

사각단면을 갖는 90° 굽곡관의 3차원 난류유동 해석

Three Dimensional Turbulent Flow Analysis in a 90° Square Sectioned Duct with Strong Curvature

맹 주 성* 이 종 신**
 J. S. Maeng, J. S. Lee

ABSTRACT

The steady, incompressible developing 3-dimensional turbulent flow in a square sectioned curved duct has been investigated by using partially-parabolic equation and Finite Analytic Method.

The calculation of turbulent flow field is performed using 2-equation K-ε turbulence model, modified wall function, simpler algorithm and numerically generated body fitted coordinates.

Iso-mean velocity contours at the various sections are compared with the existing experimental data and elliptic solutions by other authors. In the region of $0^\circ < \theta < 71^\circ$, present results agree with the experimental data much better than the elliptic solution for the similar number of grid points. Furthermore, for the same tolerance, the present solution converges four times faster than the elliptic solution.

Keywords; Finite Analytic Method, Body Fitted Coordinate, Curved Duct, Partially Parabolic

기 호 설 명

| | | b_l^i | b^i 의 l 번째 성분 |
|--------------------------|--|---|-------------------|
| a_d, a_u , 등 | 압력과 압력 수정방정식에 대한 유한해석계수 | C_p, C_{NC} , 등 | 전달방정식에 대한 유한해석 계수 |
| B | 선형화된 대류 전달방정식에서의 계수 | $C_\mu, C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}$ | 난류 모델 상수 |
| B_ϕ, D_ϕ, E_ϕ | ϕ 에 대한 전달방정식에서의 대류계수(= U, V, W, K, ϵ) | G | 난류 생성항 |
| | | g | 전달방정식에서의 생성함수 |
| | | g^i | 일반 곡선 좌표계의 미터릭 텐서 |

* 정회원, 한양대학교 기계공학과

** 정회원, 한양대학교 대학원

| | | | |
|--------------------------------|----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| g_{ij} | 일반좌표계에서의 원주 게이트 미터릭 텐서 | ∇ | 구 배 |
| J | Jacobian | ∇^2 | Laplacian |
| K | (1) 유한해석 국소요소의 객차 크기 | Δ_p | 무차원 압력 구배 |
| | (2) 난류 운동에너지 | Δ_r | 무차원 응력 구배 |
| P | 무차원 압력 | 〈하첨자〉 | |
| U_b | 벌크 속도 | P | 내부 격자점 |
| Re | Reynolds 수 | r, θ, z, t | r, θ, z, t 에 대한 1차 도함수 |
| Re_{eff} | 유효 Reynolds 수 | ξ, η, ζ | ξ, η, ζ 에 대한 1차 도함수 |
| r | 반 경 | $\xi\xi, \eta\eta, \zeta\zeta$ | ξ, η, ζ 에 대한 2차 도함수 |
| R_i | 내부 반경 | 〈상첨자〉 | |
| R_o | 외부 반경 | $n, n-1$ | n 번째와 $n-1$ 번째의 시간 단 계 |
| S_θ | 전달량의 생성함수 | | |
| t | 무차원 시간 | | |
| U_r | 정규화된 마찰(벽전단) 속도 | 1. 서 론 | |
| U, V, W | 무차원 속도 성분 | | |
| U^*, V^*, W^* | 가정된 압력장 P^* 로부터 얻어 진 속도 | | |
| $\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}$ | 모의 속도 | | |
| y^+ | 벽에 수직한 방향으로 측정 한 무차원 거리 | | |
| 〈회랍문자〉 | | | |
| ε | 난류에너지 소산율 | | |
| κ | Von Karman 상수 | | |
| ν | 동점성계수 | | |
| ν_t | 난류와 점성계수 | | |
| (ξ, η, ζ) | 변환된 좌표계 | | |
| η^*, ζ^* | 선형화된 대류방정식에서 변환 된 좌표계 | | |
| $\sigma_k, \sigma_\varepsilon$ | 난류 모델 상수 | | |
| τ | 시간 증분 | | |
| τ_w | 벽면 전단 응력 | | |
| ϕ | 전달량(U, K, W, K, ε) | | |

곡관내의 유동해석은 그 응용범위의 광범위함과 다양함으로 인하여 최근 10여년간 많은 관심의 대상이 되어 왔으며 현재에도 활발한 연구가 진행되고 있다. 또한 곡관내의 유동은 원심펌프, 항공기의 연료 흡입구, 열교환기의 냉각코일, 산업용 가스버너의 공기공급관 등과 같은 공학 전반에 걸친 많은 실제적인 문제에 응용이 될 수 있으며 이러한 열유체 기계의 설계, 운용 및 성능향상을 위해서는 유동현상의 정확한 해석이 선행되어야 한다. 그러나 대부분의 열유체 기계내의 유동은 복잡한 형태의 3차원 난류유동이어서 과거에는 수치적 해석보다는 주로 실험적 방법에 의존하여 그 유동특성을 해석하였으나, 최근에 들어서는 전산기의 기억용량의 대형화, 연산속도의 고속화, 그리고 난류특성을 더욱 잘 예측할 수 있는 새로운 난류모델의 개발 등에 힘입어 수치적 연구에도 많은 진전을 보았다.

Ward-Smith¹⁾은 90° 곡관에서 벽압력 분포와 이에 상응하는 압력강하를 광범위한 작동 조건하에서 측정하여 곡관과 관련된 기초 설계 자료를 제공하였으나, 유동기구의 이해

에 대해서는 실질적인 기여를 하지 못하였다. 최근의 90° 곡관내의 유동해석은 Prapat²⁾, Humphrey et al.^{3,4)} 등의 실험 및 수치해석이 대표적인 것으로, 전자는 주유동 방향으로의 확산항을 무시하는 부분 포물형방정식을 사용하여 만곡관(mildly-curved duct)의 유동장을 해석하였으나, 곡관 후반부에서는 그 결과가 실험치와 비교할 수 없을 정도로 좋지 않았으며, 후자는 타원형방정식을 사용하여 급곡관(strongly curved duct)의 유동장을 해석하여 실험치와 잘 일치하는 결과를 얻었으며, 급곡관 유동장의 해석에 부분포물형 방법의 적용에 대한 가능성을 제시하였다.

또한, 90° 곡관내의 유동은 1980~81 AF-OSR-HITM-Stanford Conference에서의 시험 유동이었으며, Humphrey et al.⁴⁾, Taylor⁶⁾, Hunt⁶⁾의 수치해석 결과가 발표되었다.

그러나 곡관내의 유동은 곡률로 인한 원심력과 반경방향 압력구배의 불균형으로 인하여 주유동 방향속도가 공간적으로 재분배되어 강한 대칭형의 2차유동이 발생하며 레이놀즈 응력들의 강한 대류 및 유동편중을 유발시켜 매우 복잡한 유동현상이 나타난다.⁴⁾ 또한 난류 유동에서는 레이놀즈응력의 생성(발생)으로 인하여 층류유동에서와는 다른 압력변화 및 속도분포가 발생한다. 즉 주유동방향으로의 벽압력 변화는 층류에서와는 달리 potential 유동과 유사한 형태를 보이며 평균속도들은 그 크기상으로 층류유동에서보다 작고 고른 분포를 나타내는데^{5,9)}, 이는 난류생성이 평균속도로부터 에너지를 흡수하여 유체 사이의 혼합을 촉진시키기 때문이다. 이러한 유동은 Dean Number에 크게 의존하고 난류의 발생을 억제하는 볼록한 벽과 이를 촉진시키는 오목한 벽이 동시에 존재하므로 이들 상호간의 현상을 상세히 규명하는 일은 매우 중요한 일이라 하겠다.

