Journal of the KSQC
Vol. 19, No. 1, June. 1991

1991년 6월 韓國品質管理學會誌 제19권 제1호

다단계 기계수리문제의 (S−1, S) 예비품 재고정책에 관한 연구

An (S−1, S) Spare-Part Inventory Model for Multi-Stage Machine Repair Problem

徐 容 成*
鄭 尙 煥*
朴 永 宅*

ABSTRACT

This paper deals with an (S−1, S) spare-part inventory model for multi-stage machine repair problem with attrition. The steady-state availability of the system is maximized under some constraints such as total cost, available space etc.. The problem is formulated as a closed queueing network and the system availability is calculated by Buzen's computational algorithm. In order to find the optimal numbers of spare units and repair channels for each operating stage, the problem is formulated as a non-linear integer programming(NLIP) problem and an efficient algorithm, which is a natural extension of the new Lawler-Bell algorithm of Sasaki et al., is used to solve the NLIP problem. A numerical example is given to illustrate the algorithm.

* 成均館大學校 產業工學科

1. 서　론

1.1 문제설명 및 연구배경

예비품 재고문제가 본격적으로 연구되기 시작한 것은 2차 세계대전 중 복잡해진 군용장비의 운용효율성을 제고할 필요성 때문이었다. 예비품 재고정책에 관한 중요한 부분 중 하나는 (S−1, S) 방식의 운용정책인데, 이러한 방식은 항공기의 부품과 같은 고가의 예비품관리에 유용하다고 알려져 왔다. Sherbrooke(1968)와 Schrady(1967)는 총 투자자본의 50%~60%가 수리가능한 부품이 차지한다고 추정하였다. 예비품 재고는 총 투자자본 중 차지하는 비율이 크므로 이에 대한 고려가 필요하다. 그러나 지금까지 연구되어온 예비품 재고정책에서는 고장난 부품은 모두 수리가능(혹은 모두 수리불가능)하다는 상당히 제한적인 가정을 하고 있다.

본 연구에서는 유한모집단 예비품 재고관리 문제에서 기존의 연구들 보다 현실성을 더욱 반영할 수 있도록 고장난 부품의 일부는 수리가능하고, 나머지는 수리불가능한 경우의 (S−1, S) 재고정책을 다루고자 한다. 본 연구에서 고장난 부품 모두 수리가능(;p=1)하다고 하면 Koenigsberg(1960)의 전통적인 수리공문제(repairman problem)가 되며, 고장난 부품 모두가 수리불가능(;p=0)하다고 하면 Park(1981)의 장비군 운용을 위한 (S−1, S) 정책이 된다.

1.2 기존연구 고찰 및 연구범위 설정

예비품 재고관리에 관한 기존의 연구들은 대부분이 무한모집단을 대상으로 하였는데, 그 중 대표적인 연구들은 다음과 같다. Schrady(1967)는 조달과 수리기능의 상호작용을 고려해 준 확정적 모형(deterministic

<table>
<tr><th rowspan="2">모집단</th><th colspan="2">고　　장</th><th colspan="3">수　　리</th></tr>
<tr><th>확정적</th><th>확률적</th><th colspan="2">수리형태</th><th>수리창구</th></tr>
<tr><td rowspan="2">무 한</td><td>Schrady(1967)</td><td>–</td><td>무한 수리율</td><td rowspan="2">확정적 수리시간</td><td rowspan="4">무 한</td></tr>
<tr><td>Nahmias(1979)</td><td>Allen & D'Esopo (1968) Simon & D'Esopo (1971)</td><td>유한 수리율</td></tr>
<tr><td>유 한</td><td rowspan="3">–</td><td>Richards(1976)</td><td colspan="2" rowspan="3">확률적 수리시간</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Park(1981)</td></tr>
<tr><td>Albright & Soni (1984) Koenigsberg(1960)</td><td>유 한</td></tr>
</table>

그림 1. 수리가능한 예비품재고문제의 기존연구에 대한 분류

model)을, Nahmias(1979)는 유한한 수리율을 가지는 확정적 모형을 연구하였다. Allen과 D'Esopo(1968)는 고장은 확률적이나 수리시간은 일정하다고 가정한 연속검토 재고모형(continuous-review model)을 다루었으며, Simon과 D'Esopo(1971)는 Allen과 D'Esopo에 의해 만들어진 가정을 완화하여 보유재고(stock on hand)와 기대부재고(expected stock back-order)의 안정상태분포(stationary distribution)에 대한 정확한 표현을 도출하였으며, 또한 Richards(1976)는 확률적 조달기간(random lead time)을 갖는 모형을 연구하였다. 이상의 연구들은 수요특성이 시스템의 상태와는 무관한 무한모집단을 대상으로 한 것이었으나, Albright와 Soni(1984)는 유한모집단 예비품 재고문제의 몇 가지 성질들을 유도하였다. 이전의 수리가능한 예비품 재고정책에 관한 연구분야에 대한 분류는 그림 1과 같다.

