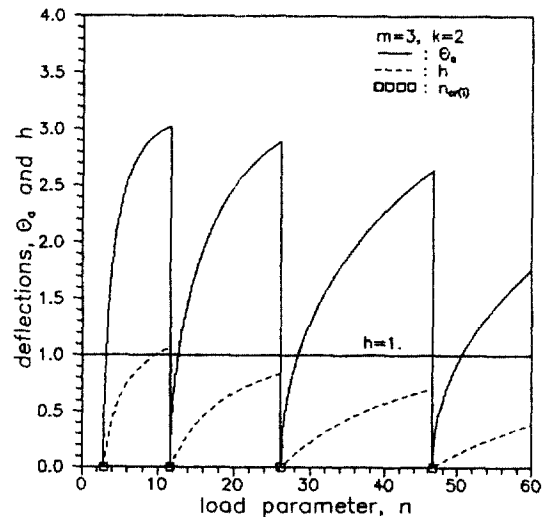


그림 3. 變化높이 矩形断面 기둥의 平衡經路

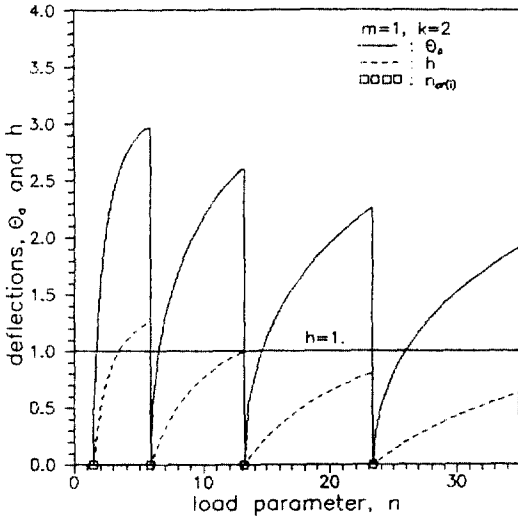


그림 4. 變化幅 矩形斷面 기둥의 平衡經路

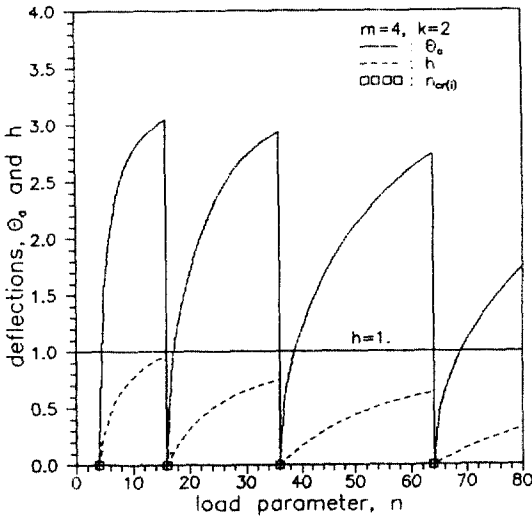


그림 5. 正方形斷面/圓形斷面 기둥의 平衡經路

典型的인 예를 보여준다. 이 그림들에서는 $h=0.3$ ($\lambda_{k=1}=0.7$), $h=1$ ($\xi_{k=1}=0$) 및 $h \geq 0$ 인境遇에 대하여 예를 들었다.

그림 3을 參考하면 第 1, 2, 3, 4의 挫屈形에서 $h=0.3$ 인 n 값은 各各 3.62, 14.23, 31.73, 56.22이고 $h=1$ 인 n 값은 第 1挫屈形에서 9.74임을 알 수 있다. 이들 n 값에 대한 正確彈性曲線은 그림 6과 같다. 이 그림에서 第 1挫屈形은 正確彈性曲線上에서 變曲點이 없고, 第 2, 3, 4挫屈形은 各各 한 개, 두 개, 세 개의

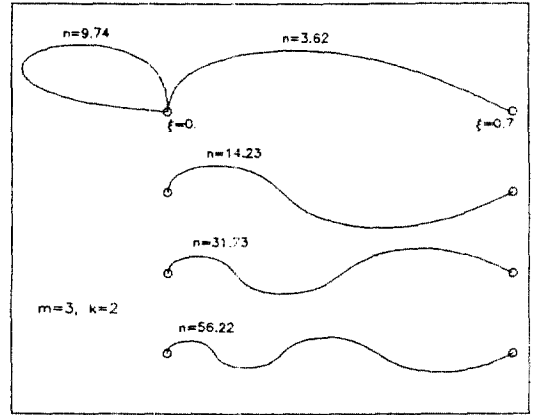


그림 6. 後挫屈 기둥의 正確彈性曲線 例($m=3, k=2$)