유동방향으로 곡률이 존재하는 난류유동의 경우 오목한 면(외벽)의 난류경계층에서는 층류경계층에서 발생하는 Taylor-Görtler Vortices와 유사한 유동형태인 Large-Scale roll cells^{10,11)}이 발생하여 반경방향의 혼합을 증

가시키는 불안정한 유동을 유발시킨다. 반대로 볼록한 벽(Convex Surface)에서는 평판에서와 거의 유사한 현상을 보이나 반경방향으로의 혼합을 억제하는 다소 안정된 유동을 나타낸다.^{6~8)} 이러한 벽이 동시에 존재하고 2차유동 및 유동편중 현상이 강하게 발생하는 곡관내에서의 난류유동 형태를 정확히 해석하는 데에는 이와 같은 복잡한 유동현상 때문에 이론 및 실험적으로 상당히 어렵고 제한적이다. 운동량 방정식에서 레이놀즈응력텐서의 성분들을 모델링할 때, 응력과 평균유동의 구배를 난류 점성계수를 통하여 관련짓는 Boussinesq 근사와 2-방정식 $K-\epsilon$ 난류모델을 사용하여 이 유동의 체적특성을 적절히 묘사하는 것이 가능하리라 예상되며, 본 연구에서도 이 모델을 사용하여 난류특성을 고찰하였다.

본 연구에서는 유한해석법을 사용하여 부분포물형 방정식을 해석하고, 그 결과를 유한차분법을 사용하여 타원형 방정식을 해석한 Humphrey et al.⁴⁾의 실험 및 수치해석 결과와 비교, 고찰하였다.

2. 이론 해석

2.1 연구 모델

본 연구에서 해석하고자 하는 기하학적 현상은 Humphrey et al.⁴⁾이 사용했던 것과 같은 정사각단면($d^2=40 \times 40 \text{ mm}^2$)을 갖는 90° 곡관으로 Fig.1과 같다.

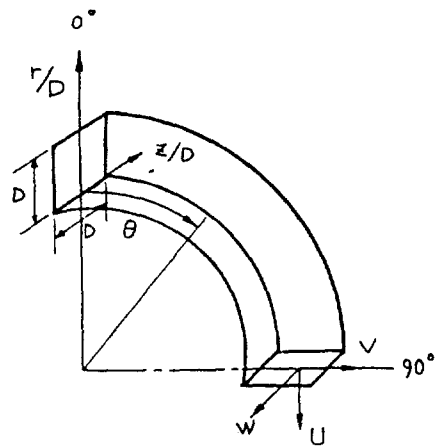


Fig.1 Flow Geometry

2.2 지배방정식 및 경계조건

2.2.1 지배방정식

3차원, 비정상, 비압축성 유동에 대한 원통좌표계(θ, r, z)에서의 무차원화된 일반적 운동방정식은 다음과 같다.

연속방정식 :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (2-1)$$

전송방정식 :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi = R_{eff} \left\{ \left(a_\phi U - \frac{b_\phi}{r} \nu_{t,\theta} \right) \frac{1}{r} \phi_\theta \right. \\ \left. + (a_\phi V - c_\phi \nu_{t,r}) \phi_r + (a_\phi W - d_\phi \nu_{t,z}) \phi_z \right. \\ \left. + a_\phi \phi_t \right\} + s_\phi \dots\dots\dots (2-2) \end{aligned}$$

여기서 ϕ 는 U, V, W, K, ϵ 을, 하첨자 r, θ, z 는 미분을 각각 나타내며

$$\begin{aligned} a_U = 1, \quad b_U = 2, \quad C_U = 1, \quad d_U = 1 \\ a_V = 1, \quad b_V = 1, \quad C_V = 2, \quad d_V = 1 \\ a_W = 1, \quad b_W = 1, \quad C_W = 1, \quad d_W = 2 \\ a_K = \sigma_K, \quad b_K = 1, \quad C_K = 1, \quad d_K = 1 \\ a_\epsilon = \sigma_\epsilon, \quad b_\epsilon = 1, \quad C_\epsilon = 1, \quad d_\epsilon = 1 \end{aligned}$$

등가 확산 계수는

$$\frac{1}{R_{eff, U, V, W}} = \frac{1}{Re} + C_\mu \frac{K^2}{\epsilon}$$

$$\frac{1}{R_{eff, k}} = \frac{\sigma_k}{Re} + C_\mu \frac{K^2}{\epsilon}$$

$$\frac{1}{R_{eff, \epsilon}} = \frac{\sigma_\epsilon}{Re} + C_\mu \frac{K^2}{\epsilon} \text{ 이다.}$$

또한 U, V, W, K, ϵ 에 대한 생성함수(source function)는

$$\begin{aligned} S_U = R_{eff, U} \left\{ \frac{1}{r} P_\theta + \frac{2}{3} \frac{1}{r} K_\theta + \frac{UV}{r} \right. \\ \left. - \nu_{t,r} \left(\frac{1}{r} V_\theta - \frac{U}{r} \right) - \left(\frac{1}{r} \nu_{t,\theta} \right) \left(\frac{2V}{r} \right) \right. \\ \left. - \nu_{t,z} \left(\frac{1}{r} W_\theta \right) \right\} - \frac{2}{r^2} V_\theta + \frac{U}{r^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_V = R_{eff, V} \left\{ -\frac{U}{r^2} + Pr + \frac{2}{3} K_r \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2} \nu_{t,\theta} \left(U_r - \frac{U}{r} \right) - \nu_{t,z} W_r \right\} \\ \frac{2}{r^2} U_\theta + \frac{V}{r^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_W = R_{eff, W} \left\{ P_z + \frac{2}{3} k_z - \frac{1}{r} \nu_{t,\theta} U_z \right. \\ \left. - \nu_{t,r} V_z \right\} \end{aligned}$$

$$S_k = -\sigma_k R_{eff, k} (G - \epsilon)$$

$$S_\epsilon = -\sigma_\epsilon R_{eff, \epsilon} \left(C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{K} G - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{K} \right) \dots (2-3)$$

이다.

난류모델 상수들은 Launder & Spalding¹⁵⁾ 이 제안한 Table 1의 값들을 사용하였다.

Table 1. Value of K-ε Turbulence Model Coefficients

| C_μ | $C_{\epsilon 1}$ | $C_{\epsilon 2}$ | σ_k | σ_ϵ |
|---------|------------------|------------------|------------|-------------------|
| 0.09 | 1.47 | 1.92 | 1.0 | 1.3 |

2.2.2 수치적 격자 생성법

일반적으로 단연결된 3차원 영역에서 기본적인 좌표 생성식은 다음과 같다.

$$\nabla^2 \xi^i = f^i \quad i = 1, 2, 3 \dots\dots\dots (2-4)$$

여기서 $\xi^1 = \xi, \xi^2 = \eta, \xi^3 = \zeta, \nabla^2$ 은 직교좌표계의 Laplacian이고 비제차항 f^i 은 경계면에서 격자의 밀집을 조절하여 주는 역할을 하는 제어함수이다. 그런데 변환영역에서 똑같은 격자간격을 갖는 것이 수치계산을 수행할 때 편리하기 때문에 식(2-4)를 사용하는 것은 불편하다. 따라서 본 연구에서는 물리적 영역에서의 직교좌표계(θ, r, z)가 종속변수가 되게 하고 계산영역에서의 곡선좌표계(ξ, η, ζ)가 독립변수가 되도록, 종속변수와 독립변수를 서로 교환한 역변환식을 사용하였다.