본 연구에서는 유한모집단을 갖는 2계(two-echelon) 재고시스템을 고려하였는데, 그림 1에서 Park(1981)과 Koenigsberg(1960)의 혼합모형으로 무한수리창구와 유한수리창구를 각각 1개씩 갖는 시스템의 최적재고정책을 연구대상으로 하였다.

2. 문제의 정식화

전통적인 기계수리문제(machine repair problem) 또는 수리공문제(repairman problem)에서는 m대의 동일한 기계와 이들의 원활한 작동을 돕기 위해 x대의 기계를 동시에 수리할 수 있는 능력을 갖춘 수리창구 및 (y−m)대의 예비기계들로 구성된 병렬시스템에 관한 안정상태가용도(steady-state availability)를 최대화시키기 위해, 주어진 제약조건하에서 최적 수리창구와 예비기계의 댓수를 결정하게 된다(Ahn 1980, Barlow 1962, Barlow and Proschan 1965, Taylor and Jackson 1954, Wahi 1966).

기존의 연구는 대부분 무한모집단(infinite source)과 무한한 수리창구(ample service)의 가정을 하였다. 무한한 수리창구의 가정으로 인해, 이러한 모형에서 의사결정변수는 단지 예비기계 댓수이므로, 예비기계와 수리창구 사이의 상호절충(trade-off)이 필요없었다. 예외적으로 Gross등(1983)은 유한한 모집단의 작동기계와 2계(2-echelon) 수리시스템을 가정하였고, 의사결정변수인 예비기계댓수와 수리창구를 결정하기 위한 최적화 기법은 선형비용 함수를 가지고 설명하였다.

본 연구에서는 다단계 기계수리문제(multi-stage machine repair problem)의 가용도를 최대화할 수 있도록, 각 단계별로 수리창구와 예비기계 댓수를 동시에 결정해 주기 위하여 다단계 직렬시스템의 기계수리문제를 비선형 정수계획법으로 정식화하고, 이를 효율적으로 풀 수 있는 최적화 기법을 제시하고자 한다.

본 연구에서 사용한 가정은 다음과 같다:

(i) 각 단계들은 직렬구조로 연결되어 있다.

(ii) 재고조달은 (S−1, S) 재고정책에 의해 운용된다.

(iii) 원활한 기계작동을 위하여 각 단계마다 예비기계와 수리창구들이 제공된다.

(iv) 기계 고장시간, 수리시간 및 외부조달시간은 지수분포를 따른다.

(v) 수리는 완전하다.

본 연구에서 사용된 기호는 다음과 같다.

m_j j 단계의 가동기계댓수,

x_j j 단계의 수리창구의 수,
y_j j 단계의 총 기계댓수,
$A_j(x_j, y_j)$ j 단계의 안정상태 가용도,
c_{1j} c_{2j} j 단계의 수리창구와 기계의 단위 당 비용,
s_{1j} s_{2j} j 단계의 수리창구와 기계의 단위 당 비용,
C 비용의 상한치,
S 제약공간의 상한치,
k 단계의 수,
P_n n 개의 기계가 가용할 안정상태 확률.

본 연구에서 다루는 시스템의 한 단계만 분리해서 보면, 그림 2에서와 같은 폐회로망(closed network)과 같다. 이 회로망은 U(작동), R(수리시설) 및 D(외부조달시설)의 3개의 창구(node)를 가지게 된다.

그림 2에서와 같이 시스템은 (y−m)대의 예비기계를 가지고 m대의 기계가 작동하다가 기계가 고장시 수리가능한 경우는 창구 R로 가서 수리를 완료한 후에 창구 U로 되돌아가며, 수리불가능한 경우는 즉시 보충발주(; 창구 D에 해당)를 하게 된다. 여기서 모수 α는 수리가능한 고장의 발생확률을 나타내며, 창구 R과 D에서 머무르는 시간은 수리시간과 외부조달시간으로, 평균수리율과 조달율은 μ_R과 μ_D에 의해 표시된다.

