

## 희박행렬의 기법을 이용한 대규모 측지망의 조정

## Adjustment Program for Large Sparse Geodetic Networks

이 영 진\*

Lee, Young Jin

## Abstract

This paper presents an overview of a system of computer programs for the solution of a large geodetic network of about 2,000 stations. The system arranges the matrices in systematic sparse form which is applied to observation equations of RR(C)U (Row-wise Representation Complete Unordered) type and to normal equations of RR(U)U (Row-wise Representation Upper Unordered) type. The solution is done by a Modified Cholesky's algorithm in view of large networks. The implementation program are tested in PC-386 by korean new secondary networks, the results show that the sparse techniques are highly useful to geodetic networks in core-storage management and processing time.

## 요 지

이 논문은 대규모인 약 2,000점(미지수 약 4,000개)의 평면 측지망을 조정할 수 있는 프로그램을 개발하는데 목적이 있다. 데이터의 저장 및 관리에는 희박행렬(sparse matrix)의 기법이 사용되었으며, 관측방정식에는 RR(C)U (Row-Wise Representation Complete Unodered) 방식, 정규방정식에는 RR(U)U (Row-Wise Representation Upper Unodered) 방식을 도입하고 해법에는 수정 Cholesky법을 적용하였다. PC 386에서 개발된 이 프로그램은 정밀 2차 기준점망인 테스트망에 적용되었으며, 2차원 배열을 사용한 Cholesky 분해법 및 직교분해법을 채용한 프로그램과의 상대적인 비교분석이 이루어졌다. 연구의 결과에서는 희박행렬의 기법이 기억용량의 면에서 뿐만 아니라 처리시간에 있어서도 특히 효과적인 기법임을 보여주고 있다.

## 1. 서 론

현재 국가기준점의 재정비를 위해 시행되고 있는 정밀 기준점측량은 1, 2등 삼각점을 근거로 하는 약 1,300점 규모의 정밀 1차 기준점측량과 3, 4등 삼각점을 근거로 하는 약 15,000점 규모의 정밀 2차

기준점측량으로 구분되고 있다.

이와같이 대규모인 측지망의 경우에는 미지수 1,000개 이하인 중규모의 망에 적용되는 일반적인 해법으로 처리하는데 한계가 있다.<sup>(2,17,19)</sup> 이는 컴퓨터 용량뿐만 아니라 처리시간에서 문제점을 유발할 수 있기 때문이다.

독일의 Lower Saxony 주의 경우에 1,500점 규모인 2차 기준점망을 구축하고 있으며, 덴마크의

\* 정회원 · 한양대학교 공대 강사

경우 12개 좌표계로서 각각 2000~3000점 규모의 블록으로 처리되고 있다. 또한 미국의 NAD83에서는 총 25만점에 대해 1200~2000점 블록의 조합에 의해 처리된 바 있으며 일본의 경우 17개 좌표계별로 처리되고 있다. 캐나다의 경우에는 1200점 규모의 30개 블록으로 구분하여 처리하고 있다.<sup>(7,9,11,18)</sup>

3개의 좌표계로 구성된 우리나라의 경우에는 삼각점의 국가적인 재정비 사업이 일부 완료 내지는 추진과정에 있는 만큼 2000~3000점 규모의 망조정 프로그램의 개발이 절실한 실정이다.

따라서 이 논문에서는 회박행렬의 기법을 이용하여 미지수 약 4,000개(약 2,000점)인 대규모 평면 측지망의 조정을 위한 PC용 프로그램을 개발하는데 그 목적이 있다.

## 2. 최소제곱해법

측지학 분야, 사진측량 분야 및 통계계산 분야에서 나타나는 최소제곱법의 문제는 대부분 회박행렬(sparse matrix)의 형태이며, 특성에 따라 다양한 해법이 제시되고 있다.<sup>(10)</sup>

최소제곱 조정법에서 사용되는 Gauss-Markov 모델식은 다음 두 식으로 나타낼 수 있으며, 관측방정식으로 불리운다.<sup>(3,4)</sup>

$$AX=L+V \quad (1)$$

$$C_{11}=\sigma_0^2Q_{11} \quad (2)$$

이때  $X$ 는 미지량 벡터이며,  $L$ 은 관측량-계산량(O-C),  $V$ 는 잔차량,  $\sigma_0^2$ 은 분산계수(variance factor),  $C_{11}$ 는 관측치에 대한 공분산 행렬,  $Q_{11}$ 은 관측치에 대한 공분산 계수행렬이다. 또한  $A$ 는 망의 형상에 관련된 형상행렬(configuration matrix)이다.