식(2-4)를 역변환하면 다음과 같다.

$$\nabla^2 x^i = g^{ij} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + f^i \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \right)$$

$$i = 1, 2, 3 \dots \dots \dots (2-5)$$

여기서 $h_1=r, h_2=1, h_3=1$ 이다.
 기하학적 형상에 대한 경계조건을 규정하고 식(2-5)를 이산화(discretization)하여 풀면 Fig.2와 같은 각각의 곡관에 대한 수치적 격자를 얻을 수 있다.
 본 연구에서는 $22 \times 17 \times 9 (\theta \times r \times Z)$ 격자분포를 채택하였으며, $y^+ = 30 \sim 80$ 이 되도록 하여 두번째 격자점이 대수영역에 위치하도록 하였다.

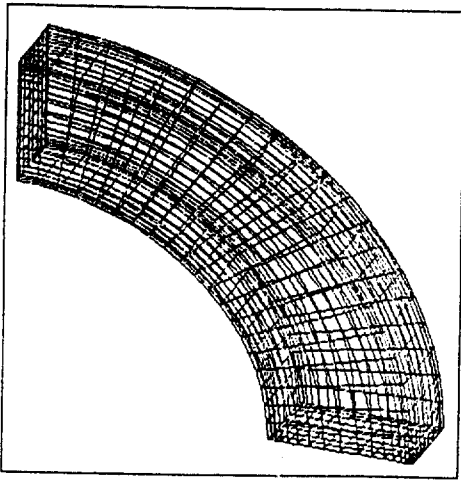


Fig.2 Illustration of numerical grid in 90° curved ducts

2.2.2 변환된 좌표계에서의 지배방정식

본 연구에서는 종축변수(U, V, W, K, ϵ)을 제외한 독립변수 즉 좌표성분(θ, r, Z)만을 경계고정좌표계로 변환하는 부분 변환법¹⁶⁾을 사용하였다. 이와 같은 방법은 불규칙한 형상의 물리적 영역을 균등하게 나누어진 정규격자망을 갖는 계산영역으로 변환하는 것으로 계산이 용이하다는 잇점이 있다.

물리적 영역에서의 지배방정식(2-1)와 (2-2)를 gradient, divergence, Laplacian에 대한 일반표현식을 사용하여 경계고정좌표계(ξ, η, ζ)로 변환하면 다음과 같다.

$$(b_1^1 U + b_2^1 V + b_3^1 W)_\xi + (b_1^2 U + b_2^2 V + b_3^2 W)_\eta + (b_1^3 U + b_2^3 V + b_3^3 W)_\zeta = 0 \dots \dots \dots (2-6)$$

$$g^{11} \phi_{\xi\xi} + g^{22} \phi_{\eta\eta} + g^{33} \phi_{\zeta\zeta} = 2A_\phi \phi_\zeta + 2B_\phi \phi_\eta + D_\phi \phi_\xi + E_\phi \phi_t + S_\phi \dots \dots \dots (2-7)$$

여기서,

$$2A_\phi = \frac{R_{eff, \phi}}{J} (b_1^3 \alpha_\phi^1 + b_2^3 \alpha_\phi^2 + b_3^3 \alpha_\phi^3) - f^3$$

$$2B_\phi = \frac{R_{eff, \phi}}{J} (b_1^2 \alpha_\phi^1 + b_2^2 \alpha_\phi^2 + b_3^2 \alpha_\phi^3) - f^2$$

$$D_\phi = \frac{R_{eff, \phi}}{J} (b_1^1 \alpha_\phi^1 + b_2^1 \alpha_\phi^2 + b_3^1 \alpha_\phi^3) - f^1$$

$$E_\phi = a_\phi R_{eff, \phi}$$

$$S_\phi = S_\phi - 2(g^{12} \phi_{\xi\eta} + g^{13} \phi_{\xi\zeta} + g^{23} \phi_{\eta\zeta})$$

이며, 기하학적 계수는

$$b_i^j = h_m h_n \left(\frac{\partial X^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial X^n}{\partial \xi^j} - \frac{\partial X^n}{\partial \xi^i} \frac{\partial X^m}{\partial \xi^j} \right)$$

$$g_{ij} = \sum_{l=1}^3 h_l^2 \frac{\partial X^l}{\partial \xi^i} \frac{\partial X^l}{\partial \xi^j}$$

$$g^{ii} = \frac{1}{g} (g_{mj} g_{nk} - g_{mk} g_{nj})$$

$$J = \sqrt{g} = \sqrt{|g_{ij}|}$$

이다.

타원형 방정식(2-7)에서 주유동방향으로의 확산항 $\phi_{\xi\xi}$ 를 무시하면,

$$g^{22} \phi_{\eta\eta} + g^{33} \phi_{\zeta\zeta} = 2A_\phi \phi_\zeta + 2B_\phi \phi_\eta + D_\phi \phi_\xi + E_\phi \phi_t + S_\phi \dots \dots \dots (2-8)$$

와 같은 부분 포물형 방정식이 된다.

2.2.3 경계조건

(1) 곡관입구($\theta=0^\circ$)

| | |
|--------------------------------------|---|
| $U, V, \overline{uu}, \overline{vv}$ | specified from measurements of Humphrey et al ⁴⁾ |
| P | not required |
| K | $\frac{1}{2}(\overline{uu} + \overline{vv} + \overline{ww})$ but \overline{ww} is not required |
| ϵ | $C_\mu^{4/3} \cdot K^{3/2}/y$ |

(2) 곡관 출구($\theta=90^\circ$)

| | |
|---------------------|----------------|
| U, V, K, ϵ | not required |
| P | $P_{\xi\xi}=0$ |

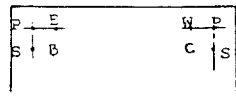
(3) 대칭면 ($z=0$)

$\phi_\zeta=0, \phi=u, v, k, \epsilon$ & $P, W=0$

(4) 곡관의 모서리 (corner point)

모서리 값들은 인접하는 벽면의 값을 평균하여 구하였다.