전통적인 기계수리문제에 관한 연구 및 이를 일반화시키기 위한 기존의 연구들에 있어서는 그림 2와 같이 기계의 작동단계는 한 단계이며, 모든 기계들은 동일한 작업을 한다는 것을 가정하고 있다. 그러나 일련의 기계들이 작업의 진행에 따라 각기 다른 작업을 하고 있는 생산라인에서와 같이 여러 대의 기계들이 다단계 직렬시스템을 이루고 있는 경우가 적지 않다. 일련의 기계들로 구성된 다단계 직렬시스템의 확률모형은 그림 3과 같이 그림 2와 같은 부시스템(subsystem)이 직렬로 연결되어 있는 모형이다.

본 연구에서 다룰 다단계 직렬시스템의 ···

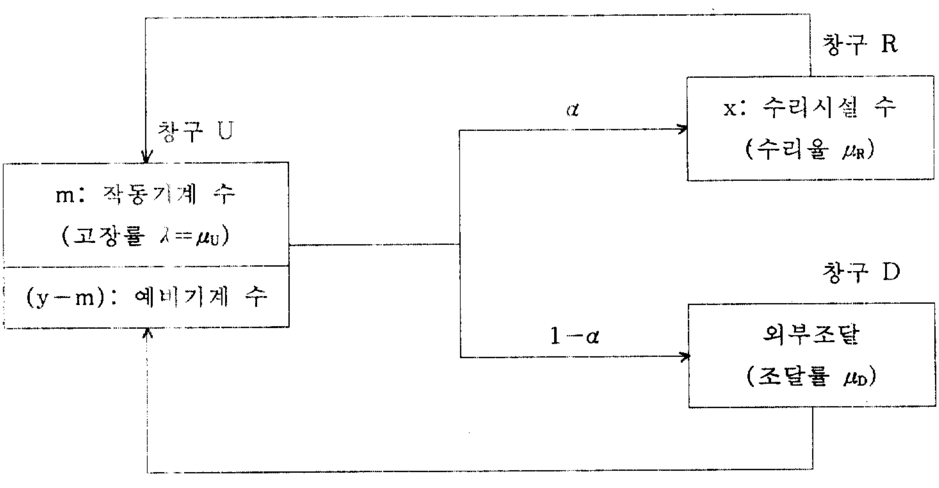

그림 2. 수리가능한 시스템의 확률 모형

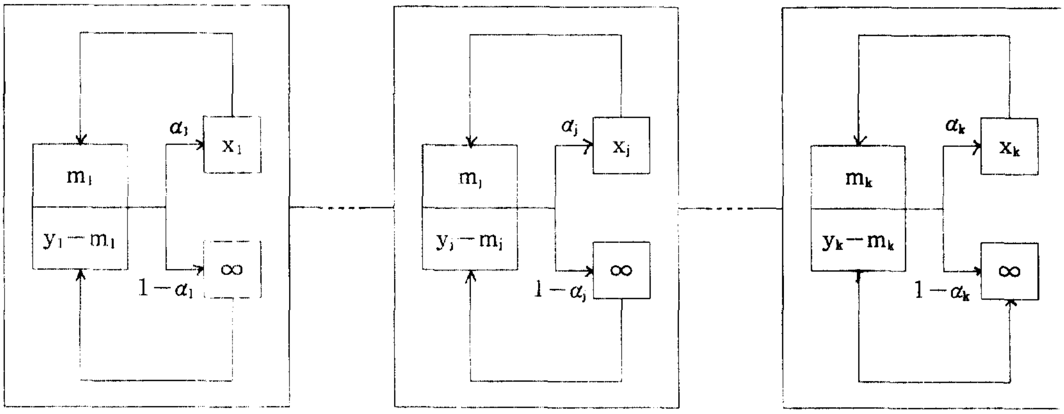

그림 3. 수리가능한 다단계 직렬 시스템의 확률 모형

계수리문제는 다음의 비선형 정수계획문제로 정식화할 수 있다.

$$\text{Maximize } fo(X, Y) = \prod_{j=1}^{k} A_j(x_j, y_j) \quad \cdots\cdots(2.1)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{k}(c_{1j}x_j + c_{2j}y_j) \le C \quad \cdots\cdots(2.2)$$

$$\sum_{j=1}^{k}(s_{1j}x_j + s_{2j}y_j) \le S \quad \cdots\cdots(2.3)$$

$$x_j \le y_j(\ ;\ j=1, 2, \cdots, k) \quad \cdots\cdots(2.4)$$

변수 x_j, y_j는 최적화 알고리즘에 의해 구해야 할 의사결정변수이고, 목적함수 (2.1)식의 안정상태가용도 $A_j(x_j, y_j)$는 폐회로대기망(closed queueing network)의 이론을 이용한 Buzen(1973)의 알고리즘을 통해 구할 수 있다. 식 (2.4)는 수리창구의 갯수가 총 기계댓수 보다 클 필요가 없다는 것을 나타낸다.

