Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 17, No. 1, June, 1991

비 매개변수 곡면의 블렌딩

주 상 윤*

Construction of Blend Surface between Nonparametric Surfaces

Sang-Yoon Ju*

Abstract

This paper suggests a method to construct nonparametric edge blend surfaces between nonparametric (base) surfaces. The blend surface satisfy VC^1 condition for the base surfaces, and its fullness can be controlled easily. Several illustrative examples are shown.

1. 서 론

3차원 공간상의 곡면은 표현방식에 따라 매개변수(parametric) 함수형태의 식이나 혹은 implicit 함수식으로 나타낼 수 있다. 이들 두 함수식들은 표현 특성상 서로 다른 장단점을 지닌다. $r(u,v)=(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ 형태를 지니는 매개변수 함수식은 매개변수 (u,v)의 값에 대응하는 곡면상의 점을 쉽게 구할 수 있으므로 곡면을 생성하는 데에는 매우 효과적이다. 그러나 3차원 공간상에 주어진 한 점이 매개변수 곡면상에 존재하는지 여부를 조사하기에는 불편하다. 반면에 $h(x,y,z)=0$ 형태의 implicit 함수식으로 곡면이 표현된 경우, 공간상의 한 점 (x^*,y^*,z^*)가 implicit 곡면상에 존재하는지 혹은 곡면의 내부나 외부에 존재하는지 여부에 관하여는 $h(x^*,y^*,z^*)$ 값의 부호에 의하여 쉽게 판단할 수 있다. 그러나 implicit 곡면은 일부 단순한 경우를 제외하고는 대부분 수치해석적인 방법을 이용하여 곡면을 결정하게 되므로 곡면 생성에는 적합치 않다. 이와 같은 이유로 인하여 곡면을 생성하고자 할 경우에는 매개변수 곡면이 바람직하며, 주어진 한 점과 곡면간의 상대적인 위치 관계를 조사하고자 할 경우에는 implicit 곡면이 효과적이다.

본 연구에서 다루고자 하는 비 매개변수(nonparametric) 곡면은 $z=f(x,y)$ 형태의 함수식으로 표현되는 곡면을 가리킨다. 이같은 형태의 비 매개변수 곡면 방정식은 $h(x,y,z)=z-f(x,y)=0$의 implicit 함수식으로 항상 변환될 수 있으므로 implicit 곡면식의 특수 경우라고 할 수 있다. 즉 비 매개변수 함수식으로 표현되는 곡면들은 implicit 함수식으로 표현 가능한 곡면들 가운데 일부분이므로 곡면의 표현이 다소 제한적이다. 그러나 비 매개변수 곡면의 함수식은 (x,y)－평면상에 한 점 (x^*,y^*)가

* 울산대학교 산업공학과

주어졌을 때 해당되는 함수 값 $z^*=f(x^*,y^*)$으로부터 곡면상의 점 (x^*,y^*,z^*)을 쉽게 결정할 수 있으므로 implicit 곡면식이면서도 매개변수 곡면식과 같이 신속하게 곡면을 생성할 수 있다는 장점을 지닌다. 이와 같이 비 매개변수 곡면은 매개변수 곡면과 implicit 곡면의 장점을 동시에 지니므로 곡면의 모델링을 위하여 폭넓게 이용되고 있다.

다수의 비 매개변수 곡면들로 이루어진 compound 곡면은 서로 다른 함수식으로 정의된 곡면들이 서로 교차할 수 있다. 이때 곡면들이 교차하는 부위에서는 응력이 집중되거나, 제조하기 어렵다는 등의 여러가지 문제가 발생하므로 이를 방지하기 위하여 rounding 혹은 fillet과 같은 블렌드 곡면으로 교차부위를 부드럽게 연결하는 것이 일반적이다.