$\phi_P = 1/2(\phi_S + \phi_E)$
 $\phi_P = 1/2(\phi_S + \phi_W)$



(5) 벽 근처 영역 (near wall region)

본 연구에서 사용한 $K-\epsilon$ 모델은 완전 난류 영역에서만 적용가능하므로 벽 근처에서는 수정된 벽면 함수법¹⁶⁾을 사용하였다.

$$\frac{q}{U_\tau} = \frac{1}{\kappa} \left\{ \ln \left[\frac{4 (1 + D_\tau y^+)^{1/2} - 1}{D_\tau (1 + D_\tau y^+)^{1/2} + 1} \right] + 2[(1 + D_\tau y^+)^{1/2} - 1] \right\} + B + 3.7 D_p \dots (2-9)$$

여기서,

- $U_\tau = (\tau_w / \rho U_b^2)^{1/2}$; friction velocity
- $y^+ = \text{Re } U_\tau y$; dimensionless distance normal to the wall
- $D_p = \nabla_p / \text{Re } U_\tau^3$; dimensionless pressure gradient
- $D_\tau = 1/2 D_p$; dimensionless shear stress gradient
- $q = (U^2 + V^2 + W^2)^{1/2}$; magnitude of velocity
- $\kappa = 0.42$; Von Karman constant
- $B = 5.45$

또 벽 근처에서의 K 와 ϵ 에 대한 경계조건은 국소적 평형에 의해 아래와 같이 된다.

$$K = \frac{U_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \epsilon = \frac{U_\tau^3}{y}$$

2.3 수치 해석

2.3.1 유한 해석해

유한해석법은 편미분방정식의 국부적인 해석해를 사용하여 대수방정식을 구하는 방법으로 면적소의 크기가 작고 그 모양이 단순할수록 비선형 방정식을 국부적으로 선형화하고 그 해석적인 해를 구하기가 용이하기 때문에 경계고정좌표계를 사용하여 등간격 격자로 변환하는 것이 필요하다. Fig. 4와 같은 사각요소 ($\Delta\xi = \Delta\eta = \Delta\zeta = 1$)에 대해 부분 포물형 지배 방정식인 식(2-8)을 국부적으로 선형화하면 다음과 같다.

$$g_p^{22} \phi_{\eta\eta} + g_p^{33} \phi_{\zeta\zeta} = 2(A_\phi)_p \phi_\zeta + 2(B_\phi)_p \phi_\eta + g \dots (2-10)$$

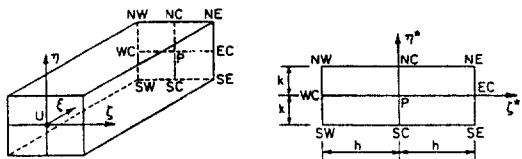


Fig. 4 Local Element

여기서,

$$g = (D_\phi)_p (\phi_p - \phi_U) + \frac{(E_\phi)_p}{\tau} (\phi_p - \phi_p^{n-1}) + (S_\phi)_p$$

이고 τ 는 시간증분이며, 시간미분 ϕ_t 와 대류항 ϕ 는 후진차분법 (backward-difference)에 의해 근사되었고, 하첨자 U는 상류점을 상첨자 (n-1)은 이전 시간을 각각 나타낸다.

식(2-10)을 좌표확장함수

$$\eta^* = \frac{\eta}{(g_p^{22})^{1/2}}, \quad \zeta^* = \frac{\zeta}{(g_p^{33})^{1/2}}$$

를 도입하여 변환하면

$$\phi_{\zeta^*} + \phi_{\eta^*} = 2A\phi_{\zeta^*} + 2B\phi_{\eta^*} + g \dots (2-11)$$

단,

$$A = (A_\phi)_p / (g_p^{22})^{1/2}, \quad B = (B_\phi)_p / (g_p^{33})^{1/2}$$

위의 방정식은,

$$\Delta \zeta^* = 1, \quad \Delta \eta^* = k = 1 / (g_p^{22})^{1/2}, \\ \Delta \zeta^* = h = 1 = 1 / (g_p^{33})^{1/2}$$

인 국소요소에 대한 경계값문제 (boundary value problem)이며 그 해석하는 Chen & Chen¹⁶⁾에 의하면 다음과 같다.

$$\phi_p = \frac{1}{1 + C_p [(D_\phi)_p + (E_\phi)_p / \tau]} \left\{ C_{NE} \phi_{NE} \right. \\ + C_{NW} \phi_{NW} + C_{SE} \phi_{SE} + C_{SW} \phi_{SW} + C_{EC} \phi_{EC} \\ + C_{WC} \phi_{WC} + C_{NC} \phi_{NC} + C_{SC} \phi_{SC} \\ + (D_\phi)_p C_p \phi_U + \frac{(E_\phi)_p}{\tau} C_p \phi_U \\ \left. - C_p (S_\phi)_p \right\} \dots \dots \dots (2-12)$$

여기서, 유한해석 계수는 다음과 같다.

$$C_{SC} = \left(\frac{e^{Bk}}{2 \cosh Bk} \right) P_A, \quad C_{NC} = e^{-2Bk} C_{SC} \\ C_{WC} = \left(\frac{e^{Ah}}{2 \cosh Ah} \right) P_B, \quad C_{EC} = e^{-2Ah} C_{WC} \\ C_{SW} = \left(\frac{e^{Ah+Bk}}{4 \cosh Bk \cosh Ah} \right) (1 - P_A - P_B) \\ C_{SE} = e^{-2Ah} C_{SW}, \quad C_{NW} = e^{-2Bk} C_{SW} \\ C_{NE} = e^{-2(Ah+Bk)} C_{SW} \\ C_p = \frac{h \tanh Ah}{2A} (1 - P_A) = \frac{k \tanh Bk}{2B} (1 - P_B) \\ P_A = 4E_2 Ah \cosh Ah \cosh Bk \coth Ah \\ P_B = 1 + \frac{Bh \coth Bk}{Ak \coth Ah} (P_A - 1)$$

$$E_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-(-1)^m (\lambda_m h)}{[(Ah)^2 + (\lambda h)^2]^2 \cosh (A^2 + B^2 + \lambda^2)^{1/2} h} \\ \lambda_m h = \left(m - \frac{1}{2} \right) \pi$$

2.3.2 전체적 압력 반복법 (Global pressure-iteration scheme)

운동량 방정식을 풀어서 속도 U, V, W 를 얻기 위해서는 먼저 압력장을 알고 있어야 한다. 이를 위해 Patankar¹⁸⁾에 의해 제안된 SIMPLER 방법을 수정하여 사용하였다.

이전의 방법에서는 진행과정중 압력방정식과 운동량방정식을 풀어서 각 위치마다의 압력을 구하였으나 이 방법은 각 전체적 반복마다 압력이 상류에서 하류로 한번만 계산이 되어 압력장의 영향은 1회의 전체적 반복시 상류쪽으로 한 위치만 전파되므로 해의 수렴이 매우 완만하게 되기 때문에 하류의 영향을 급격히 받는 급곡관에서는 그 적용에 다소 문제가 있다. 따라서, 이러한 단점을 개선하기 위해 속도장 (U, V, W) 및 난류량 (K, ϵ)은 상류에서 하류로 진행하면서 계산하고 압력만은 하류에서 상류로 계산하여 하류의 영향이 상류로 즉시 전파되는 전체적 압력 반복법을 사용하였다. 이 방법에서는 속도 및 난류량들을 구하기 위하여 전체적 진행을 하는 동안 운동량 방정식을 이전의 압력장을 사용하여 풀고 전체적 진행이 끝난 후 압력장을 타원형 문제처럼 몇번의 전체적 반복에 의해 계산하며, 이 반복계산은 출구압력 영향이 입구까지 전파될 수 있도록 하류에서 상류로 수행되어 진다.

Table 2는 본 연구의 수치해석에 대한 순서도 (Flow Chart)이다.

3. 해석결과 및 고찰

본 연구는 유한해석법을 이용하여 $Re = 40,000$, 반경비 $Rr = 2.3$ 인 사각 단면을 갖는 90° 급곡관의 난류유동장을 해석하였다.