위식 (1), (2)를 합하여 1개의 측정량  $i$ 에 대응되는 관측방정식은 다음과 같다.

$$A_i X_i=L_i+V_i \quad \left(P_i=\frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}\right) \quad (3)$$

이때 최소제곱법의 문제는 Euclidian norm에 의한 다음 조건

$$\text{minimize}\|AX-L\| \quad (4)$$

을 만족시켜야 하므로  $V^T PV=\min$ 의 관계가 있다. 그러므로 식 (1)대신에 다음의 정규방정식이 성립한다.

$$A^T PAX=A^T PL \quad (5)$$

이때 랭크  $r=\text{rank}(A^T PA)$ 의 값이 미지수의 수  $n$ 과 같을때는 역행렬 $(A^T PA)^{-1}$ 이 구해질 수 있으나,  $r<n$ 인 경우에는 singular이므로 $(A^T PA)^{-1}$ 를 구할 수 없다.

이 때에는 미지수에 대한 공분산 계수행렬  $Q_{xx}$ 에 대한 조건

$$\text{trace}(Q_{xx})=\min \quad (6)$$

을 추가시켜 MOORE-PENROSE 역행렬  $N^+$ 를 계산할 수 있으므로 일반적인 해는 다음과 같이 구해진다.

$$X=(A^T PA)^+ A^T PL \quad (7)$$

$$Q_{xx}=(A^T PA)^+ \quad (8)$$

## 3. 정규방정식의 해

정규방정식의 계수행렬  $N=A^T PA$ 는 대칭행렬이므로 Cholesky 분해법으로 부터 다음과 같이 분해될 수 있다.

$$N=A^T PA=R^T R \quad (9)$$

여기서  $R$ 은 위삼각형 행렬이며,  $R=D^{1/2}U$ 의 형태로 대각선 요소를 분리시키면 다음의 수정 Cholesky 법에 의한 분해가 가능하다.<sup>(12,13)</sup>

$$N=U^T DU \quad (10)$$

이 수정 Cholesky법은 제곱근의 계산을 배제시키는 장점이 있다. 그러므로 역행렬은 식 (9)로 부터 분해행렬  $R$ 의 역행렬을 구하여

$$N^{-1}=(R^T R)^{-1}=(R^{-1})(R^{-1})^T=\lambda \lambda^T \quad (11)$$

에 의해 해결할 수 있다.

이때  $R^{-1}$ 행렬은 요소가 거의 꽉 채워진 밀집행렬(dense matrix)인 단점이 있으나 개개의 요소가  $N^{-1}$ 의 다른 요소와 독립적으로 구해지는 장점을 가지고

있다.

미지좌표에 대한 벡터  $X$ 는 역행렬을 사용하지 않고서도  $B=A^T PL$ 로부터 직접 구할 수 있다. 즉,

$$U^T D U X = B \quad (12)$$

로부터  $Z = D U X$ ,  $W = U X$ 라 놓으면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U^T Z = B \quad (13)$$

$$D W = Z \quad (14)$$

$$U X = W \quad (15)$$

그러므로 먼저 식 (13)에서  $Z$ , 다음에 식 (14)로부터  $W$ , 마지막으로 식 (15)에서  $X$ 를 구할 수 있다. 식 (13)의 계산이 전방대입법, 식 (15)의 계산이 후방대입법이다.

식 (11)에서는  $R$ 행렬 전체에 대한 역행렬의 계산이 필요하지만 연속 후방대입법(successive backward substitution)을 적용한다면  $R^{-1}$ 의 계산을 피할 수 있다. 즉

$$\begin{aligned} R(R^T R)^{-1} &= (R^T)^{-1} \\ R N^{-1} &= (R^T)^{-1} \end{aligned} \quad (16)$$

이므로  $(R^T)^{-1}$ 의 대각선 요소만을 알면 간단히 처리될 수 있다. 특히 미지좌표에 대한 분산값만을 구하고자 할 때에는 대단히 효과적이며,  $N^{-1}$ 의 외곽부에 대한 영향을 무시할 수 있기 때문에 합리적이다.<sup>(11)</sup> 그러나, 회박행렬의 경우에는 식 (11)을 직접 사용하는 것이 더 효과적이다.

#### 4. 조정 프로그램

이 프로그램은 2000점(미지수 4000개)인 대규모 평면망 조정을 목적으로 개발되었으며, 자연값(default value)은 우리나라 정밀 2차 기준점측량의 규정<sup>(11)</sup>을 적용하고 있다.