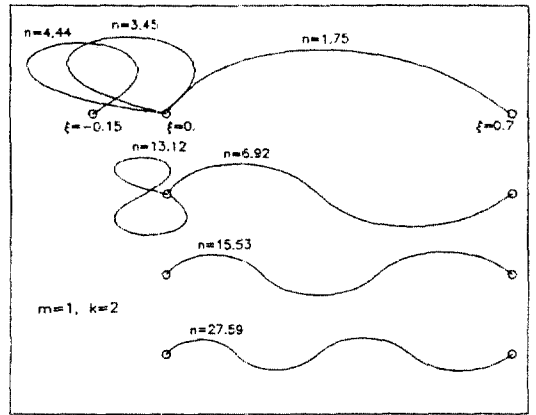


그림 7. 後挫屈 기둥의 正確彈性曲線 例($m=1, k=2$)

變曲點을 갖고 있음을 알 수 있다.

그림 7에 $m=1$ 의 斷面形狀에 대한 挫屈形의 正確彈性曲線의 例를 나타내었다. 그림 7에서는 第 1挫屈形에서 $h > 1$ 인 즉 $\xi_{k=1} < 0$ 인境遇에 대해서도 例를 들었다. 또한 第 2挫屈形에서 $h=1$ 인境遇에 대하여 例를 들었으며 이는 文獻[14]에 收錄되어 있는 여러가지 可能한 挫屈形 中の 하나인 것을 알 수 있다.

마찬가지로 그림 8에 $m=4$ 의 斷面形狀에 대한 正確彈性曲線의 例를 나타내었다. 이境遇에는 $h \geq 1$ 인 挫屈形은 存在하지 않았다(그림 5 參照).

그림 9~11은 $m=3, 1, 4$ 의 斷面形狀에 대한 第 1, 2, 3, 4臨界荷重을 各各 나타내고 있다. 斷面比 k 값은

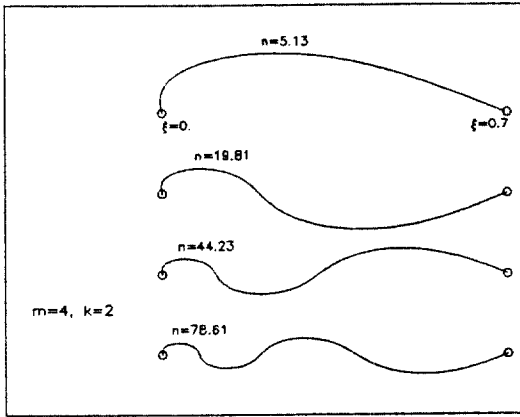


그림 8. 後挫屈 기둥의 正確彈性曲線 例(m=4, k=2)