Table 2. Flow Chart

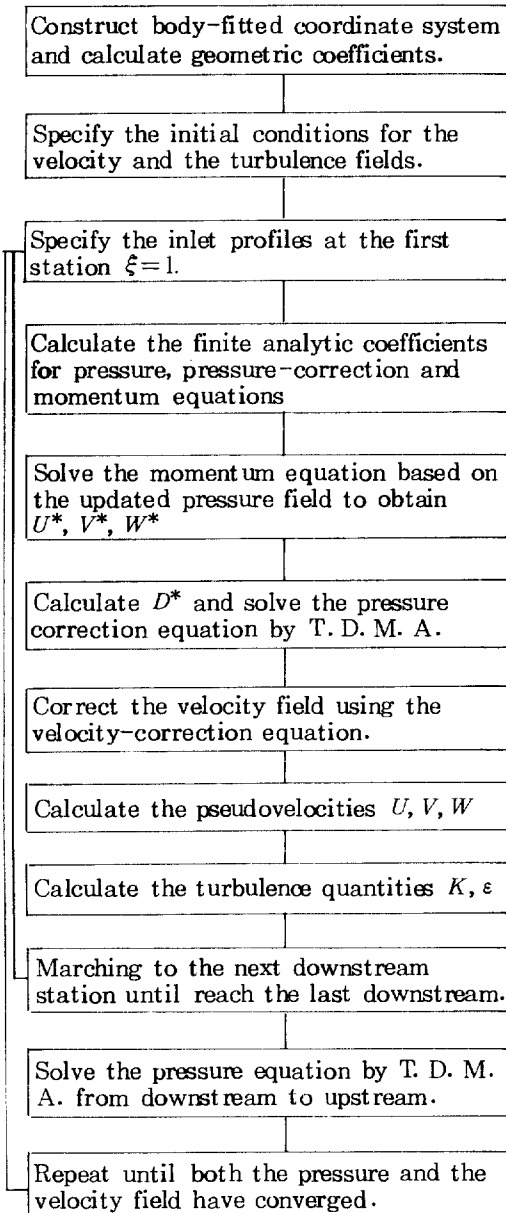


Fig. 5는 반경방향의 입력과 벽면에서의 압력분포들을 유동방향에 따라 나타낸 그림이다. 여기서 내외벽간의 압력차가 발생하며 외벽에서의 압력이 내벽에서의 압력보다 전영역에 걸쳐 크게 나타난다. 또한 상류에서는 내벽 근처에서는 주 유동방향의 순압력구배와 외벽 근처에서 역압력구배가 발생하나 하류에서는 반

대현상이 나타난다. 이와 같이 내외벽면의 압력과 압력구배가 다른 이유는 곡관의 곡률로 인한 유선의 곡률에 의한 원심력에 기인된 것이다. 주유동방향 압력구배 및 반경방향 압력구배를 고찰하므로써 유동을 간접적으로 예측할 수 있다. 하류로 갈수록 전체적으로 압력이 감소하는데 이는 관벽에서 압력손실이 발생하기 때문이다. 본 연구의 수치해석결과가 더 작게 예측하고 있으나 평균압력의 변화가 실험결과⁴⁾와 거의 일치하여서 해석상 압력변화의 예측이 크게 잘못되지 않았다는 것을 간접적으로 나타내 주고 있다.

Fig. 6은 본 연구에서 입구조건으로 사용한 주유동 방향 속도 U 와 반경방향 속도 V 의 등속선으로 Humphrey et al.⁴⁾의 실험치를 사용하였다. 속도 U 의 분포를 보면 내벽근처에서 주 유동방향의 순압력구배에 의해 유체가 가속되며 외벽 근처에서는 역압력구배에 의해 유체가 감속되어 고속유체들이 내벽근처로 약간 치우쳐 위치하고 있다. 따라서 내벽근처에서는 속도구배가 급하게 되고 외벽근처에서는 완만한 속도구배가 나타난다. 이와 같이 곡관에 유입되는 유동에 영향을 미치는 주 유동방향 압력구배는 곡률효과로 인한 원심력과 반경방향 압력구배가 서로 평형을 이루려는 일련의 결과로써 발생하게 된다. 곡관 입구에서 반경방향속도 V 는 내외벽간의 압력차로 인하여 주 유동방향속도 U 에 비해 작지만 전체적으로 음(-)의 값을 갖는다. Fig. 7은 $\theta=45^\circ$ 단면에서 주 유동방향속도 U 를 나타낸 것으로, (a)는 Humphrey et al.⁴⁾의 실험결과를, (b)는 본 연구에서 부분 포물형 방정식에 의해 수행한 결과를, (c)는 Humphrey et al.⁴⁾의 타원형 방정식을 사용하여 구한 결과를 각각 나타내며 속도 U 의 분포는 입구에서와 거의 유사한 경향을 보이나, 입구근처에서와 같은 경향의 주 유동방향 압력구배 영향으로 미소하나 마 변형이 일어나 내벽근처에서 더욱 가속되었으며, 또한 미소하지만 곡률로 인한 원심력과 반경방향 압력구배의 불균형으로 생성되는 2차 유동이 발생하기 시작하였다. Fig. 8, Fig. 9는 $\theta=71^\circ, 90^\circ$ 단면에서의 주유동방향 속도

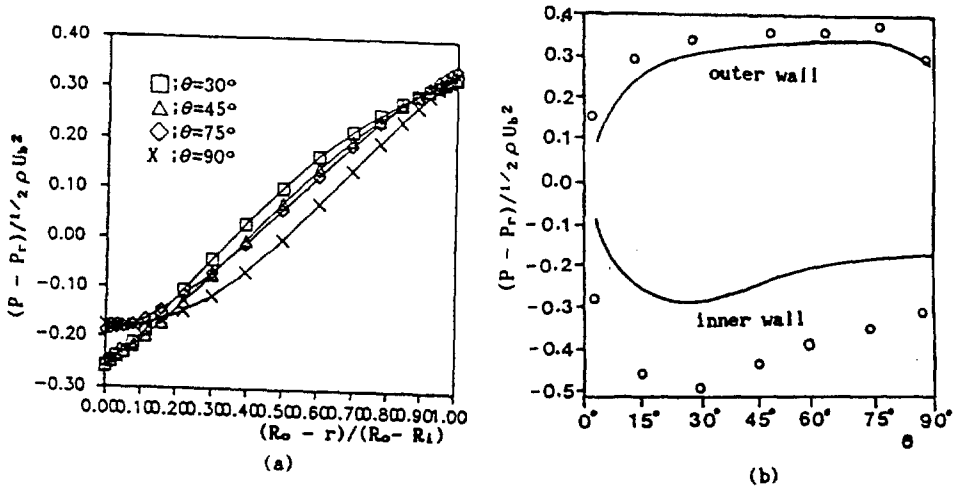


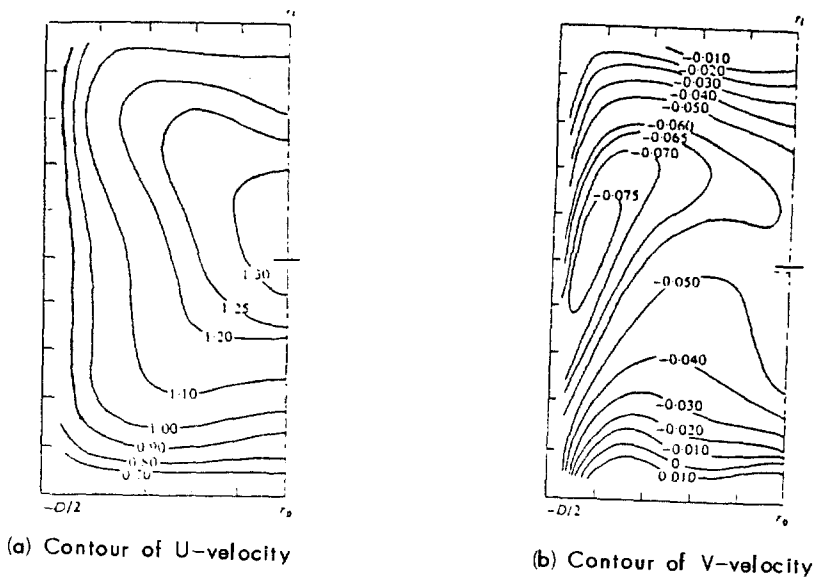
Fig.5 Mean static pressure distribution in the strongly 90° square-sectioned curved duct.