관측방정식, 정규방정식, 그리고 분해행렬에는 모두 회박행렬의 기법을 적용하였으며, 수정 Cholesky 방법, 즉  $U^T D U$ 분해법을 해법에 채용하였다. 또한 가정된 초기좌표로부터 계산결과를 개선시킬 수 있도록 반복과정을 도입하였으며, 이때의 기준으로

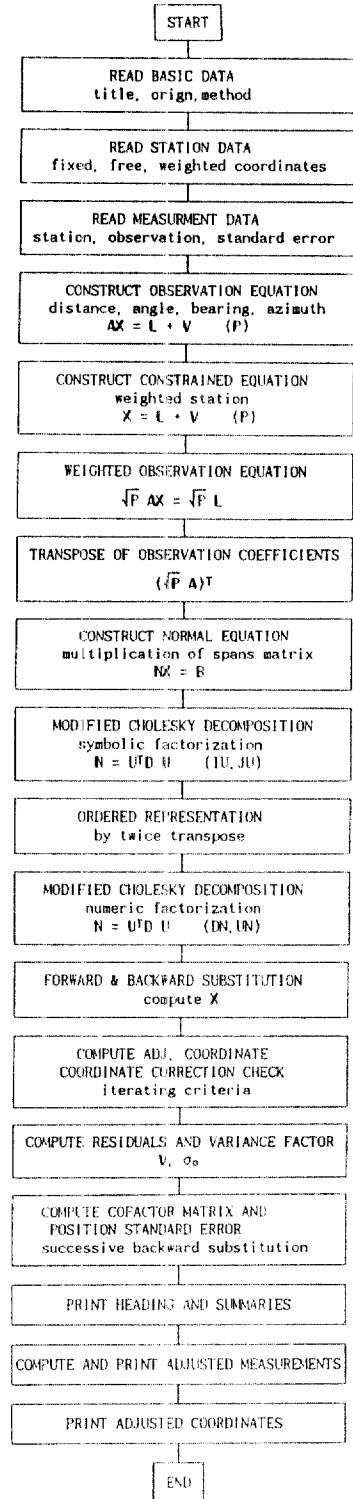


그림 1. 흐름도

는 다음을 사용하였다.<sup>6)</sup>

즉, 좌표 보정량을  $\Delta X, \Delta Y$ 라고 할 때,

$$\left[ \frac{\sum \Delta X^2}{n} \right]^{1/2} \leq 0.001, \quad \left[ \frac{\sum \Delta Y^2}{n} \right]^{1/2} \leq 0.001^m \quad (17)$$

조정좌표의 표준오차를 구하는 데에는 수정 Cholesky 분해행렬  $U$ 의 역행렬을 계산하지 않고서 직접 구하는 해법을 사용하였다(그림 1). 프로그램 언어는 FORTRAN-77을 사용하였으며, IBM Compatible 386 DX-33 MHz에서 처리되었다. 이때의 주기억용량은 8 MB이다.

### 5. 희박행렬의 기법

대규모 측지망의 경우에는 계산시간 뿐만 아니라 기억용량의 면에서 희박행렬을 최적인 상태로 압축시키는 기법이 필요하며, 이에 대한 규칙적인 적용이 필수적이다. 측지망의 경우에 있어서는 sparse row-wise format의 형태와 variable-column storage format 기법이 효과적인 것으로 알려지고 있다.<sup>15,16)</sup>

이 논문에서는 행을 위주로 하는 기법이 채택되었으며, 관측방정식의 경우와 정규방정식에 대한 사항을 기술한다.

그림 2는 이 방법의 개요를 설명해 주고 있으며 희박행렬은 IA, JA의 형태구조를 갖는 행렬과 AN의 수치구조를 갖는 행렬로 분리되어 저장된다. 그러므로 RR(C)O(Row-wise Representation Complete Ordered)구조이다.

1개의 관측방정식에는 다음의 내용이 압축되어 저장된다.

- (1) IA에는 행번호와 행내에 포함된 0이 아닌 요소의 수를 나타낸다.
- (2) JA에는 IA에서 지정된 열의 위치를 나타낸다.
- (3) AN에는 IA와 JA에서 지정된 요소의 수치를 저장시킨다.
- (4) AL에는 상수행렬의 요소인 O-C 값을 저장한다.
- (5) SIGI에는 관측량의 표준오차를 저장한다.