본 연구의 경우, 설명을 위하여 (2.2), (2.3)식과 같은 제약조건을 고려하였으나, 제약식의 좌변이 단소 비감소함수이면 어떤 형태의 제약식이 추가되더라도 무방하다.

3. 최적해 결정절차

3.1 안정상태가용도 계산

그림 2에서 각 창구에 체류하는 시간이 지수분포라고 가정하였으므로, Jackson network의 일종이다(Jackson 1957, 1963). 이러한 특수한 경우는 품목이 시스템내에 들어오거나, 나가는 경우가 없이 단지 망(network)내에서 순환되는 폐회로 대기망이다. 폐회로망에서의 고객의 안정상태확률은 Gordon과 Newell (1967)에 의해 표현되어 졌다. Buzen(1973)은 Gordon과 Newell에 의해 표현된 안정상태확률의 계산식을 2차원 벡터의 반복적인 기법을 사용하여 계산절차를 단순화하였다. 본 연구에서는 Buzen의 개념을 사용해서 폐회로망의 안정상태가용도를 계산하기로 한다.

식 (2.1)에서 j단계의 안정상태 가용도 $A_j(x_j, y_j)$를 규정된 기계 이상 작동할 확률로 정의한다면, 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$\sum_{n=m_j}^{y_j} P_n \quad \cdots\cdots(3.1)$$

또한 평균 기계작동댓수에 대한 비율로 나타내면 가용도는 다음과 같다:

$$\sum_{n=1}^{m_j-1} [n/m_j] P_n + \sum_{n=m_j}^{y_j} P_n \quad \cdots\cdots(3.2)$$

본 연구에서는 후자의 경우를 써서 안정상태가용도를 구하기로 한다.

3.2 최적해 결정

수리창구(x) 및 총기계댓수(y)가 지정될 경우 목적함수 (2.1)식은 부록에 소개한 Buzen의 절차에 의해 계산할 수 있다. 의사결정변수는 정수값이 되어야 하므로, 최적화 알고리즘을 위해 열거이론(implicit enumeration theory)을 사용할 수 있다. 문제가 비선형정수계획문제(NLIP)로 정식화되므로, 그런 문제를 풀기 위한 효과적인 방법이 필요하다. 이러한 문제는 Lawler-Bell(1966) 알고리즘에 의해 해결할 수 있으나, LB(Lawler-Bell) 알고리즘은 모든 변수들을 2진(binary) 변수들로 바꾸어 주어야 한다. 이를 피하기 위하여 Sasaki 등(1977)은 NLB(New Lawler-Bell) 알고리즘을 개발하였다. 본 연구에서는 (2.4)식과 같이 변수 상호간에 대소관계가 성립한다는 특수한 성질을 활용한 Park(1989)의 수정된 NLB 알고리즘을 사용하면 보다 효과적으로 최적해를 결정할 수 있다. Park(1989)의 알고리즘은 이미 발표된 바 있으므로, 여기서는 설명을 생략하기로 한다.

4. 수치 예

다음 문제의 안정상태가용도를 계산하기 위해 필요한 정규화 상수(normalizing constant)를 계산하기 위해 부록에 소개한 Buzen의 절차를 사용하고, 최적해를 얻기 위해 Park(1989)의 수정된 NLB 알고리즘을 사용하기로 한다.

본 연구의 수치예제로서 그림 2와 같이 3개의 창구가 있고, 요구되는 작동기계의 수가 m_j개 있는 부시스템이 직렬로 연결되어 있는 2단계 직렬시스템문제를 고려하고자 한다. (2.1)~(2.4)식의 계수 및 우변 상수값이 다음과 같다고 하자.

$$(c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}) = (10, 10, 30, 20)$$
$$(s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}) = (0, 0, 4, 3)$$
$$(C, S) = (180, 19)$$

이 수치를 (2.1)~(2.4)식에 대입하면 다음 NLIP식을 얻는다.