(a) radial static pressure

(b) wall static pressure

oooo; measured by humphrey et al.⁴⁾

—; calculated by F.A.M.



(a) Contour of U-velocity

(b) Contour of V-velocity

Fig.6 Inlet Condition ($\theta = 0^\circ$)

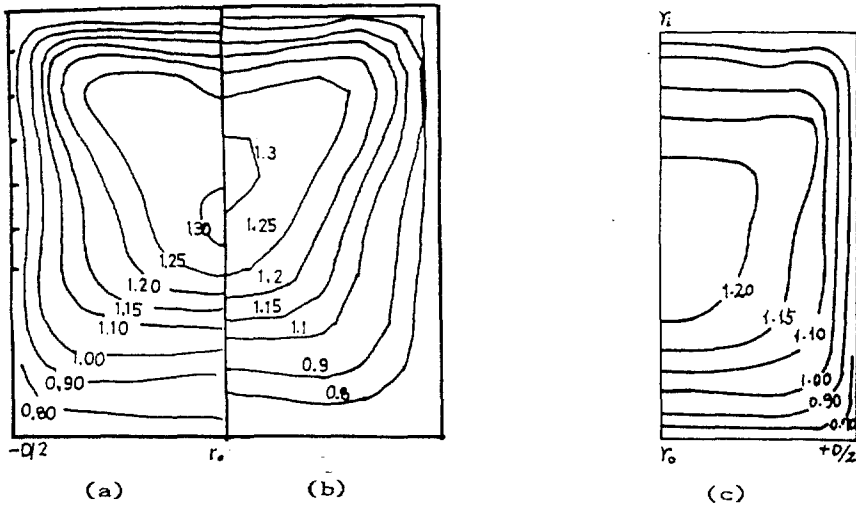


Fig.7 Contour of U-velocity at $\theta=45^\circ$
 (a) measured by Humphrey et al.³⁷
 (b) present calculation(F.A.M)
 (c) elliptic calculation(F.D.M)

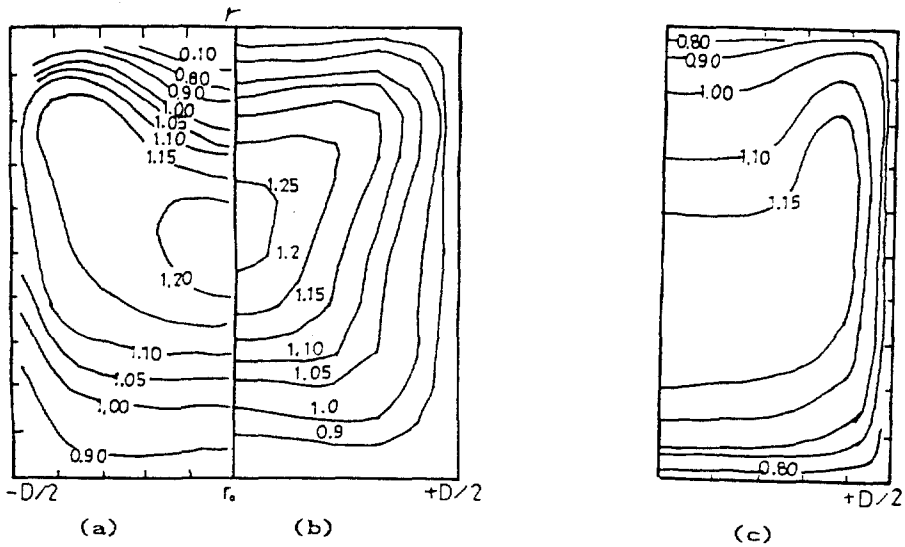


Fig.8 Contour of U-velocity at $\theta=71^\circ$
 (a) measured by Humphrey et al.³⁷
 (b) present calculation(F.A.M)
 (c) elliptic calculation(F.D.M)

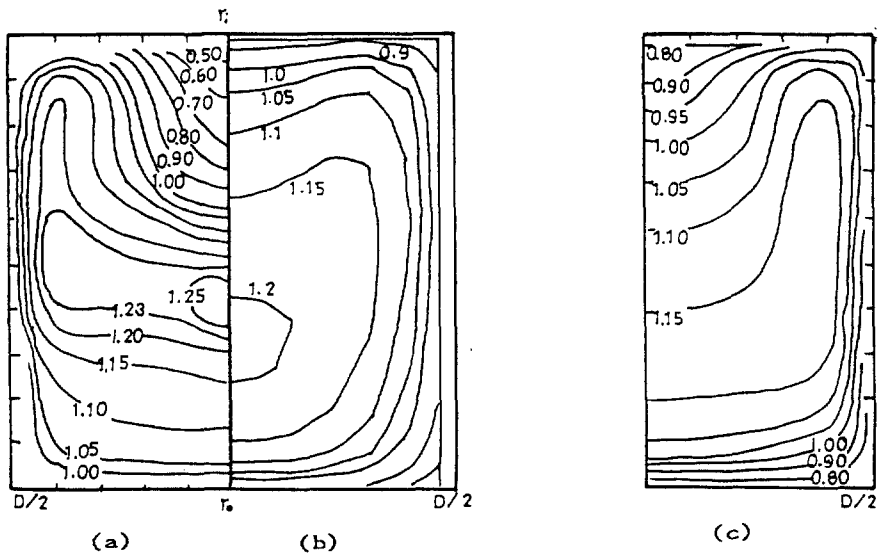


Fig.9 Contour of U-velocity at $\theta=90^\circ$
 (a) measured by Humphrey et al.³⁾
 (b) present calculation(F.A. M)
 (c) elliptic calculation(F. D. M)