블렌딩에 관한 연구는 최근 관심이 고조되었으며 매개변수 곡면들간의 블렌딩[1,2]과 implicit 곡면들간의 블렌딩[3,4,5,6]에 대한 연구가 발표되었다. 일반적으로 블렌드 곡면은 블렌딩이 필요한 base 곡면들과 동일한 함수식 형태를 취하는 것이 바람직하므로 매개변수 곡면들간의 블렌드 곡면은 매개변수 함수식으로, implicit 곡면들간의 블렌드 곡면은 implicit 함수식으로 표현되고 있다. 이와 마찬가지로 본 논문에서는 비 매개변수 함수식을 가진 base 곡면들을 부드럽게 연결하는 비 매개변수 블렌드 곡면을 형성하고자 한다.

2. 블렌드 곡면의 형성

$z=f(x,y)$와 $z=g(x,y)$를 base 곡면식이라고 하고, 이 base 곡면들을 부드럽게 연결하는 블렌드 곡면식을 $z=b(x,y)$라 하자.

우선 두 base 곡면식 $z=f(x,y)$와 $z=g(x,y)$를 implicit 함수형태로 바꾸어 보자. 즉,

$$F=z-f(x,y)=0\,;\quad G=z-g(x,y)=0 \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

이들 두 implicit 곡면에 대하여 Hoffmann[3]의 potential 방법을 적용하면 implicit 함수형태의 블렌드 곡면식을 얻게 된다. 이 과정을 소개하면 다음과 같다.

potential 방법은 $P=p(x,y,z)=0$와 $Q=q(x,y,z)=0$의 implicit 함수식을 가진 두 base 곡면 S(P), S(Q)의 교차영역을 부드럽게 연결하는 블렌드 곡면 S(R)을 얻는데 이용된다. 이 때 형성되는 블렌드 곡면의 함수식을 $R=r(x,y,z)=0$이라고 하자. 두 상수 a, b에 대하여 $P'=P-a=0$와 $Q'=Q-b=0$의 함수식을 취하는 곡면 S(P')과 S(Q')를 정의할 때 이들 곡면은 상수 a, b값의 부호에 따라 S(P) 혹은 S(Q)의 안쪽이나 바깥쪽에 위치하게 된다. 만약 (a,b)가 (s,t)－좌표계에서 정의된 연속된 곡선 k(s,t)=0상에 존재하는 점들이고 또한 각 점에 대응하는 두 곡면 S(P')와 S(Q')가 서로 교차한다면 S(P')와 S(Q')의 교선들의 family는 블렌드 곡면을 형성하게 된다. 얻어진 블렌드 곡면이 두 base 곡면 S(P), S(Q)와 부드럽게 만나도록 하기 위하여 곡선식 k(s,t)를 다음과 같은 conic 곡선식으로 정한다.

$$k(s,t)=b^2s^2+a^2t^2-2ab^2s-2a^2bt+2\lambda st+a^2b^2 \quad \cdots\cdots (2)$$

$\min(0,a)\leq s\leq \max(0,a),\ \min(0,b)\leq t\leq \max(0,b)$

λ : fullness factor $(-\infty<\lambda<ab)$

이 때 블렌드 곡면 S(R)에 대한 함수식 R=0는 (2)식에서 s와 t 대신 P와 Q를 각각 대체함으로 얻어진다.

$$R=k(P,Q)=b^2P^2+a^2Q^2-2ab^2P-2a^2bQ+2\lambda PQ+a^2b^2=0 \quad \cdots\cdots (3)$$

이상과 같은 potential 방법에 의하여 (1)식의 F와 G를 (3)식의 P와 Q에 대입하여 정리하면 블렌드 곡면식은 다음과 같이 z에 관한 2차 implicit 함수식이 된다.

$$(a^2+b^2+2\lambda)z^2-2(b^2f+a^2g+ab^2+a^2b+\lambda f+\lambda g)z + (b^2f^2+a^2g^2+a^2b^2+2ab^2f+2a^2bg+2\lambda fg)=0 \quad \cdots\cdots (4)$$

식(4)에서 f와 g는 각각 f(x, y)와 g(x, y)를 의미한다.