$$\text{Maximize } fo(X, Y) = \prod_{j=1}^{2} A_j(x_j, y_j) \quad \cdots\cdots(4.1)$$

subject to

$$10x_1 + 10x_2 + 30y_1 + 20y_2 \le 180 \quad \cdots\cdots(4.2)$$
$$4y_1 + 3y_2 \le 19 \quad \cdots\cdots(4.3)$$
$$x_1 \le y_1 \quad \cdots\cdots(4.4)$$
$$x_2 \le y_2 \quad \cdots\cdots(4.5)$$
$$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \{0, 1, 2, \cdots\cdots\}$$

또한 각 단계별 작동기계 댓수(m_j) 및 고장률(μ_{Uj}), 수리율(μ_{Rj}), 조달률(μ_{Dj})이 다음과 같다고 하자.

$$(m_1, m_2) = (2, 1)$$
$$(\mu_{Rj}, \mu_{Dj}, \mu_{Uj}) = (0.1, 0.1, 0.05) \quad (;\ j=1, 2)$$
$$(\alpha_1, \alpha_2) = (0.5, 0.5)$$

안정상태가용도 $A_j(x_j, y_j)$를 구하기 위해, 이 값들을 부록의 식 (A.2)~(A.9)와 (3.2)식에 대입하면 다음과 같이 구할 수 있다.

문제에 대한 j 단계의 추이행렬(transition matrix) P_j는 다음과 같다.

$$P_j = \begin{array}{c} \\ R \\ D \\ U \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R & D & U \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha_j & 1-\alpha_j & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (;\ j=1,\ 2)$$

부록의 식 (A.2)에서 P_{ij} 대신에 위의 추이행렬 P_j를 사용하면 다음 식이 나타난다.

$$\mu_R w_R = \mu_U w_U \alpha_j$$
$$\mu_D w_D = \mu_U w_U (1-\alpha_j)$$
$$\mu_U w_U = \mu_R w_R + \mu_D w_D \qquad (;\ j=1,\ 2)$$

위 연립방정식의 해는 방정식이 항상 중복(redundant)이기 때문에 임의로 $w_U=1$로 설정하여 풀면 w_i(;i=U, R, D) 값은 다음과 같다.

$$w_R = \frac{\mu_U \alpha_j}{\mu_R}, \quad w_D = \frac{\mu_U(1-\alpha_j)}{\mu_D}, \quad w_U = 1$$

그러므로, 앞의 결과를 부록의 식 (A.1)에 대입하면, j 단계에서의 결합확률을 얻을 수 있다.

$$P_{(n_R,\ n_D,\ n_U)} = \frac{1}{G(N)}\left[\frac{\mu_U \alpha_j}{\mu_R}\right]\frac{1}{A_R(n_R)} \left[\frac{\mu_U(1-\alpha_j)}{\mu_D}\right]\frac{1}{A_D(n_D)}\,\frac{1}{A_U(n_U)}$$

여기서 j 단계(;j=1, 2)에서의 A는 부록의 식 (A.5)에 의해 주어진다. 즉, b는 각각 m_j, x_j 및 ∞일 경우에 대하여 다음과 같다:

$$A(n) = \begin{cases} n!, & n > b \\ b_j!\, b^{n-b}, & n \geq b. \end{cases}$$

여기서 정규화상수 G(N)값은 부록의 식 (A.7)과 (A.8)을 이용하여 구할 수 있는데, G(N)값의 체계적 표현의 일부는 표 1과 같다. 이 값을 식 (A.9)에 대입하면 j 단계에서 n 개의 기계가 가용할 안정상태확률 P_n을 구할 수 있다. 그러므로 우리는 식 (3.2)에 의해 안정상태가용도 $A_j(x_j, y_j)$를 구할 수 있다.

표 1. G(N)값의 체계적 표현

(; N=6, $w_R=w_D=0.25$, $w_U=1$)

	WR	WD	WU
0	1	1	1
1	0.25	0.5	1.5
2	3.125E−02	0.125	1.625
3	2.604E−03	2.083E−02	1.6458
4	1.628E−04	2.604E−03	1.6484
5	8.138E−06	2.604E−04	1.6486
6	3.391E−07	2.170E−05	1.6487

주어진 NLIP식에서 x_j, y_j (;j=1, 2)는 (4.2), (4.3)식의 우변값과 좌변의 계수값과의 비율 중 최소치를 초과할 수 없다. x_j, y_j가 정수이어야 하므로 [x]는 x를 초과하지 않는 정수 중 최대값이라 정의하면,

$$x_1 = [180/10] = 18,$$
$$x_2 = [180/10] = 18,$$
$$y_1 = [\min\{180/30,\ 19/4\}] = [19/4] = 4,$$
$$y_2 = [\min\{180/20,\ 19/3\}] = [19/3] = 6.$$

즉, $X_{max} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (18, 18)$,
$Y_{max} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2) = (4, 6)$이 된다.

