Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers
Vol. 17, No. 1, June, 1991

확률적 단조성과 콘벡스성을 이용한 마코프 프로세스에서의 범위한정 기법†

윤복식*

Bounding Methods for Markov Processes Based on Stochastic Monotonicity and Convexity

Bok-Sik Yoon*

Abstract

When $\{X(t), t \geq 0\}$ is a Markov process representing time-varying system states, we develop efficient bounding methods for some time-dependent performance measures. We use the discretization technique for stochastically monotone Markov processes and a combination of discretization and uniformization for Markov processes with the stochastic convexity(concavity) property. Sufficient conditions for stochastic monotonocity and stochastic convexity of a Markov process are also mentioned. A simple example is given to demonstrate the validity of the bounding methods.

1. 서 론

무작위적 환경하에서 동적으로 변해가는 시스템을 분석하기 위해 일반적으로 스토캐스틱 모형이 고려된다. 시스템의 시간에 따른 상태 변화를 정량화한 스토캐스틱 프로세스의 확률적인 특성을 파악하여, 그 특성을 잘 유지하면서 분석이 가능한 형태로 모형화를 하게 된다. 그렇게 모형화된 프로세스를 $\{X(t), t \geq 0\}$이라 하자. 이 때 우리의 관심 대상이되는 많은 량들이 시스템의 상태 X(t)에 관련되게 된다. 예를 들어 Flexible Manufacturing System에서 작업 개시후 시간 t가 경과했을 때 각 작업장에 남아 있는 일의 수라든가 특정한 일이 규정된 작업과정을 모두 마치고 시스템을 떠날 때까지의 시간(sojourn time) 등은 X(t)를 관찰함으로써 분석될 수 있다. 흔히 분석의 간편을 위해 시스템이 정상상태(steady state)에 도달했을 때의 량들이 주된 분석대상이 되지만 어느 특정시점에서의 잠정적인 양태(transient behavior)도 분석대상에 포함시켜야 할 경우가 많다(Grassman(1977), Gross and Miller(1984), Ross(1987) 참조).

일반적으로 f를 X(t)의 상태공간(state space)에

† 본 연구는 부분적으로 1990년도 한국과학재단 연구비 지원에 도움을 받았음
* 홍익대학교 기초과학과

서 정의된 적당한 실수함수라고 할 때 많은 경우에 분석량들이 Ef(X(t))의 형태로 표현될 수 있다. 정상상태가 아닌 경우에 Ef(X(t))를 구할 때 대개는 근사적인 방법에 의존하게 된다. 이 때 오차의 범위가 확실하지 않은 경우가 많으므로 근사적 방법을 보완하여 Ef(X(t))의 최대 혹은 최소범위를 한정하는 방법이 필요하게 된다. 이러한 범위한정(bounding) 방법을 일반적으로 구해내기는 쉽지 않으나 만약 프로세스 $\{X(t), t \geq 0\}$이 확률적 단조성(stochastic monotonicity)이나 확률적 콘벡스성(stochastic convexity)을 가질 때에는 효과적인 범위한정 방법을 찾아 낼 수 있다. 확률적 단조성은 확률변수간의 크기의 비교(즉 partial ordering)을 확장한 개념으로 신뢰성이론이나 대기이론 등에서 이미 많이 응용되고 있는 개념이고 (Stoyan, 1983 참조), 확률적 콘벡스성은 확률변수의 매개변수에 관한 2차적 성질에 관한 개념으로 최근에 확립되기 시작한 개념이다(Shaked and Shanthikumar(1988 a, b), Shanthikumar and Yao(1989)).

본 논문의 목적은 두가지라고 볼 수 있는 데 첫번째 목적은 $\{X(t), t \geq 0\}$이 마코프 프로세스인 경우에 Ef(X(t))의 효과적인 bounding 방법을 제시하는 것이고, 두번째 목적은 최근에 확립된 확률적 콘벡스성의 이론을 소개하고 그 구체적인 응용으로 샘플경로 접근법에 의해 마코프 프로세스에서의 확률적 콘벡스성의 충분 조건들을 찾아보는 것이다. FMS나 기타 시스템의 성능평가에 관련된 모형은 대개 마코프 프로세스로 모형화될 수 있으므로 본 논문의 결과는 여러 분야에서 실용적으로 이용될 수 있으리라고 본다. 이를 위해 우선 2장에서 확률적 단조성, 확률적 콘벡스성에 관한 유용한 개념 및 접근방법을 소개하고, 3장에서 마코프 프로세스에서 이들 성질을 이용한 효과적인 Ef(X(t))의 bounding 방법들을 제시한다. 4장에서 마코프 프로세스에서 이 성질들이 만족될 조건들을 제시한 다음 간단한 예제를 통해 3장의 범위 한정 방법들의 타당성과 유용성을 검토한 후 5장에서 여러가지 응용가능성이 토의되며 결론을 맺는다.