얻어진 블렌드 곡면식은 z에 관한 2차식이므로 근을 구하는 공식을 이용하면 블렌드 곡면식을 비 매개변수 함수형태의 식으로 표현할 수 있다.

$$z=b(x,y)=(B\pm\sqrt{(B^2-AC)})/A \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

단, $A=a^2+b^2+2\lambda$

$B=b^2f+a^2g+ab^2+a^2b+\lambda f+\lambda g$

$C=b^2f^2+a^2g^2+a^2b^2+2ab^2f+2a^2bg+2\lambda fg$

$f=f(x,y)$, $g=g(x,y)$

주어진 비 매개변수 base 곡면에 대한 법선벡터 n(x, y)가 다음의 관계

$$n(x,y)\cdot k\geq 0\ ; \qquad k=(0,0,1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

를 만족할 때, 식(5)의 ±에서 + 부호는 rounding 곡면, − 부호는 fillet 곡면에 각기 해당된다.

3. 각 곡면의 domain 영역 결정

블렌딩된 compound 곡면은 base 곡면 z=f(x, y), z=g(x, y)와 블렌드 곡면 z=b(x, y)으로 이루어진다. 그러므로 (x, y)−평면상의 한점에 대한 z의 값은 이들 3 곡면식 중의 하나로부터 결정된다. 다시 말하면 (x, y)−평면상에는 3곡면 각각에 대한 domain 영역이 구분되어야 한다.

블렌드 곡면이 fillet인 경우 세 곡면 z=f(x, y), z=g(x, y), z=b(x, y)는 그림 1−a와 같이 아래의 (x, y)−평면 영역에 대해서만 각기 존재한다.

z=f(x, y)의 정의영역 : $f(x,y)\geq g(x,y)+b$

z=g(x, y)의 정의영역 : $g(x,y)\geq f(x,y)+a$

z=b(x, y)의 정의영역 : $g(x,y)-a\geq f(x,y)\geq g(x,y)+b$

유사한 방법에 의하여 블렌드 곡면이 rounding일 때 각 곡면이 정의되는 (x, y) 영역은 다음과 같다 (그림 1−b 참조).

z=f(x, y)의 정의영역 : $f(x,y)\leq g(x,y)+b$

z=g(x, y)의 정의영역 : $g(x,y)\leq f(x,y)+a$

z=b(x, y)의 정의영역 : $g(x,y)+b\leq f(x,y)\leq g(x,y)-a$

그림 2에서는 z=f(x, y)=0의 평면과 $z=g(x,y)=6-x^2/2-y^2/2$의 포물면에 대하여 형성된 a=1, b=4, λ=0의 블렌드 곡면 z=b(x, y)과 또한 (x, y)−평면에서 이들 세 곡면의 정의영역을 함께 도시하고 있다. 여기서 base 곡면 z=0는 $x^2+y^2\geq 20$에서 정의되며 다른 base 곡면 $z=6-x^2/2-y^2/2$는 $x^2+y^2\leq 10$에서 정의되었다. 두 base 곡면을 연결하는 블렌드 곡면은 $10\leq x^2+y^2\leq 20$을 정의역으로 가지고 있다.

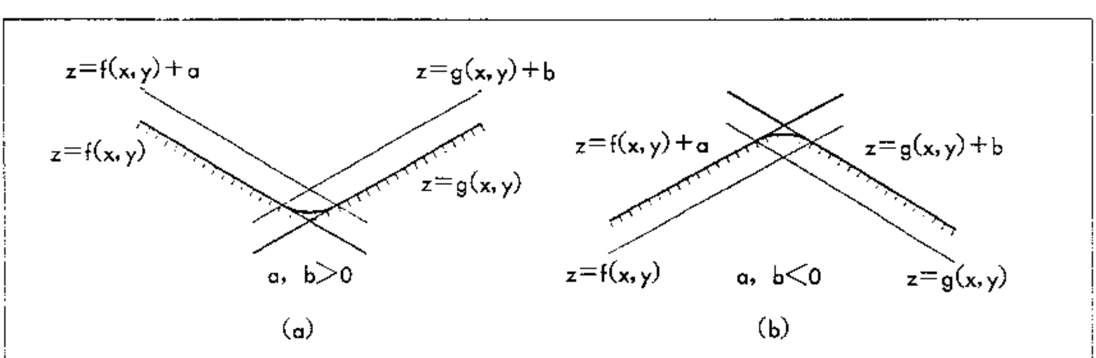

그림 1. base 곡면과 블렌드 곡면의 존재영역(a : fillet, b : rounding)