따라서 (X_{max} ▲Y_{max})=(4, 6)이므로(;여기서 ▲는 좌우의 요소값 중 작은 것을 나타냄) 알고리즘은 (X_{max} ▲Y_{max}, Y_{max})=(4, 6, 4, 6)으로부터 가능해를 열거해 나가게 된다. Park

표 2. 수정된 NLB 알고리즘에 따른 계산과정(; 수정된 NLB 알고리즘 적용)

반복횟수	X	Y	X	Y	fo(X, Y)	관련단계
1	4, 6	4, 6	−, −	−, −	—	1, 2, 4
2	3, 6	3, 6	−, −	−, −	—	1, 2, 4
3	2, 6	2, 6	−, −	−, −	—	1, 2, 4
4	4, 5	4, 5	−, −	−, −	—	1, 2, 4
5	3, 5	3, 5	−, −	−, −	—	1, 2, 4
6	2, 5	2, 5	−, −	−, −	—	1, 2, 4
7	4, 4	4, 4	−, −	−, −	—	1, 2, 4
8	3, 4	3, 4	−, −	−, −	—	1, 2, 4
9	2, 4	2, 4	−, −	−, −	—	1, 2, 4
10	4, 3	4, 3	−, −	−, −	—	1, 2, 4
11	3, 3	3, 3	−, −	−, −	—	1, 2, 4
12	2, 3	2, 3	−, −	−, −	—	1, 2, 3, 4
13	4, 2	4, 2	2, 3	2, 3	0.658	1, 2, 4
14	3, 2	3, 2	2, 3	2, 3	0.658	1, 2, 3, 4
15	4, 1	4, 1	3, 2	3, 2	0.804	1, 4

(1989)의 수정된 NLB 알고리즘에 따라 계산하면 표 2와 같이 계산과정을 요약할 수 있다.

여기서 볼 수 있듯이 이 예제의 경우 알고리즘의 계산은 15번째에 끝이 나고, 최적해는 X=(3, 2), Y=(3, 2), fo(x, y)=0.804가 된다. 즉 각 작동단계에서 수리창구는 각각 3, 2개씩 마련하고, 예비기계 총 기계댓수는 작동중인 것을 포함하여 각각 3, 2대씩 제공할 때 시스템의 가용도가 0.804로서 최대가 된다.

5. 결 론

우리가 사용하는 장비나 기계들이 점차 복잡해짐으로 해서, 이러한 장비들의 원활한 작동을 위해서는 사용단계에서의 정비 및 보수를 위한 예비품의 조달 및 공급문제를 다루는 예비품 재고문제가 중요한 관심사로 대두되게 되었다.

본 연구에서는 기존연구들 보다 현실성을 더욱 반영할 수 있도록 고장난 품목의 일부는 수리가능하고, 나머지는 수리불가능한 경우의 (S−1, S) 예비품 재고정책문제를 다루었다. 주어진 제약조건하에서 가용도를 최대화할 수 있도록 각 단계별로 수리창구와 예비기계댓수를 동시에 결정해 주기 위하여, 각 창구 상호간의 관계를 폐쇄대기망 기법으로 모형화해서 안정상태가용도를 구할 수 있게 했으며, 다단계 직렬시스템에서 변수의 상호간에 대소관계

가 성립하는 기계수리문제를 비선형 정수계획 문제로 정식화하고, 이를 효율적으로 풀 수 있는 기법을 제시하였다.

본 연구에서 수리가능한 고장확률(α)을 1이라고 두면, 본 연구는 Koenigsberg(1960)의 전통적인 수리공문제(repairman problem)가 되며, $\alpha=0$으로 가정하면 Park(1981)의 장비군 운용을 위한 (S−1, S) 정책이 된다. 또한 각 단계에서의 요구작동기계댓수(m_i)가 모두 1이라고 가정하면 Park(1989)의 다단계 기계수리문제(multi-stage machine repair problem)가 된다.