2. 확률적 단조성과 콘벡스성

대기 시스템에서 서비스를 모두 마치고 나올 때까지 걸리는 시간은 서비스율이나 도착률과 같은 매개변수의 영향을 받는 확률변수로 생각할 수 있다. 이러한 시스템을 디자인하거나 운용할 때 시스템의 성능측도들을 우리가 콘트롤할 수 있는 매개변수의 함수로 파악하는 것이 편리할 때가 많다. 적절한 매개변수의 공간을 $\Theta \subset R$(또는 N^+)라하고, 일반적으로 매개변수 $\theta \in \Theta$를 갖는 스토캐스틱 시스템에서 우리의 관심이 어떠한 확률량 $\{X(\theta), \theta \in \Theta\}$에 있다고 하자. 이 때 실제로 θ는 $X(\theta)$의 확률분포함수 $F(x, \theta)$의 매개변수로 볼 수 있다. $X(\theta)$가 θ에 따라 변해가는 양태를 분석하면 설정한 목표에 가장 적당한 θ의 값을 정할 수가 있게 될 것이다. 좀더 구체적으로 $\{X(\theta)\}$의 상태 공간 $S \subset R$(또는 N^+)에서 정의된 비용함수 $f : S \to R$가 주어졌을 때 $Ef(X(\theta))$를 θ에 대해 최적화하는 문제를 고려해 보자. 이 때 f의 단조증가나 감소와 같은 1차 도함수적 성질과 콘벡스나 콘케이브 성질과 같은 2차 도함수적 성질이 목적함수 $Ef(X(\theta))$의 성질로 유지될 수 있다면 최적화 문제에 큰 도움을 줄 수 있을 것이다. 이에 따라 다음과 같은 개념을 정의할 수 있다.

(정의 2.1) 모든 증가함수 f에 대해 $Ef(X(\theta))$가 θ의 증가함수이면 $\{X(\theta), \theta \in \Theta\}$는 SI(stochastically increasing)이다.

(정의 2.2) 모든 증가 콘벡스(콘케이브) 함수 f에 대해 $Ef(X(\theta))$가 θ의 증가 콘벡스(콘케이브) 함수이면 $\{X(\theta), \theta \in \Theta\}$는 SICX(stochastically increasing convex) (SICV : stochastically increasing concave)이다.

확률변수들간의 크기를 비교하는 stochastic ordering을 확장한 개념인 SI와 같은 확률적인 단조성은 이미 대기이론이나 신뢰성이론에서 시스템의 디자인이나 콘트롤에 많이 응용되어 왔다(Ross(1983) 8장과 Stoyan(1983) 참조). 이에 덧붙여 확률적인 모형에서 최적화를 수행하기 위해서는 2차적인 충분조건인 콘벡스성의 확립이 자연적으로 필요하게 되는 데 이를 특정 시스템 별로 규명해 보려는 시도가 근래에 많이 진행되었다. 그러나 전통적인 대수적, 해석적인 접근 방법으로 (정의 2.2)의 특수한 경우($EX(\theta)$ 혹은 $EX^2(\theta)$의 콘벡시티)를 확립하기에는, 비교적 간단한 시스템의 경우에도 매우 복잡한 계산 및 유도 과정을 필요로 하게 되어 큰 진전을 볼 수 없었다. 예를 들어 (정의 2.2)의 특수한 경우인 M/M/c 대기 시스템의 평균고객의 수 $EN(\rho)$의 부하율(load factor) ρ에 대한 콘벡스성을 보이기 위해 Grassman(1983), Lee와 Cohen(1983)은 매우 번거로운 과정을 수행하였다. 즉 (정의 2.2)는 필요에의한 자연스러운 개념이나 이에 입각하여 콘벡시티를 증명하기는 쉽지 않다. 또한 확률적인 연산(concvolution, mixture, composition 등)에 대해 (정의 2.2)의 개념이 닫혀있는 지도 규명하기가 어렵다.