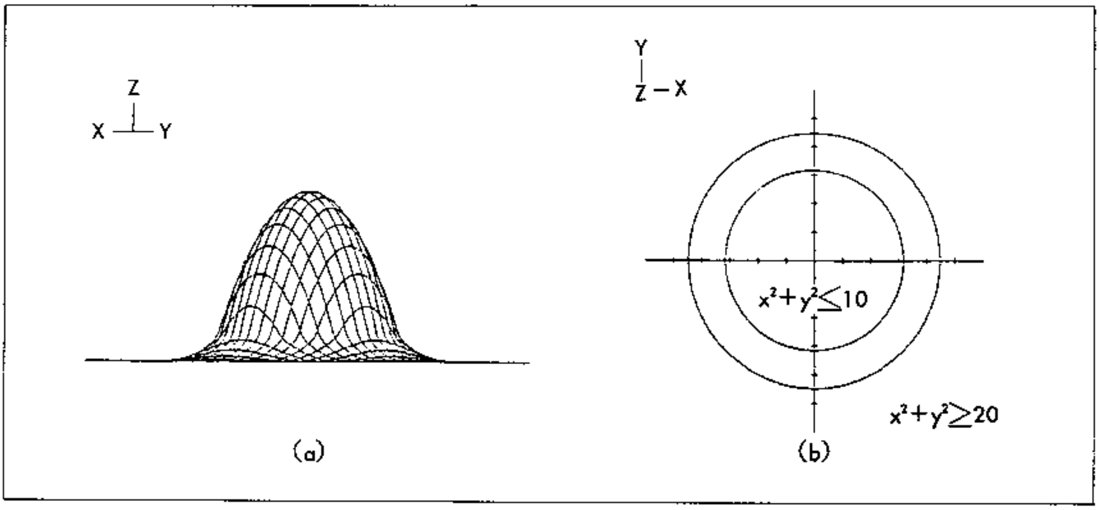

그림 2. 블렌드 곡면(a)과 각 곡면에 대한 domain 영역(b)

4. 제한된 (x, y) domain을 갖는 base 곡면에 대한 블렌딩

옵셋 곡면 $z=f(x,y)+a$는 $z=f(x,y)$를 z축 방향으로 a만큼 이동시킨 곡면이다. 그러므로 그림 3의 예와 같이 offset parameter가 각각 a, b(a, b>0)인 $z=f(x,y)=\sqrt{(1-x^2-y^2)}$와 $z=g(x,y)=0$간의 블렌드 곡면은 $z=\sqrt{(1-x^2-y^2)}+a$와 $z=0$가 서로 만나지 않으므로 형성되지 않는다. 바꾸어 말하면 식(5)에서 $B^2-AC<0$가 된다. 이와 같은 상황은 (x, y)-평면 가운데 일부만을 domain으로 갖는 base 곡면을 블렌딩하고자 할때 발생할 가능성이 있다. 본 연구에서는 이러한 문제점을 해결하기 위하여 주어진 원 base 곡면에 C^1 연속인 보조 곡면을 연결함으로 얻어진 compound base 곡면이 (x, y) 평면 전체에서 정의되도록 하였다. 보조곡면을 정의하기에 앞서 문제의 원 base 곡면식이 다음의 함수식 형태를 지닌다고 가정한다.

$$z=k\sqrt{f_1(x,y)}+f_2(x,y) \qquad \cdots\cdots (6)$$

이때 k는 상수이며 부함수(sub-function) $z=f_1(x,y)$와 $z=f_2(x,y)$가 (x, y) 평면 전체에 대하여 그 함수값이 정의된다고 가정할 때 식(6)의 곡면식은 $f_1(x,y)\geq0$을 만족하는 영역에서 정의된다.