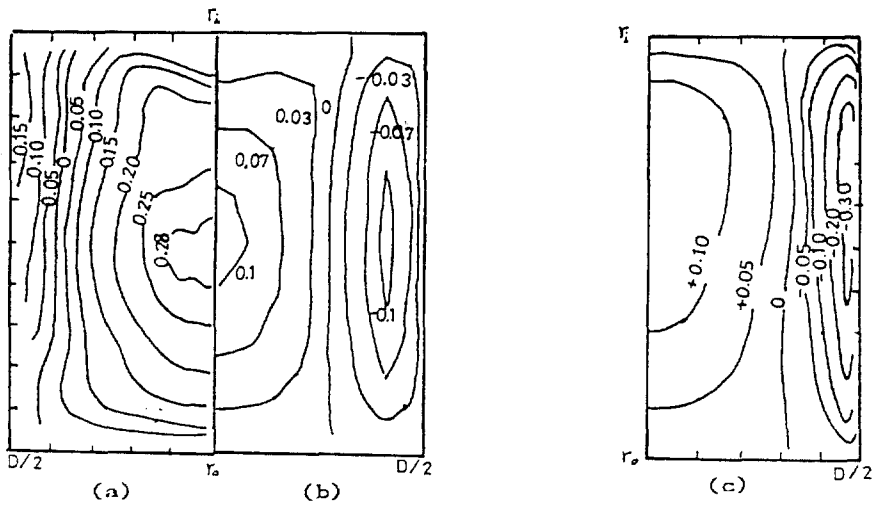


Fig.10 Contour of V-velocity at $\theta=90^\circ$
 (a) measured by Humphrey et al.³⁾
 (b) present calculation (F.A. M)
 (c) elliptic calculation (F. D. M)

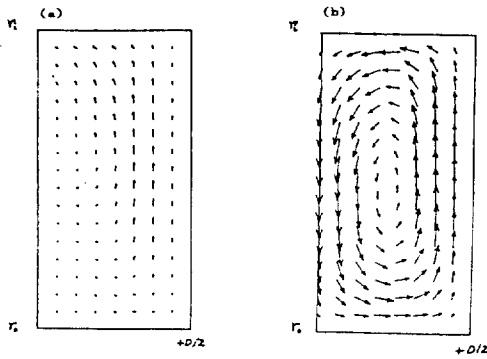


Fig. 11 Illustration of secondary flow pattern in curved duct
 (a) $\theta=4^\circ$ (b) $\theta=90^\circ$

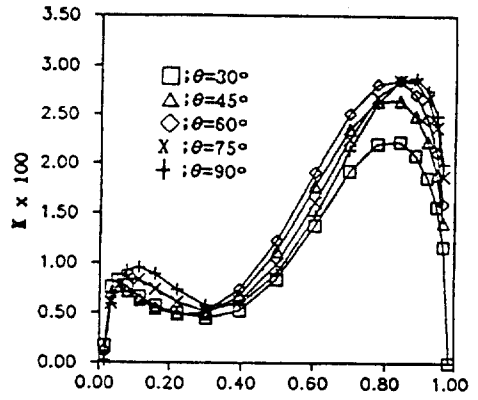


Fig. 12 Turbulent kinetic energy at symmetry plane

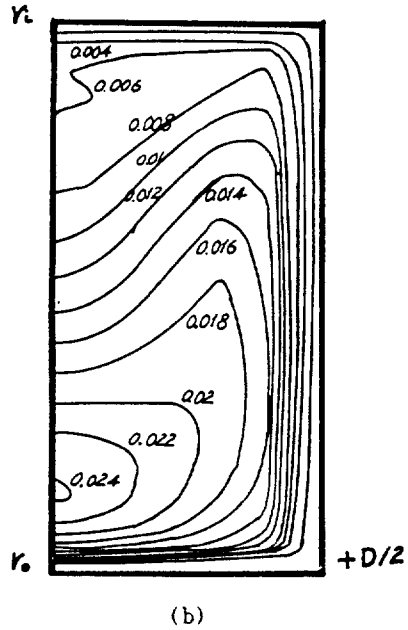
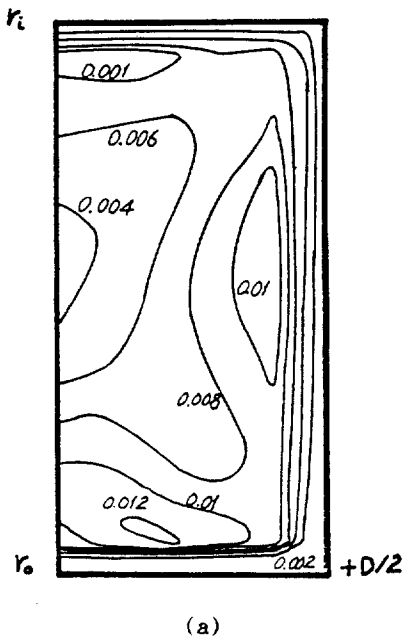


Fig. 13 Contour of Turbulent kinetic energy
 (a) $\theta=4^\circ$ (b) $\theta=90^\circ$

U 를 나타낸 것으로 출구에서 강한 2차 유동의 결과로 변형이 일어나 입구 및 $\theta=45^\circ$ 에서와 그 경향이 다른 속도 U 의 분포가 나타났다. 즉 속도 U 의 급격한 구배는 곡관입구에서와는 반대로 내벽 근처에서 점차 약해져 외벽 근처로 이동하며, 그 결과로 고속유동이 외벽을 향해 이동하고 내벽 근처에서는 저속유체가 축적되고 있다. $\theta=71^\circ$ 에서의 속도 U 의 분포를 보면 고속유체들이 유동중심부로 이동하였으며, 내벽 근처에서 속도구배의 변화가 발생하여 내벽 근처에서 완만해지고 상대적으로 외벽 근처에서 급하게 되어 양쪽 벽 근처에서 비슷한 속도구배가 되었다. 즉 전단효과와 관성효과가 서로 평형을 이루어 직관 내에서의 유동과 비슷한 경향을 보이고 있다. 그러나 $\theta=90^\circ$ 에서는 곡률로 인한 관성효과가 크게 작용하여 고속유동이 외벽 근처로 이동하였으며, 내벽에서는 완만하고 외벽에서는 급격한 속도구배가 형성되었다. 따라서 출구 근처에서는 고속유동이 외벽으로 치우쳐 외벽 근처에서 유체가 가속되는 유동 편중현상이 강하게 발생하고 있다는 것을 알 수 있다. $\theta=45^\circ$ 에서는 실험 결과와 본 연구에서 수행한 수치해석 결과가 비교적 잘 일치하고 있고, 타원형 방정식에 의한 결과는 내벽 코너부근으로의 bulging 효과가 아주 미약하게 나타나고 전체적인 속도 크기가 작게 나타났으나 본 연구에서 수행한 수치 해석 결과에서는 bulging 효과가 잘 나타나 있고 정성적으로도 비교적 잘 일치하고 있다. $\theta=71^\circ, 90^\circ$ 에서는 경향은 유사하나 실험결과보다 약 8%, 12% 정도 더 크게 예측하고 있다. Fig. 10은 출구에서의 반경방향 속도 V 의 등속선을 나타낸다. 2차 유동을 나타내는 속도 V 의 경향은 유사하나 실험값 보다 더 작게 예측되고 있는데, 이는 난류 모델의 부정확성과 벽면 처리의 미숙 때문으로 생각된다. Fig. 11(a)와 Fig. 11(b)는 각각 곡관 입구와 출구에서의 2차 유동에 대한 벡터 선도이다. 그림에 나타난 것과 같이 입구에서는 2차 유동이 매우 미약하지만 출구에서는 곡관의 1/2 단면에서 강한 회전운동을 보이고 있다. 즉 대칭면 근처에서 유체는 원심

력이 강하게 작용하여 고속 유체가 외벽 근처로 밀려가서 외벽을 따라 측벽으로 이동하며 측벽 근처에서는 내외벽간의 압력차에 의해 외벽으로부터 측벽을 따라 내벽 근처로 강하게 이동하게 된다. 그리고 연속성에 의해 내벽 근처의 저속유체가 대칭면 근처로 움직이게 된다.