Shaked와 Shanthikumar(1988a)는 이러한 난점을 극복하고 다양한 확률적인 단조성과 콘벡스성을 비교적 간단하게 도출해낼 수 있는 샘플경로 콘벡스성을 제안하고 샘플경로 접근법(sample path approach)에 의한 구축적인 증명방법(constructive proof)을 소개하였다.

우선 SI에 대해서는 다음과 같은 샘플경로에 연관된 사실이 알려져 있다.

(정의 2.1) 만약 $\{X(\theta),\ \theta\in\Theta\}$ 가 SI이며누 모든 $\theta\in\Theta$에 대해 $X(\theta)$와 같은 분포를 갖고 θ에 대해 증가함수(a.s.)인, 공통의 확률공간(probability space)에서 정의된 확률변수들 $Y(\theta)$가 존재한다.

(증명) Kamae et.al.(1977) Th1. 참조

샘플경로에서의 확률적인 증가 콘벡스성, 콘케이브성을 각각 SICX(sp) (stochastically increasing and convex in sample path sense)와 SICV(sp) (stochastically increasing and concave in sample path sense)로 표현하면, (정의 2.1)에 힌트를 얻어 이들을 다음과 같이 정의할 수 있다.

(정의 2.3) $\theta_1\le\theta_2\le\theta_3\le\theta_4$이고 $\theta_2-\theta_1=\theta_4-\theta_3$를 만족하는 모든 $\theta_i\in\Theta$, $i=1, 2, 3, 4$에 대해 아래의 조건 (i), (ii), (iii)를 만족하는 4개의 확률변수 Z_i, $i=1, 2, 3, 4$가 동일한 활률공간에서 정의될 수 있으면 $\{X(\theta),\ \theta\in\Theta\}$를 SICV(sp)라고 말하고, (i), (iv), (v)를 만족하는 4개의 확률변수 Z_i, $i=1, 2, 3, 4$가 동일한 확률공간에서 정의될 수 있으면 $\{X(\theta),\ \theta\in\Theta\}$를 SICV(sp)라고 말한다.

(i) $Z_i\sim X(\theta_i)$, $i=1, 2, 3, 4$,

(ii) $Z_2-Z_1\le Z_4-Z_3$ a.s.

(iii) $\max(Z_1, Z_2, Z_3)\le Z_4$ a.s.

(iv) $Z_2-Z_1\ge Z_4-Z_3$ a.s.

(v) $Z_1\le\min(Z_2, Z_3, Z_4)$ a.s.

(이 때 ~ 는 동일한 분포를 갖는것을 의미한다)

(참고) 위의 정의는 실수 콘벡스(콘케이브) 증가함수의 증가율이 점점 커지는(작아지는) 성질을 이용한 정의임을 알 수 있다. 즉 조건(ii), (iv)는 각각 콘벡스성과 콘케이브성을 보장해주고 있다. (iii), (v)는 증가성을 부여해 준다.

SICX(sp)는 SICX보다 강한 확률적 성질이기 때문에 $\{X(\theta),\ \theta\in\Theta\}$가 SICX(sp)의 성질을 가지면 자동적으로 SICX의 성질을 갖게 된다(Shaked and Shanthikumar(1988a), Th3.6). 따라서 $\{X(\theta),\ \theta\in\Theta\}$가 SICX 임을 보이기위해 SICX(sp) 임을 보이면 충분한데, 이는 (정의 2.3)의 조건들을 만족시키는 확률변수들을 만들어 내는 구축적인 방법에 의해 비교적 간단하게 행해질 수 있다. 더우기 SICX(sp)는 SICX 갖지못하는 매우 유용한 보존적 특성(예를 들면 convolution이나 mixture에 닫혀있다.) 들을 가지고 있기 때문에 많은 경우에 보다 편리하게 사용될 수 있는 개념이다. 본 논문에서는

θ가 시간일 때에 한정하여 스토캐스틱 프로세스, 특히 마코프 프로세스의 시간에 따른 단조성이나 콘벡스성에 주안점을 둔다.