따라서 희박행렬 A에 대응하는 r행은  $IA(r+1) = IA(r)$ 인 경우를 제외하고는 JA와 AN에서의 요소,

$$IA(r) \sim IA(r+1) - 1 \quad (18)$$

사이의 위치에 요소값이 저장되며, m개의 관측방정식이 존재할 경우 IA는 m+1개의 위치를 갖는다.

정규방정식의 해에서는 제곱근의 계산을 피하기 위하여  $U^T D U$  분해법을 채용하였는 바, 정규방정식의 계수행렬은 그림 3과 같이 관측방정식에서의 경우와 동일한 원리가 사용되었다.

- (1) UD에는 대각선 요소를 저장한다.
- (2) IU, JU에는 관측방정식의 경우와 같이 위삼각형 요소의 위치를 저장한다.
- (3) UN에는 IU, JU와 함께 위삼각형 행렬의 요소를 저장한다.

Cholesky 분해행렬의 경우에는 정규방정식의 계수행렬보다 훨씬 많은 량의 요소를 갖게 되므로 보조적인 행렬이 필요하며, 분해과정에서 IU와 JU에 순차적인(ordered) 수치구조가 필요하므로 이에 대한 보조적인 처리가 포함되어야 한다.

또한 연산을 효율적으로 처리할 수 있도록 UD에는 역수를 기억토록 하였으며 후방대입의 경우에는 첫행 또는 마지막 행의 처리가 별도로 이루어질 수 있도록 연산이 이루어져야 한다.

### 6. 적용 및 분석

이 연구에서 개발된 프로그램의 타당성과 효율성을 입증하기 위하여 우리나라 정밀 2차 기준점망인 테스트망에 적용하였다. 이 테스트망은 150점으로부터 최대 1300점 규모까지의 7종류이며, 크기별로 기억용량과 처리시간에 대하여 검토되었다. 그림 4는 1050점 규모인 테스트망의 한 예이다.

표 1에서는 테스트망의 규모와 관측방정식에 대한 기억용량에 대하여 희박행렬을 사용한 경우와 사용하지 않은 경우를 비교한 것이다. 이 결과로부터 희박행렬을 사용한 경우가 기억용량을 1.5~0.2%밖에 사용하지 않으므로 관측방정식을 구성할 때에는 희박행렬의 기법이 절대적임을 알 수 있다.

표 2에서는 정규방정식의 해법에서 기억용량을 보여주고 있으며 정규방정식의 계수행렬은 희박행렬을 사용하지 않을 때보다 5~0.6%만이 소요되며, 분해행렬에서는 20~7%만을 필요로 하는데 그 규모가 커질수록 효율성이 커짐을 알 수 있다.

또한 Hanson(1978)<sup>14)</sup>의 결과 정규방정식에서 co-

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	1.	3.	0	0	0	5.	0	0
A = 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	7.	0	1.	0	0

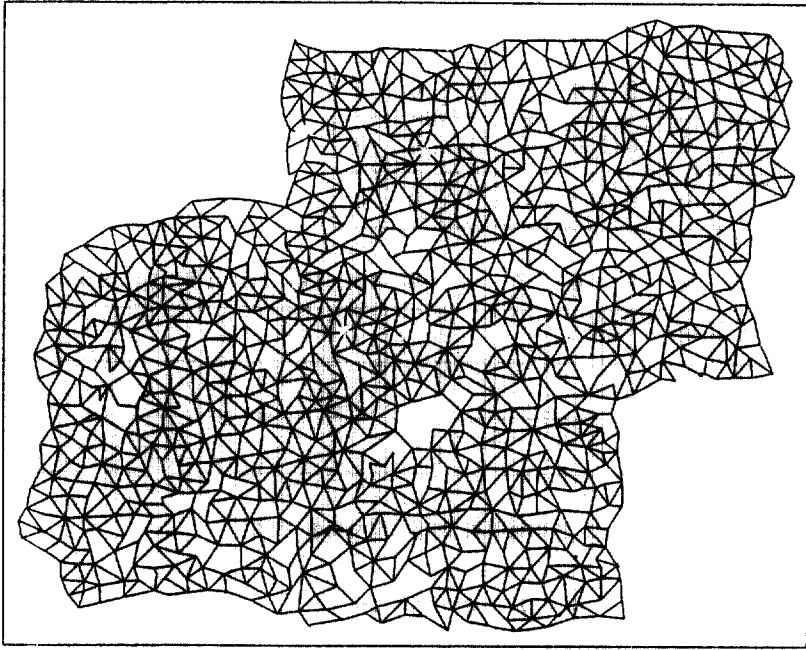
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
IA =	1	4	4	6													
JA =	3	4	8	6	8												
AN =	1.	3.	5.	7.	1.												