보조곡면은 다음의 조건들을 만족해야 한다.

- 보조곡면은 비 매개변수 곡면이어야 한다.
- 보조곡면은 $f_1(x,y)\leq0$을 만족하는 (x, y) 영역에서 정의되어야 한다.
- 보조곡면은 원 base 곡면과 C^1 연속을 만족해야 한다.

윗 조건을 만족시키는 보조 곡면식은 다음과 같이

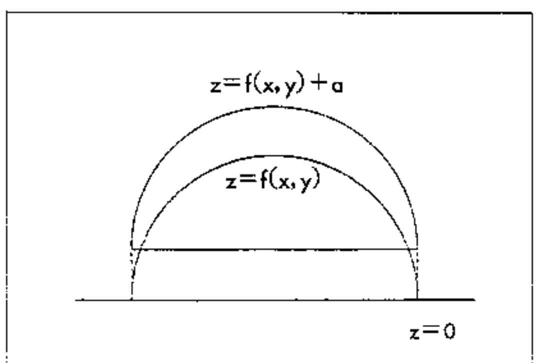

그림 3. 옵셋된 반구와 평면

정의될 수 있다.

$$z=k^2 f_1(x,y)/(2c)+c/2+f_2(x,y) \quad (c>0) \cdots (7)$$

보조곡면은 $f_1(x,y)=c^2/k^2$에서 원 base 곡면과 C^1 연속으로 접하게 되며 $f_1(x,y)\leq c^2/k^2$의 (x,y) 평면영역에 대하여 결정된다. 또한 보조곡면은 상수 c의 크기에 따라 원 base 곡면과 접하는 위치가 변하게 된다.

그림 4는 $z=\sqrt{(9-x^2-y^2)}$식을 가진 base 곡면과 $z=(1-x^2-y^2)/(2c)+c/2$식의 보조곡면으로 이루어진 compound base 곡면을 c=0.6, 1.4, 2.2 값에 대하여 각기 도시하고 있다. 상수 c의 값은 해당 base 곡면이 $z=f(x,y)$일 때 상대편 base 곡면 $z=g(x,y)$에 주어진 offset parameter b보다 작은 값으로 정하는 것이 바람직하다. 원 base 곡면과 보조곡면이 연결된 compound base 곡면은 다음 식으로 정의된다.

$$z=\begin{cases} k\sqrt{f_1(x,y)}+f_2(x,y) & f_1(x,y)\geq c^2/k^2 \\ k^2 f_1(x,y)/(2c)+c/2+f_2(x,y) & \end{cases}$$