3. 마코프 프로세스에서의 단조성과 콘벡스성

3-1. 확률적 단조성

본 절에서는 θ가 시간일 때에 한정하여 매우 광범위하게 적용되고 있는 마코프 프로세스의 시간에 따른 단조성이나 콘벡스성에 대해 알아 보자. 우리가 고려할 마코프 프로세스는 상태공간(state space) S가 최소의 원소를 0으로 갖고 부분 순서화된(partially ordered) 공간일 경우인데, $S \in N^+=\{0, 1, 2, \cdots\}$인 경우나 0보다 크거나 같은 실수($R^+$)인 경우를 포함하므로 거의 모든 실제적인 문제에 적용될 것이다. 시간은 연속시간 혹은 이산시간인 경우에 모두 고려되는데 이산시간의 마코프 프로세스를 마코프 체인이라고 부르기도 한다. 마코프 체인에 대해서는 다음과 같은 단조성의 충분 조건을 발견할 수 있다.

(정리 3.1) 마코프 체인 $\{X_n, n \in N^+\}$에서 $X_0=0$ a.s. 이고, 모든 $x \in S$에 대해 $P\{X_n > x \mid X_{n-1}=i\}$가 i의 증가함수이면 $\{X_n, n \in N^+\}$는 (n에 대해) SI이다.

(증명) Stoyan, 1983 p64(Th 4.2.4a) 참조 ■

연속시간의 마코프 프로세스의 경우에도 이와 유사하게 다음과 같은 단조성의 충분 조건을 확립할 수 있다.

(정리 3.2) 마코프 프로세스$\{X(t), t \geq 0\}$에서 모든 $x \in S$에 대해 $P\{X(t) > x \mid X(0)=i\}$가 i의 증가함수이면, $X(0)=0$ a.s. 일 때 $\{X(t), t \quad 0\}$는 (t에 대해) SI이다.

(증명) 윤복식(1991) 참조. ■

(정리 3.2)의 조건을 만족하는 마코프 프로세스 중에서 대표적인 것으로 대기이론 등에 매우 광범위하게 응용되는 birth-death process를 들 수 있다.

(따름정리 3.3) $X(0)=0$ a.s. 일 때 birth-death process $\{X(t), t \geq 0\}$는 (t에 대해) SI이다.

(증명) Ross(1983), p257 proposition 8.2.3에 의해 모든 $x \in S$에 대해 $P\{X(t) > x \mid X(0)=i\}$가 i의 증가함수 임을 알 수 있다. ■

Birth-death 프로세스는 실제적으로 매우 많이 이용되는 모형이므로(따름정리 3.3)의 사실은 실용적으로 상당히 유용하다. 보다 일반적인 마코프 프로세스의 확률적 단조성의 조건을 (정리 3.1)과 단일화(uniformization) 기법(4장 참조)을 사용하여 보다 구체적으로 밝히면 아래와 같다.

(정리 3.4) State space가 N^+이고 generator가 R인 단일화가 가능한(uniformaizable) 마코프 프로세스 $\{X(t), t \geq 0\}$에서 $X(0)=0$ a.s. 이고 모든 $x \in S$에 대해

$\sum_{j>x} R_{ij}$가 i의 증가함수 .... (1)

이면 $\{X(t), t \geq 0\}$는 SI이다.

(증명) $\{X(t), t \geq 0\}$를 단일화하는 발생률 λ인 포아손 프로세스를 $\{X(t), t \geq 0\}$라 하고, $\{\underline{X}_n, n \in N^+\}$를 전이확률 행렬 $P=I+R/\lambda$를 갖는 마코프 체인이라 하면 초기 분포가 같을 때, 모든 $t \geq 0$에서 $X(t)$와 $\underline{X}_{N(t)}$는 동일한 분포를 갖게 되므로(4장 참조) $\{\underline{X}_{N(t)}, t \geq 0 \mid \underline{X}_0=0\}$이 SI임을 보이면 된다. 그런데 주어진 조건 (1)에 의해

$$P\{\underline{X}_n > x \mid \underline{X}_{n-1}=i\}=\sum_{j>x} P_{ij}=\sum_{j>x} (R_{ij}/\lambda)+I\{x < i\} \quad \cdots\cdots (2)$$

는 i의 증가함수가 되어 (정리 3.1)에 의해 $\{\underline{X}_n, n \in N^+\}$는 SI 임을 알 수 있고 $\{N(t), t \geq 0\}$ 역시 SI이므로 $\{\underline{X}_{N(t)}, t \geq 0 \mid X_0=0\}$이 SI임을 알 수 있다(이 때 I는 indicator 함수). ■

(참고) (2)를 좀더 자세히 구분하여 (1) 대신에 다음의 조건을 만들 수도 있다.