그림 2. 회박행렬의 저장 (직사각형 행렬)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.	0	11.	0	0	0	12.	0	0	13.
2		2.	0	0	0	14.	0	0	15.	0
3			3.	0	0	0	16.	0	0	17.
4				4.	0	0	0	0	18.	0
N = 5					5.	0	19.	0	0	20.
6						6.	0	21.	22.	23.
7							7.	24.	25.	0
8								8.	26.	0
9									9.	27.
10										10.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
IU =	1	4	6	8	9	11	15	16	17	18	18						
JU =	3	7	10	6	9	8	9	10	8	9	10						
UN =	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.
UD =	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.							

그림 3. 회박행렬의 저장 (대칭행렬)



Configuration of net

그림 4. 테스트망도 (NET 5의 경우)

표 1. 관측방정식의 계수행렬에 대한 요소의 수\*

NET	m	n	경우 A	경우 B	A/B
NET 1	558	302	2,465	$m \times n$	0.015
NET 2	995	576	4,405	"	0.008
NET 3	1,448	824	6,579	"	0.006
NET 4	2,448	1,322	11,305	"	0.004
NET 5	3,871	2,090	17,783	"	0.002
NET 6	4,258	2,306	19,507	"	0.002
NET 7	4,711	2,576	21,663	"	0.002

\* 경우 B는 회박행렬을 적용하지 않은 경우임.

표 2. 정규방정식의 해에 대한 요소의 수\*

NET	경우 B	정규방정식(A1)	분해행렬(A2)	A1/B	A2/B
NET 1	$n(n+1)/2$	2,254	9,474	0.049	0.207
NET 2	"	4,401	26,133	0.026	0.157
NET 3	"	6,485	47,185	0.019	0.139
NET 4	"	10,576	86,024	0.012	0.098
NET 5	"	16,872	175,488	0.008	0.080
NET 6	"	18,544	195,632	0.007	0.074
NET 7	"	20,653	232,073	0.006	0.070

\*경우 B는 회박행렬을 적용하지 않은 경우이며 A1, A2는 대각선 행렬을 포함.

표 3. 연산시간에 따른 비교 (Run Time)

NET	n	경우 A	경우 B	비 고
NET 1	302	0.4'	1.2'	5.8***
NET 2	576	1.5	7.5	
NET 3	824	3.5	21.5	
NET 4	1322	9.3	--	
NET 5	2090	28.1	--	
NET 6	2306	34.1	--	
NET 7	2576	44.3	--	

\*경우 B는 관측방정식에만 회박행렬을 적용한 경우임.

\*\*직교분해법에 의한 경우임.

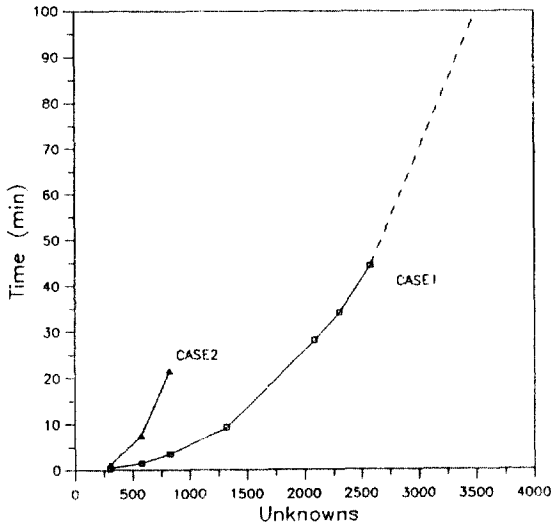


그림 5. 연산 시간별 비교

lumn-profile structure를 사용한 경우(미지수 416) 0.152배만의 용량을 차지하므로 본 연구에서 사용한 회박행렬의 기법에서의 0.04의 편이 훨씬 효과적임을 보여준다.

표 3과 그림 4에서는 연산시간(Run Time)에 대한 상호 비교를 위한 결과이다. 어느 경우든지 미지좌표의 수가 증가함에 따라 연산시간이 급격히 늘어남을 알 수 있으며, 회박행렬을 사용하는 경우(case 1, 경우 A)가 미지의 수가 커짐에 따라 회박행렬을 사용하지 않는 경우(case 2, 경우 B)보다 6~10배 이상 효과적임을 알 수 있다.