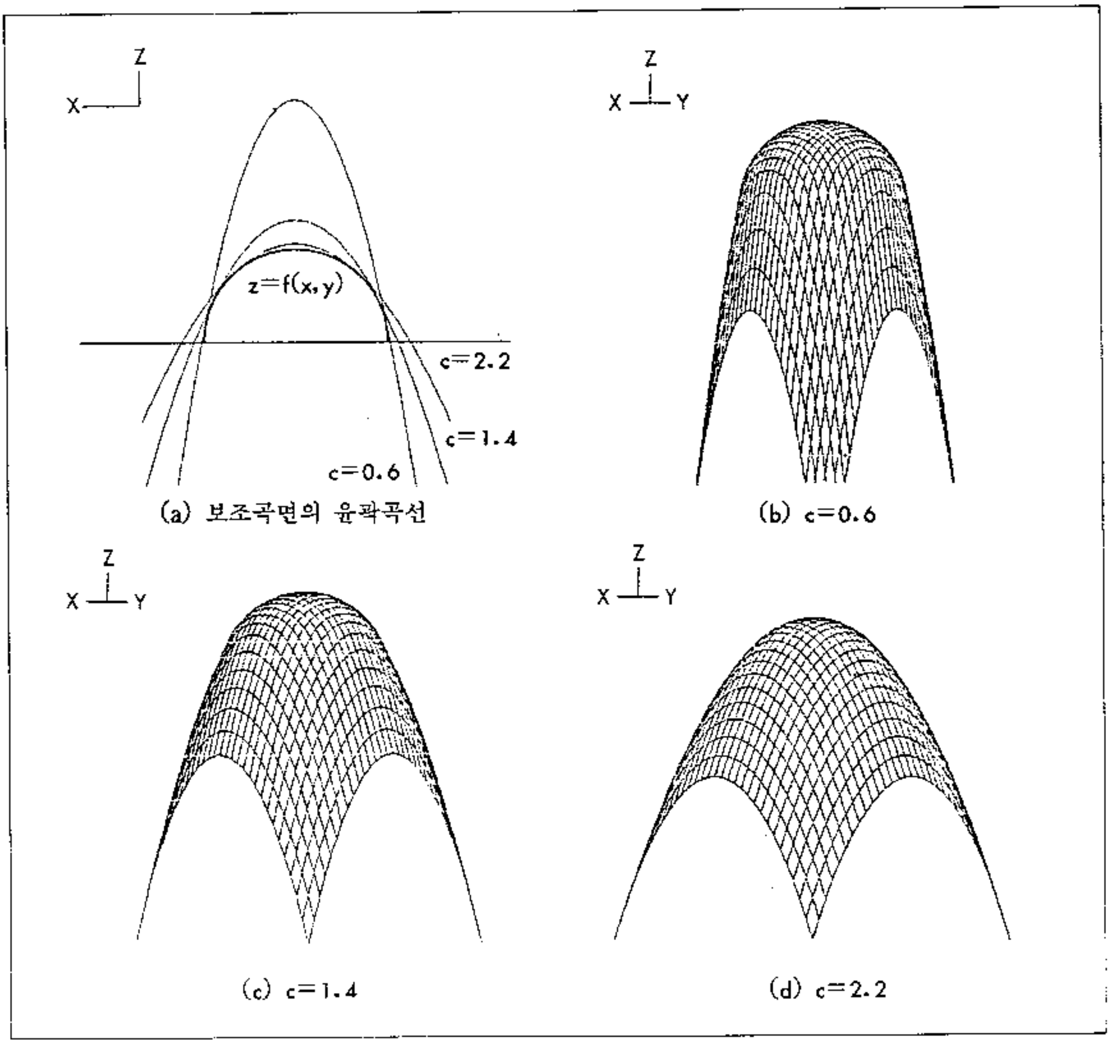

그림 4. c의 크기변화에 따른 보조곡면

$f_1(x, y) \leq c^2 / k^2$ .... (8)

5. 그림 예

본 절에서는 비 매개변수 곡면간의 블렌딩에 관한 그림 예들을 보여준다. 그림 5는 그림 2의 예, 즉 평면과 포물면의 블렌드 곡면을 방향을 바꾸어 도시한 것이다. 그림 6에서는 $z=f(x, y)=0$의 평면과 $z=g(x, y)=\sqrt{(1-x^2-y^2)}$의 곡면을 부드럽게 연결한 블렌드 곡면을 보여주고 있는 반면 그림 7에서는 $z=f(x, y)=0$의 평면과 $z=g(x, y)=-\sqrt{(x^2+y^2-1)}$의 곡면이 rounding된 블렌드 곡면을 보여주고 있다. 이들 두 그림에서는 전자의 반구가 $1-x^2-y^2 \geq 0$을, 후자의 반쌍곡면이 $x^2+y^2-1 \geq 0$을 각각 domain으로 취하므로 식(7)을 이용하여 보조곡면을 형성하였고, 상수 c의 값은 $z=f(x, y)$에 대한 offset parameter 즉 b의 값으로 정하였다. 이상의 블렌드 곡면에 대한 그림 예에서는 $\lambda=0$을 취하였다.