본 연구의 결과는 고장률이 높지 않은 고가 예비품의 재고관리에 도움이 될 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

1. Ahn, B. H.(1980), Analysis and Optimal Design of Repair Depot for Fleet Operations, Ph. D. Dissertation, KAIST.
2. Albright. S. C., and Soni. A.(1984), "Evaluation of Costs of Ordering Policies in Large Machine Repair Problems", Naval Research Logistics Quarterly, 31, 387−398.
3. Allen, S. G., and D'Esopo, D. A.(1968), "An Ordering Policy for Repairable Stock Items", Operations Research, 16, 669−674.
4. Barlow, R. E.(1962), "Repairman Problem", Chapter 2 in Studies in Applied Probability and Management Science, K. J. Arrow, S. Karlin, H. Scarf, Stanford University Press.
5. Barlow, R. E., and Proschan, F.(1965), Mathematical Theory of Reliability, John Wiley & Sons, Inc., 139−151.
6. Buzen, J. P.(1973), "Computational Algorithms for Closed Queueing Networks with Exponential Servers", Communications of the ACM, 16, 527−531.
7. Gordon, W. J., and Newell, G.F.(1967), "Closed Queueing Systems with Exponential Servers", Operations Research, 15, 254−265.
8. Gross, D., Miller, D. R., and Soland, R. M. (1983), "A Closed Queueing Network Model for Multi-Echelon Repairable Item Provisioning", IIE Transactions, 15, 344−352.
9. Jackson, J. R.(1957), "Networks of Waiting Lines", Operations Research, 5, 518−521.
10. Jackson, J. R.(1963), "Jobshop-Like Queueing Systems", Management Science, 10, 131−142.
11. Koenigsberg, E.(1960), "Finite Queues and Cyclic Queues", Operations Research, 8, 246−253.
12. Lawler, E. L., and Bell, M. D.(1966), "A Method for Solving Discrete Optimization Problem", Operations Research, 14, 1098−1111.

13. Nahmias, S., and Rivera, H.(1979), "A Deterministic Model for a Repairable Item Inventory System with a Finite Repair Rate", International Journal of Production Research, 17(3), 215−221.
14. Park, K. S.(1981), "(S−1, S) Spare-Part Inventory Policy for Fleet maintenance" IEEE Transactions on Reliability, R-30, 481−483.
15. Park, Y. T.(1989), "Machine Repair Problem in Multistage System", Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers, 15(2), 93−101.
16. Richards, F. R.(1976), "A Stochastic Model of a Repairable-Item Inventory System with Attrition and Random Lead Times", Operations Research, 24, 118−130.
17. Sasaki, M., Kaburaki, S., and Yanagi, S. (1977), "System Availability and Optimum Spare Units", IEEE Transactions on Reliability, R-26, 182−188.
18. Schrady, D. A.(1967), "A Deterministic Inventory Model for Repairable Items", Naval Research Logistics Quarterly, 14, 391−398.
19. Simon, R. M., and D'Esopo, D. A.(1971), "Comments on a Paper by Allen, S. G., and D'Esopo, D. A.: An Ordering Policy for Repairable Stock Items", Operations Research, 19, 986−988.
20. Taylor, J., and Jackson, R. R. P.(1954), "Application of Birth and Death Process to the Provisioning of Spare Machines", Operational Research Quarterly, 5, 95−108.
21. Wahi, P. N.(1966), "Provisioning of Spare and Service Channels When a Fixed Number of Machines Run a System", The Journal of Industrial Engineering, 17, 112−115.

부록. Buzen의 계산절차

총 N개의 기계댓수를 가지는 R-창구망에 대한 모형을 고려한다. 부하종속적 수리창구(load dependent server)를 가지는 망에서 결합안정상태확률(joint steady-state probability 또는 equilibrium distribution)은 다음과 같다.

$$P(n_1, n_2, \cdots, n_R) = [1/G(N)] \prod_{i=1}^{R} [(w_i)^{n_i}/A_i(n_i)], \quad \cdots\cdots(A.1)$$

여기서 $(w_1, w_2, \cdots, w_R)$는 고유벡터형태(; eigenvector-like)의 방정식의 실정수해(real positive solution)이고,

$$\mu_j w_j = \sum_{i=1}^{R} \mu_i w_i P_{ij}, \quad j=1, 2, \cdots, R \quad \cdots\cdots(A.2)$$