(i) $i < x$ 일 때 $\sum_{j \le x} R_{ij}$가 i의 감소 함수이고

(ii) $i \ge x$ 일 때 $\sum_{j > x} R_{ij}$가 i의 증가함수 ■

마코프 체인의 단조성은 마코프 누적 프로세스(Markov additive process)의 확률적 콘벡스성을 확립하는 기초가 된다. 여기에 관해서는 윤복식(1991)에 상세히 보고되어 있다.

3-2. 마코프 프로세스의 확률적 콘벡스성

우선 마코프 체인에 대하여 다음과 같은 확률적 콘벡스성이 알려져 있다.

(정리 3.5) $X(0)=0$ a.s. 이고 모든 $x \ge 0$에 대해 $P\{X_n > i+x \mid X_{n-1}=i\}$이 i의 증가함수이면 $\{X_n, n \ge 0\}$은 SICX(sp)이다.

(증명) Shaked and Shanthikumar(1988b) Theorem 4.1 참조. ■

마코프 프로세스인 경우에는 (정리 3.4)와 같은 방법으로 단일화 기법을 사용하여 다음의 사실을 확립할 수 있다.

(정리 3.6) State space가 N^+이고 generator가 R인 단일화가 가능한(uniformizable) 마코프 프로세스 $\{X(t), t \ge 0\}$에서 $X(0)=0$ a.s. 이고 모든 $x \ge 0$에 대해

$\sum_{j > x} R_{i(i+j)}$가 i의 증가함수 .... (3)

이면 $\{X(t), t \ge 0\}$는 SICX(sp) 이다.

(증명) $\{X(t), t \ge 0\}$를 단일화하는 발생률 λ인 포아손 프로세스를 $\{N(t), t \ge 0\}$라 하고, $\{\underline{X}_n, n \in N^+\}$를 전이확률 행렬 $P=I+R/\lambda$를 갖는 마코프 체인이라 하면 주어진 조건과 (정리 3.5)에 의해 $\{\underline{X}_n, n \in N^+\}$이 SICX(sp)임을 알 수 있다. 이제 $\{N(t), t \ge 0\}$의 SICX(sp)성에 의해 $\{\underline{X}_{N(t)}, t \ge 0\}$의 SICX(sp) 성이 따라온다(Shaked and Shanthikumar(1988b) theorem 3.1 참조). ■

4. 단조성을 이용한 bounding

이제 상태공간(state space) $S \subset N^+$와 전이율행렬(transition rate matrix) Q를 갖는 마코프 프로세스 $X=\{X(t), t \ge 0\}$를 고려해 보자. $Ef(X(t))$를 계산하기 위해서는 먼저 $X(t)$의 전이함수(transition function)

$P_{ij}(t)=P\{X(t)=j \mid X(0)=i\}$, $i, j \in S$, $t \ge 0$ .... (1)

를 구하여야 하는데 흔히 단일화 기법(uniformization : (Keilson(1979), Ross(1983) 참조)이 사용되어 왔다. 즉,

$q_i = \sum_{j \in S} Q_{ij}$ $i \in S$

라하고 X의 생성자(generator) R을

$R_{ij}=Q_{ij}-q_i$, $i, j \in S$

로 표현할 때, 만약 $v=\sup\{q_i, i \in S\} < \infty$이면 모든 $r \ge v$에 대해 전이함수는

$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-rt}(rt)^n \; p^n/n!$ .... (2)

$P=I+R/r$(I는 단위행렬) .... (3)

과 같이 표현될 수 있다.

(2)를 이용해서 $P(t)$를 구하는 것이 Kolmogorov의 미분방정식에 의한 방법보다 편리하고 정확하지만 S의 규모가 커짐에 따라 행렬의 곱에 걸리는 시간이 늘어나게 되므로 보다 효율적인 방법이 필요하게 된다. 이에 따라 (2)보다 행렬의 곱의 갯수를 훨씬 줄이면서 오차도 크지않은 효율적인 근사적 방법들이 Sumita와 Shanthikumar(1986), Ross(1988), Yoon과 Shanthikumar(1989) 등에 의해 개발되었다. 특히 Yoon과 Shanthikumar(1989)

에서 단일화 기법외에 이산화 기법(discretization)을 사용하여 P(t)에 대한 여러가지 근사적 계산방법을 제시하고 있다. 이산화 기법의 골자는 주어진 연속시간의 마코프 프로세스(continuous time Markov chain)를 적절한 종료시간들 (stopping times)에서 관찰하여 이산시간의 마코프 체인(discrete time Markov chain)으로 만들어, 주어진 시간 t에서의 X(t)를 t에 가장 근접한 종료시간, T_n에서의 이산시간 마코프체인의 상태, X_n으로 근사화 시키는 방법이다.