그림 8에서는 $z=f(x, y)=\sqrt{(9-x^2-y^2)}+4$의 반구와 $z=g(x, y)=\sqrt{(25-x^2)}$식을 가진 반실린더간의 블렌드 곡면을 도시하였다. 마지막으로 그림 9에서는 $z=f(x, y)=0$의 평면과 $z=g(x, y)=6-x^2/2-y^2/2$의 포물면에 대하여 $\lambda=-100$, $\lambda=-10$, $\lambda=2$로 값을 변화시켰을 때 블렌드 곡면을 보여주고 있다($a=1$, $b=3.5$).

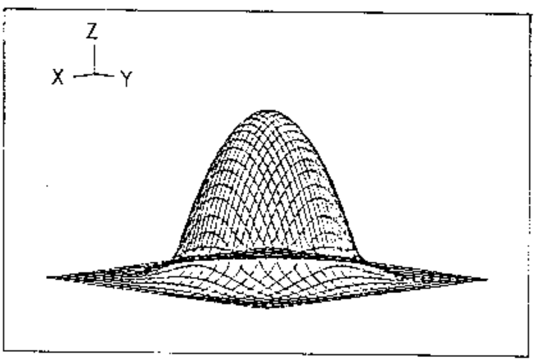

그림 5. 평면과 포물면의 블렌딩
($a=1$, $b=3.5$, $\lambda=0$)

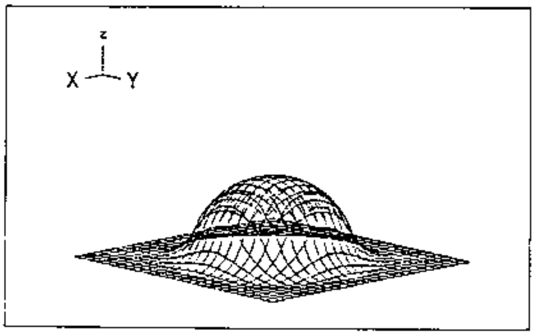

그림 6. 평면과 반구의 블렌딩
($a=1$, $b=3$, $\lambda=0$)

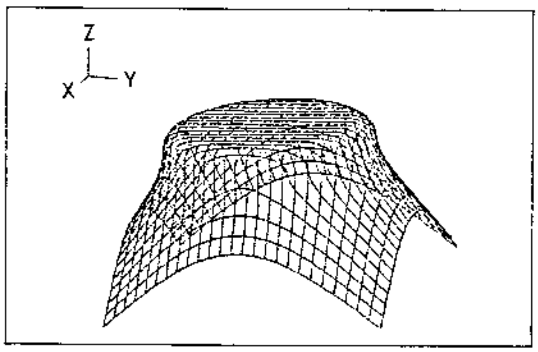

그림 7. 평면과 반쌍곡면의 블렌딩
($a=-3$, $b=-2$, $\lambda=0$)

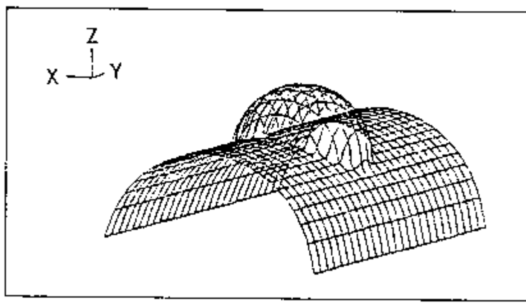

그림 8. 반구와 반실린더의 블렌딩
($a=1$, $b=2$, $\lambda=0$)