G(N)은 정규화 상수로 정의되며 $P(n_1, n_2, \cdots, n_R)$의 총합이 1과 같다는 가정에 의해 구할 수 있다. 즉,

$$G(N) = \sum_{\underline{n} \in S(N,R)} \prod_{i=1}^{R} [(w_i)^{n_i}/A_i(n_i)]$$

$$\cdots\cdots(A.3)$$

여기서,

$$S(N,R)=(n_1, n_2, \cdots, n) \mid \sum_{i=1}^{R} n_i = N,$$

$$\text{그리고 } n_i \geq 0 \ \forall i\} \quad \cdots\cdots(A.4)$$

그리고,

$$A_i(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ \prod_{j=1}^{n} a_i(j), & n>0, \quad i=1,2,\cdots,R \end{cases} \quad \cdots\cdots(A.5)$$

a_i : 창구 i에서 $a_i(n)>0$, $R>0$의 조건을 갖는 임의의 함수,

P_{ij} : 창구 i에서 서비스를 완료한 후에 기계가 창구 j로 갈 확률,

$\underline{n}$: 벡터$(n_1, n_2, \cdots, n_R)$, 여기서 n_i는 i번째 창구에 있는 고객의 수,

$\left(\sum_{i=1}^{R} n_i = N\right)$.

직접 G(N)을 계산하기는 어렵기 때문에 보조함수(auxiliary function) g(n, r)를 정의하는 것이 편리하다.

$$g(n,r)=\sum_{n\in S(n,r)} \prod_{i=1}^{r} \left[(w_i)^{n_i}/A_i(n_i)\right] \quad \cdots\cdots(A.6)$$

여기서 $g(n,R)=G(n)$, $n=0,1,\cdots,N$이다. $r>1$인 경우 다음을 얻을 수 있다.

$$g(n,r)=\sum_{j=0}^{n}\Big[\sum_{\substack{n\in S(n,r)\\ \& \ n_r=j}} \prod_{i=1}^{r}\{(w_i)^{n_i}/A_i(n_i)\}\Big]$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{(w_r)^j}{A_r(j)}g(n-j, r-1) \quad \cdots\cdots(A.7)$$

식 (A.6)으로 부터 다음을 얻을 수 있다.

$$g(n,1)=(w_1)^n/A_1(n), \ n=0,1,\cdots,N$$

그리고

$$g(0,r)=1, \ r=1,2,\cdots,R \quad \cdots\cdots(A.8)$$

식 (A.8)은 g(n, r)의 초기값(initial value)으로 정식하고, 식 (A.7)은 초기반복단계(basic iterative step)로 정의한다. G(N)을 계산하기 위해서는 먼저 식 (A.2)를 계산해서 $\{w_i\}$ 수의 집합을 결정해야 한다. $\{w_i\}$와 식 (A.7), (A.8)로 해서 g(n, 1)은 $n=1,2,\cdots$, N에 대해 계산되어 진다. G(N)=g(N, R)를 지닐 때까지 g(n, 2), g(n, 3) 등을 계산해야 한다. 부하종속인 경우의 G(N)값을 계산하기 위한 체계적 표현은 그림 A1과 같이 나타낼 수 있다.

i 번째 창구에서 n_i명의 고객을 발견하는 주변확률(marginal probability) $P_i(n_i)$는 Buzen의 절차를 사용해서 효율적으로 계산되어질 수 있다. R번째 창구에서의 주변확률 P_n은 다음과 같다.

$$P_n = P(n_R=j)$$

$$=\sum_{\substack{\underline{n}\in S(N,R)\\ \& \ n_R=j}} P(n_1, n_2, \cdots, n_R)$$

$$=\frac{(w_R)^j}{A_R(j)}\frac{g(N-j, R-1)}{G(N)}, \ j=0,1,\cdots,N \quad \cdots\cdots(A.9)$$

여기서 g(N−j, R−1)은 식 (A.6)에 의해 정의된다.

	w_1	$\cdots$	w_r-1		w_r $\cdots$ w_R
0	1	$\cdots$	$1 * \frac{(w_r)^n}{A_r(n)} +$		$1 \cdots 1$
1			$g(1, r-1) * \frac{(w_r)^{n-1}}{A_r(n-1)} +$		
2			$g(2, r-1) * \frac{(w_r)^{n-2}}{A_r(n-2)} +$		
$\vdots$			$\vdots$		
$n-2$			$g(n-2, r-1) * \frac{(w_r)^2}{A_r(2)} +$		
$n-1$			$g(n-1, r-1) * \frac{(w_r)^1}{A_r(1)} +$		
n			$g(n, r-1) * \frac{(w_r)^0}{A_r(0)} +$	$g(n, r)$	
$\vdots$					
N					$g(N, R)$

그림 A1. 정규화 상수 G(N)의 체계적 표현