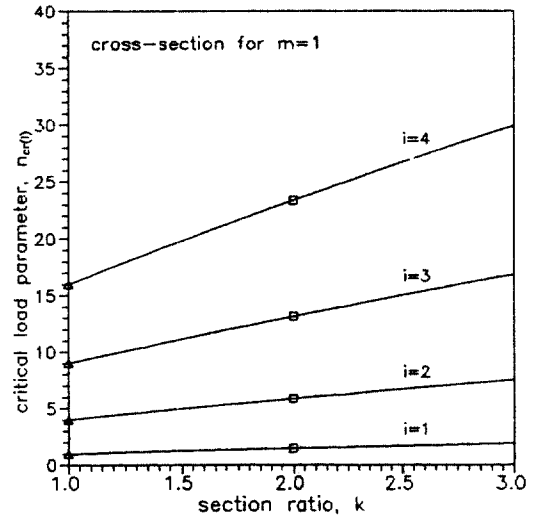


그림 10. 變化幅 矩形斷面의 臨界荷重

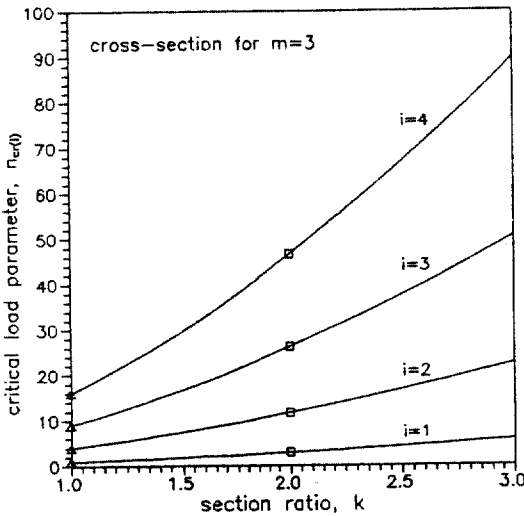


그림 9. 變化높이 矩形斷面의 臨界荷重

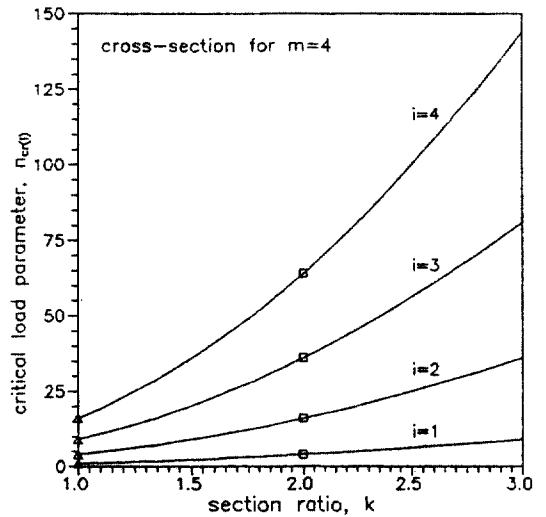


그림 11. 正方形斷面/圓形斷面의 臨界荷重

1~3이면 工學的으로 充分하므로 k값을 1에서 3까지 變化시키면서 臨界荷重을 구하였다. 이들 그림에서 等斷面(k=1)에 대한 第 1, 2, 3, 4臨界荷重을 \triangle 標로 表示하였으며, 이들 값은 文獻[11]의 값들과 一致하는 것을 表 1에서 이미 說明한 바 있다. 또한 이들 그림에서 k=2에 대한 臨界荷重 값을 \square 標로 表示하였으며 그림 3~5에서 \square 標로 表示한 k=2에 대한 臨界荷重과 正確하게 一致하는 것을 알 수 있다.

그림 9~11이 보여주는 바와 같이 臨界荷重은 k 값이 增加할수록 增加한다.

기둥의 第1臨界荷重은 物理적으로 큰 의미를 갖고 있으며 實際의 기둥 設計에서는 第1臨界荷重이 가장 重要한 設計基準이 된다. 따라서 數值解析 結果로 얻어진 $(n_{cr(1)}, k)$ 값들을 回歸分析하여 다음과 같은 第1無次元 臨界荷重方程式을 提案한다.

① 變化높이 矩形斷面(m=3)

$$n_{cr(1)} = -0.104 + 0.680k + 0.421k^2 (r^2 = 0.99), 1 \leq k \leq 3 \quad (19.1)$$

表 3. 斷面形狀係數 m 이 臨界荷重에 미치는 影響

I_b/I_a	m	無次元臨界荷重, $n_{cr(i)}$			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
2.0	3	1.420	5.677	12.77	22.70
	1	1.470	5.842	13.13	23.33
	4	1.414	5.657	12.73	22.63
3.0	3	1.751	6.991	15.72	27.95
	1	1.908	7.507	16.84	29.90
	4	1.732	6.928	15.59	27.71

表 4. 斷面形狀係數 m 이 θ_a , h 에 미치는 影響

n	I_b/I_a	m	θ_a	h
3.0	2.0	3	2.451	0.9362
		1	2.402	0.9098
		4	2.456	0.9396
	3.0	3	2.195	0.7250
		1	2.032	0.6416
		4	2.213	0.7353
5.0	3.0	3	2.926	1.217
		1	2.903	1.205
		4	2.929	1.219
	3.0	3	2.820	1.069
		1	2.744	1.030
		4	2.828	1.074

② 變化幅 矩形斷面($m=1$)

$$n_{cr(i)} = 0.501 + 0.517k - 0.016^2 \quad (r^2 = 0.99), \quad 1 \leq k \leq 2 \quad (19.2)$$

③ 正方形斷面 또는 圓形斷面($m=4$)

$$n_{cr(i)} = k^2 \quad (r^2 = 1), \quad 1 \leq k \leq 3 \quad (19.3)$$

윗 식들에서 r 는 相關係數이며, r^2 이 1에 가까와 거의 完全相關關係를 보이고 있다. 위의 公式를 利用하는 境遇에 數值解析된 값과 平均 0.05%, 最大 0.3%의 差異를 보였으며, 따라서 工學的으로 利用하기에 充分하다고 思料된다. 특히 $m=4$ 인 境遇에 $n_{cr(i)} = (ik)^2$, $i=1, 2, 3, 4, \dots$ 는 無次元 臨界荷重의 正確解로 推定된다.