Fig. 12는 대칭단면에서의 난류 운동에너지가 유동방향에 따라 나타낸 그림이며 볼록한 곡률에 의한 내벽에서 난류의 안정효과는 난류강도를 감소시키며, 오목한 곡률에 의한 외벽에서 난류의 불안정한 효과는 이를 증가시켜 외벽의 난류에너지가 내벽에 비해 상대적으로 크게 된다. 그림에서 나타난 난류에너지 분포는 Pourahmadi et al.⁷⁾이 2차원 급곡관에 대해 계산한 결과와 비슷한 형상을 나타내고 있다.

Fig. 13(a)와 (b)는 곡관 입구와 출구에서의 난류 운동에너지를 나타낸 것으로 외벽의 난류에너지가 내벽에 비해 상대적으로 크게 나타났다. 단면내의 2차 유동은 레이놀즈 응력의 강한 대류를 유발시켜 고위 난류 에너지를 갖는 유체를 상대적으로 불안정한 외벽에서 내벽으로 측벽을 따라 전송하면서 부분적으로 측벽에 고위 난류에너지를 발생시키며 또한, 내벽 근처의 저위 난류에너지를 갖는 유체를 대칭면을 따라 유동 중심부로 이동시킨다. 즉 이와 같이 2차 유동은 내벽과 외벽 사이에 난류에너지를 상호 교환시켜 내외벽간 안정효과와 불안정효과의 상호 작용을 유발시키며 이에 의한 강한 비등방성 응력 상태가 곡관내에 발생하게 된다.

이상에서 고찰한 바와 같이 부분포물형 방정식에 의한 해석은 71° 까지는 타원형 방정식에 의한 결과보다 그 경향이 잘 맞으나 곡관 출구에서의 반경방향 속도의 값은 실험치의 40~60% 정도로 매우 작게 계산되었으며, 주유동 방향 속도 U 의 변형이 크게 일어나지 않아 오히려 좋지 않았다. 이는 본 해석에 사용한 $K-\epsilon$ 난류모델이 2차 유동의 변화를 정확히 예측하지 못하였기 때문으로 생각되며, 그 원인으로는 레이놀즈응력을 모델화하는데 사용된 Boussinesq 근사가 곡관내의 복잡한

3차원 응력상태를 정확히 묘사해 주지 못하고 단지 그 체적특성의 파악에 그친 점과, $K-\epsilon$ 모델에는 주유동 방향의 곡률변화에 따른 와점성계수의 수정이 포함되지 않은 점, $K-\epsilon$ 모델 자체가 난류점성계수의 등방성을 가정하고 유도된 모델이나 실제로 곡관내의 유동은 주유동방향과 반경 방향의 난류점성계수의 값이 큰 차이를 보이는 강한 비 등방성 유동인 점을 들 수 있으며, 이러한 $K-\epsilon$ 모델의 결함은 정확한 실험에 의한 $K-\epsilon$ 모델의 수정 또는 A. S. M과 같은 고차원 난류모델의 적용에 의해 극복되리라 생각된다.

4. 결 론

본 연구에서 유한해석법과 부분포물형 방정식을 사용하여 사각 단면을 갖는 90° 급곡관내 난류유동을 해석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 단면이 사각형인 90° 급곡관내 난류유동을 부분포물형 방정식을 사용하여 수치해석한 결과 실험치와 유사한 경향을 보이고 있다.
- (2) 90° 급곡관에서 곡률에 의한 입구의 전단효과가 입구로부터 $\theta=45^\circ$ 까지 현저하게 지배하며 출구 근처에서는 관성효과가 더 크게 작용하여 2차 유동이 강하게 발생하고 고속 유체들이 외벽근처로 치우쳐 외벽근처에서 유체가 지속되는 유동편중현상이 강하게 나타났다.
- (3) 본 연구에서 사용한 전체적 압력반복법은 기존의 방법보다 계산시간을 감소시킬 수 있어 경제적인 algorithm으로 생각된다.
- (4) 곡관에서는 강한 비등방성 유동이 발생하고 벽면 근처에서 난류량들이 변화가 심하므로 표준 $K-\epsilon$ 난류모델 및 벽면함수의 수정과 보다 정확한 압력출구 조건이 필요하며, 이를 위하여 RSM, ASM 난류모델 및 PSL법 등의 다각적인 검토가 요구되어진다.

참 고 문 헌

1. A.J. Ward Smith, 1971, "Pressure losses in duct flow" Butterworths, London.
2. V.S. Platap, 1975, "Flow and heat transfer in curved duct" Ph.D. Ethesis, Imperial College.
3. J.A.C. Humphrey and A.M.K. Taylor and J.H. Whitelaw, 1977, "Laminar flow in square duct of strong curvature" J. Fluid Mech., Vol. 83, part 3.
4. J.A.C. Humphrey and J.H. Whitelaw and G. Yee., 1981, "Turbulent flow in a Square duct with strong curvature" J. Fluid Mech., Vol. 103.
5. A.M.K.P. Taylor and J.H. Whitelaw and M. Yianneskis., 1982, "Curved ducts with strong secondary motion: Velocity measurements of developing laminar and turbulent flow" Transaction of the ASME. Vol. 104.
6. I.A. Hunt & P.N. Jourbert, 1979, "Effect of Small streamline curvature on turbulent duct flow" J. Fluid Mech., Vol. 91.
7. F. Pourahmadi & J.A.C. Humphrey, 1983, "Prediction of Curved Channel Flow with an Extended $K-\epsilon$ Model of turbulence" AIAA Journal Vol. 21, No. 10.
8. L.B. Ellis & P.N. Jourbert, 1974, "Turbulent shear flow in curved duct", J. Fluid Mech., Vol. 62, part 1.
9. K.N. Ghia and J.S. Sokhey, 1977, "Laminar Incompressible viscous flow in curved ducts of rectangular cross-sections" Transactions of the ASME.
10. Robert. S. Barlow and James. P. Johnston, 1985" Structure of turbulent boundary layers on concave surface" Report MD-47 Stanford Univ. August.
11. P.H. Hoffmann and K.C. Muck and P. Bradshaw, 1985, "The effect of concave surface curvature on turbulent boundary layers" J. Fluid Mech., Vol. 161.
12. Ronald M.C. So and George L. Meller,

- 1973," Experimental on convex curvature effects in turbulent boundary layers" J. Fluid Mech. Vol. 60, part 1.
13. K.C. Muck, P.H. Hoffmann and P. Bradshaw., 1985, "The effect of convex surface curvature on turbulent boundary layers" J. Fluid Mech., Vol. 161.
 14. 맹주성, 신종균, "근사직교 경계 고정곡선 좌표계를 사용한 수치적 격자생성", 대한기계학회 논문집, 제12권 제13호, 1988.
 15. B.E. Launder & D.B. Spalding, 1973, "The Numerical Computation of Turbulent Flows", Comp. Meth. for App. Mech. & Eng., Vol. 3.
 16. H.C. Chen & V.S. Patel, 1985, "Calculation of trailing-edge and wake flow by a time-marching solution of the partially-parabolic equations" IIHR Report No. 285, The Univ. of Iowa.
 17. C.J. Chen & T.H. Yoon & C.H. Yu, 1983, "The Finite Analytic Method" IIHR Report No. 232-VI, The Univ. of Iowa.
 18. S.V. Patankar, 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow" Hemisphere Publishing Co.