이 결과는 모두 반복계산을 시행치 않는 경우에 해당되는 것이며, 실제의 경우 2~3회의 반복이 필

요하므로 표 3에 주어진 연산시간보다 약 1.2배의 시간을 차지하게 된다. 또한 직교분해법에 의한 경우<sup>(6)</sup> 미지수 302개인 망에 대해서는 5.8'으로서 관측방정식에만 회박행렬을 사용할 때보다 약 5배, 모두 회박행렬을 사용한 경우보다 약 15배의 낮은 비효율성을 보여주고 있다.

표 3의 처리시간은 386PC로서도 대규모 측지망을 효과적으로 조정할 수 있는 강력한 수단이 회박행렬임을 판단할 수 있는 근거를 제시한다는 점에서 중요하다고 할 수 있다.

## 7. 결 론

이 논문에서는 2000점의 대규모 평면측지망의 조정계산을 위한 프로그램을 회박행렬의 기법을 이용하여 PC용으로 개발하였다.

테스트망에 시험적으로 적용한 결과, 회박행렬을 사용한다면 2000점(미지수 4000)규모에서 관측방정식의 경우 회박행렬을 사용하지 않을 경우보다 약 0.2%의 용량만이 사용될 것으로 기대된다. 또한 정규방정식의 경우에는 약 0.5%만을, 분해행렬의 경우 약 5%만의 기억용량을 필요로 하기 때문에 대단히 효과적임을 알 수 있다.

처리시간의 측면에서도 요소값이 0인 경우의 연산을 무시하게 되므로 6~10배 이상의 효율성을 확보할 수 있으며, 절단오차 등에서도 효과적인 것으로 판단된다.

## 참 고 문 헌

1. 국립지리원, 정밀 2차 기준점측량 작업규정, 1987.
2. 국립지리원, XY망·BL망 평균계산 이용법, 1988.
3. 백은기, 이영진, 최윤수, 경위도 좌표에 의한 측지망의 동시조정, 대한토목학회 논문집, 5(4) 121-127 (1985).
4. 이석찬, 조규전, 고영호, 이영진, 이질측지망의 동시조정과 신뢰도의 적용, 한국측지학회지, 5(1), 27-34 (1989).
5. 이영진, 이석찬, 직교분해법에 의한 측지망의 조정, 대한토목학회 논문집, 10(4), 95-101 (1990).
6. 이영진, 고밀도 측지망의 결합조정에 대한 연구, 한양대 박사학위논문 (1989).
7. 日本測地學會, 測地學概觀 (1985).

8. 武田通治, 測量學概論, 山海堂 (1968).
9. Anderson, O. and Weng, W.L., Computation and Data-Management of a National Densification Network, *Proc. of the FIG XVII International Congress*, Sofia, 506(5), 1-10 (1983).
10. Bjork, A., Methods for Sparse Linear Least Squares Problems, in *Sparse Matrix Computations*(Bunch, J.R. and Rose, D.J., Eds.), Academic Press, 1976, pp. 177-199.
11. Funcke, G. and Weise, W., A Contribution to the Treatment of Defects in Large Geodetic Networks, *Proc. of the international Symposium on Geodetic Networks* (Vol. 3), Munich, 1981, pp. 130-142.
12. Golub, G.H. and Van Loan, C.F., *Matrix Computations*, The Johns Hopkins Univ. Press, 1983.
13. Hager, W.W., *Applied Numerical Linear Algebra*, Prentice-Hall, 1988.
14. Hanson, R.H., A Posteriori Error Propagation, *Proc. of 2nd symposium, of the NAD*, Arlington, 427-445 (1978).
15. Jennings, A., *Matrix Computation for Engineers and Scientists*, John Wiley & Sons, 1977.
16. Knight, W. and Mepham, M.P., Report on Computer Programs for Solving Large Systems of Normal Equations, *Proc. of 2nd Symposium of the NAD*, Arlington, 1978, pp. 427-445.
17. Poder, K., Geodetic Software Problems, *Proc. of the International Symposium on Geodetic Networks* (Vol. 8), Munich, 1981, pp. 7~12.
18. Schwarz, C.R., TRAVIO Horizontal Network Adjustment Program, *NOAA Technical Memorandum*, NOS NGS-12, 1978.
19. Steeves, R.R., A User's Manual for Program GEOPAN, *UNB Technical Report No. 54*, 1978.  
(接受 : 1991. 10. 29)