단일화 기법을 좀 더 확실히 이해하기 위해 (3)과 같은 전이확률 행렬을 갖는 마코프 체인 $\{\underline{X}_n,\ n\in N^+\}$을 고려해 보자. $\{N(t),\ t\geq 0\}$가 rate r인 포아손 프로세스일 때 $\underline{X}(t)=\underline{X}_{N(t)}$라 하면 마코프 프로세스 $\underline{X}=\{\underline{X}(t),\ t\geq 0\}$는 원래 마코프 프로세스 X와 초기확률 분포가 같으면 항상 동일한 분포를 가지며, 전이함수(transition function)가 (2)가 됨을 알 수 있다. 이 때 $\underline{X}$를 단일화된 프로세스라고 부르기로 한다.

단일화된 프로세스 X에서 다음과 같은 종료시간들(stopping times)을 고려하면

$T^A_0=0$ w.p.1.

$$T^A_n=\min\{\ \inf\{t\ :\ N(t)\neq N(T^A_{n-1})\ \},\ T^A_{n-1}+d\ \} \quad \cdots\cdots (4)$$

$A\equiv E[P(T^A_1)]$ 라고 하면,

$$A=(1-e^{-rd})\ (I+R/r)+e^{-rd}I$$
$$=I+(1-e^{-rd})R/r \quad \cdots\cdots (5)$$

이것을 이용하여 아래와 같이 P(t)에 대한 근사값을 구할 수 있다.

$$A(t)=A^{d(t)},\quad d(t)=[t/d]^- \quad \cdots\cdots (6)$$

(이 때$[x]^-$는 x를 넘지 않는 최대의 정수.)

이제 다음과 같은 사실을 쉽게 관찰할 수 있다.

(정리 4.1)

(a) $T^A_{d(t)}\leq t$ a.s.

(b) $\lim_{d\to 0} T^A_{d(t)}=t$ a.s.

(증명) (a)는 명확, (b)는 Yoon and Shanthikumar(1989) Proposition 8 참조. ■

이번에는 다음과 같은 종료시간을 정의하여

$T^B_0=0$ w.p.1

$$T^B_n=\inf\{\ t\ :\ N(t+d)=N(t),\ t\geq T^B_{n-1}\}+d,\quad n=1,\ 2,\quad \cdots\cdots (7)$$

$$B\equiv E[P(T^B_1)]\ \text{이라고 하면} \quad \cdots\cdots (8)$$

$$B=(1-e^{-rd})\ (I+R/r)B+e^{-rd}I, \quad \cdots\cdots (9)$$

로 되고 P(t)에 대한 또 하나의 근사값

$$B(t)=B^{e(t)},\ \ e(t)=[t/d]^+$$

(이 때 $[x]^+$는 x보다 작지 않은 최소의 정수)를 얻을 수 있다 B(t)에 관해서는 (정리 4.1)과 유사하게 다음과 같은 유용한 성질을 발견할 수 있다.

(정리 4.2) 모든 $t>0$에 대해

(a) $T^B_{e(t)}\geq t$ a.s.

(b) $\lim_{d\to 0} T^A_{e(t)}=t$ a.s.

(증명) (a)는 명확, (b)는 Yoon and Shanthikumar(1989) Proposition 10참조. ■

(정리 4.1)과 (정리 4.2)의 (b)에 의해 d를 줄여가면 A(t)와 B(t)는 점점 P(t)에 가까와지는 것을 짐작할 수 있는 데 이미 Yoon and Shanthikumar (1989)에 의해 그 정확성과 효율성이 검증되었다. 따라서 이들을 bounding에 효과적으로 이용할 수 있을 것이다. 이것은 다음과 같은 사실로 확립이 된다.