表 3, 4는 斷面形狀係數 m 이 臨界荷重 및 後挫屈 舉動에 미치는 影響을 分析하기 위하여 I_b/I_a 값을

一致시켰을 때 各 斷面形狀別로 臨界荷重 및 θ_a , h 를 各各 收錄한 表이다. 이때 $I_b/I_a = k^m$ 로 表示되기 때문에 微分方程式 (13.1)式을 修正없이 使用할 수 있다.

먼저 表 3에서 I_b/I_a 값이 같을 때 無次元 臨界荷重은 $m=1, 3, 4$ 의 斷面形狀 順序로 크며, $m=1$ 과 差異는 $I_b/I_a=3$ 인 境遇에 第 1臨界荷重에서 約 9.2%를 나타내고 있다. 따라서 斷面形狀이 臨界荷重에 미치는 影響은 比較的 큰 것을 알 수 있다.

表 4에서 I_b/I_a 값이 같을 때 θ_a , h 의 값은 $m=4, 3, 1$ 의 斷面形狀 順序로 크다. 그러나 그 差異는 아주 微少하여 斷面形狀이 기둥의 後挫屈 去冬에 미치는 影響은 매우 작음을 알 수 있다.

6. 結 論

이 論文은 單純支持 變斷面 기둥의 臨界荷重 및 後挫屈 舉動에 관한 研究이다. 이 研究를 통하여 얻어진 結論은 다음과 같다.

1) 變斷面을 갖는 後挫屈 기둥의 正確彈性曲線을 支配하는 微分方程式을 3次理論에 의하여 誘導하고 또한 單純支持의 境界條件을 誘導하였다.

2) 위의 微分方程式과 境界條件을 利用하여 臨界荷重과 後挫屈 기둥의 正確彈性曲線을 얻을 수 있는 數值解析 技法을 開發하였다.

3) 單純支持 變斷面 기둥의 第 無次元 臨界荷重方程式으로 (19.1)-(19.3)式을 提案한다.

4) 斷面形狀係數가 後挫屈 舉動에 미치는 影響은 比較的 작으나, 臨界荷重에 미치는 影響은 比較的 크다.

이 研究에서는 單純支持 變斷面 기둥에 局限하였으며, 自由端 및 固定端을 갖는 기둥에 대해서는 數值解析이 單純支持 기둥과는 相異하므로 以後의 研究課題로 삼는다.

參 考 文 獻

1. 劉哲秀, 孫晟源, "一定變斷面 長柱의 臨界挫屈荷重의 決定", 大韓土木學會 論文集, 第4卷 第1號, 1884, pp. 98-101.
2. 李炳求, 吳相晉, "單純支持된 變斷面 기둥의 大變形 解析", 大韓土木學會 學術發表會 概要集, 1990. 10.

- 28, pp. 53-56.
3. 황학주, 김문겸, 이승원, 김소운, "고유치문제 형성에 의한 평면판의 탄소성 좌굴특성 해석", 전산구조공학회 논문집, 제 4권 제 1호, 1991, pp. 73-82.
 4. Takeshi Sakiyama, "A Method of Analysing the Elastic Buckling of Tapered Columns", *Computers & Structures*, Vol. 23, No. 1, 1986, pp. 119-120.
 5. A.N. Kounadis and J.G. Mallis, "Elastica Type Buckling Analysis of Bars From Non-Linearly Elastic Material", *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol. 22, No. 2, 1987, pp. 99-107.
 6. C.M. Wang and K.K. Ang. "Buckling Capacities of Braced Heavy Columns Under an Axial Loads," *Computers & Structures*, Vol. 28, No. 5, 1988, pp. 563-571.
 7. A.K. Gupta, "Vibration of Tapered Beams", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 11, No. 1, 1985, pp. 19-36.
 8. W.F. Chen and T. Atsuta, *Theory of Beam-Columns (I)*, McGraw-Hill, Inc., 1977, pp. 101-104.
 9. G. Dahlquist, A. Bjorck and N. Anderson, *Numerical Method*, Prentice-Hall, Inc., 1974.
 10. B. Carnahan, H.A. Luther and J.O. Wilkes, *Applied Numerical Methods*, John Wiley & Sons, Inc., 1969.
 11. W.F. Chen and T. Atsuta, *ibid*, pp. 105.
 12. F. Bleich and H.H. Bleich, *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill, Inc., 1952, pp. 187-188.
 13. Gere and Timoshenko, *Mechanics of Materials*, Second Edition, Wadsworth, Inc., 1984, pp. 553-560.
 14. A.E.H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th Ed., Dover Publication, 1927, pp. 404-405.

(接受 : 1991. 4. 21)