6. 결 론

본 연구에서는 비 매개변수 곡면을 부드럽게 연

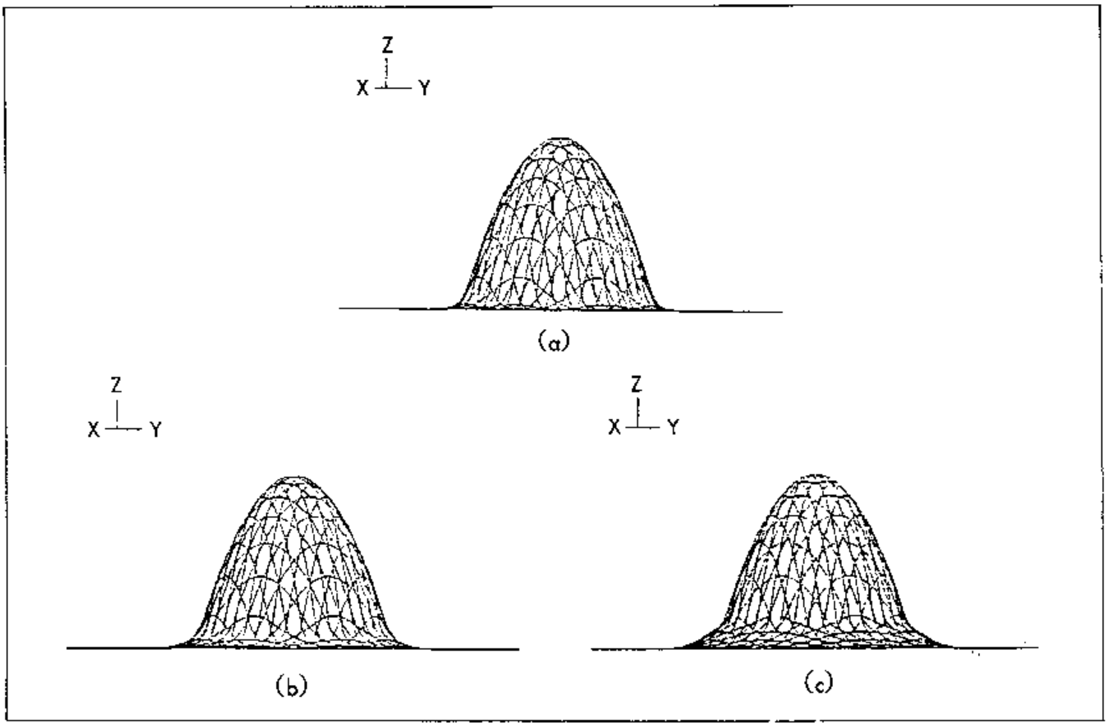

그림 9. λ의 변화에 따른 블렌드 곡면 (a : $\lambda=-100$, b : $\lambda=-10$, c : $\lambda=2$)

결하기 위한 블렌드 곡면을 형성하였다. 형성된 블렌드 곡면은 비 매개변수 함수형태로 주어지므로 (x, y) 평면으로부터 쉽게 블렌드 곡면을 얻을 수 있을 뿐만 아니라 (x, y)-평면으로부터 base 곡면과 블렌드 곡면을 동시에 생성할 수 있으므로 Cartesian 가공을 위한 CL data를 얻기에 매우 효과적이다. 그러나 본 연구는 지정된 반지름을 만족하는 블렌드 곡면을 얻기 곤란하므로 이에 대한 연구가 보다 더 이루어져야 한다. 그 외에도 제한된 영역을 갖는 base 곡면의 일반적인 곡면식에 대한 보조곡면을 정의하는 문제에 대하여 연구가 추가되어야 할 것이다.

참고문헌

[1] Ju, S., 1989, "Construction of Blend Surfaces in Surface Modelling," Ph. D. Dissertation, KAIST, Korea.

[2] Choi, B. and Ju, S, 1989, "Constant-Radius Blending in Surface Modelling," CAD, Vol. 21, No. 4, pp. 213-220.

[3] Hoffmann, C. and Hopcroft, J., 1986, "Quadratic Blending Surfaces," CAD, Vol. 18, No. 6, pp. 301-306.

[4] Holmstrom, L., 1987, "Piecewise Quadric Blending of Implicitly Defined Surfaces," CAGD, Vol. 4, pp. 171-189.

[5] Middleditch, A. and Sears, K., 1985, "Blend Surfaces for Theoretic Volume Modelling Systems," Comp. Graphics, Vol. 19, No. 3, pp. 161-170.

[6] Rockwood, A. and Owen, J., 1987, "Blending Surfaces in Solid Modelling," in Geometric Modelling : Algorithm and New Trends, (Farin, G., ed.), SIAM, pp. 367-383.