(정리 4.3) 마코프 프로세스 $\{X(t),\ t\geq 0\}$가 SI이면, 모든 증가함수 $f:S\to R$과 $t\geq 0$에 대해

$$\sum_{j\in S} f(j)A_{0j}(t)\leq E[f(X(t)\ |\ X(0)=0]\leq \sum_{j\in S} f(j)B_{0j}(t) \quad \cdots\cdots (10)$$

(증명) (정리 4.1)과 (정리 4.2)의 (a)에 따라

$$T^A_{d(t)}\leq t\leq T^B_{e(t)}\quad \text{a.s.} \quad \cdots\cdots (11)$$

이고 강 마코프성에 따라

$$E[f(X(T^{A}_{d(t)})) \mid X(0)=0] = \sum_{j\in S} f(j)A_{0j}(t)$$

$$E[f(X(T^{B}_{d(t)})) \mid X(0)=0] = \sum_{j\in S} f(j)B_{0j}(t)$$

이므로 (10)이 성립한다. ■

(참고) (정리 4.3)이 성립하기 위해서는 상태공간 S가 partially ordered space이고 S의 최소원소가 0이라는 조건으로 충분하다.

(10)의 특수한 경우로 X(t)의 분포함수(혹은 survival 함수)를 bounding할 수 있는데 $f(x)=I\{x \geq k\}$로 놓고 (정리 4.3)을 적용하면 :

(따름정리 4.3) : 마코프 프로세스 $\{X(t), t \geq 0\}$가 SI이면 모든 $k \in S$에 대해

$$\sum_{j\geq k} A(t)_{0j} \leq P\{X(t) \geq k \mid X(0)=0\} \leq \sum_{j\geq k} B(t)_{0j}, \quad t \geq 0 \quad \cdots\cdots (12)$$

이제 3장에서 언급한 마코프체인의 SI 조건과 결합하여 birth-death 프로세스를 비롯한 매우 광범위한 마코프체인에 (10)과 (12)를 적용할 수 있을 것이다.

(계산례)

도착률이 5이고 각 창구의 서비스율이 1인 M/M/4 loss queueing system에서 시간 t에 시스템 내에 있는 고객의 수를 X(t)라고 하면 $\{X(t), t \geq 0\}$은 상태공간 S={0, 1, 2, 3, 4}에서 정의된 birth-death process가 됨을 알 수 있다. 이 때 generator R은

$$R = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

이 된다. 표 4.1.에서 (12)의 계산값과 참값을 비교해 볼 수 있는 데, (12)의 관계가 실제로 성립하고 n=t/d 값이 증가함에 따라 범위가 점점 작아지는 것을 관찰 할 수 있다. 이 때 참값은 단일화기법 (2)를 오차가 10^{-9} 이하가 되도록 truncation하여 구하였다.

5. 콘벡스성을 이용한 bounding

이제 A(t)나 B(t)보다 정확하게 P(t)를 계산할 수 있는 방법을 이용하여 보다 근접한 bounding 방법을 찾아보기로 하자. 우선 단일화 기법을 사용할 때 (4.2)를 그대로 이용하면 적절히 truncation을 시킨다고 해도 매우 많은 항을 더해야 하므로 이에 따른 계산량이 상당히 많아지게 된다. 이것을 피하기 위해 4장의 이산화기법의 아이디어를 적용하여 관찰시점이 되는 종료시간 $\{T_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$을 단일화 시켜주는 Poisson process $\{N(t), t \geq 0\}$의 도착시점들로 정해주면 $E[T_k]=k/r$ 이므로 X(t) 대신 $E[T_k]=t$가 되는 k에서 $\underline{X}_k$를 관찰함으로써 P(t)를 근사적으로 구할 수 있다. 즉, $C=(I+R/r)$, $d(t)=[rt]^-$, $e(t)=[rt]^+$라 하면

$$C(t)=C^{d(t)}(\text{혹은 } C^{e(t)}) \quad \cdots\cdots (1)$$

를 또 하나의 P(t)에 대한 근사값으로 얻을 수 있다.

(4.2)와 같은 단일화 기법은 발생율 $r \geq v$인 단일화를 시켜주는 Poisson 사건들의 발생 시점에서만 전이(transition)가 일어나도록 원래 마코프 프로세스를 내부적으로 조정하였다. 이에 반해 마코프 프로세스를 주어진 마코프 프로세스에 완전히 독립인 Poisson process로 관찰하도록 하는 이산화 기법이 있을 수 있는데 이것을 외부적 단일화 기법(external uniformization)이라고 부르기도 한다(Yoon(1988)). 이 때의 포아손 프로세스는 (내부적)단일화 기법과 달리 발생률 r이 v보다 클 필요가 없다. 외부적 단일화 기법에서의 X의 종료시간들 $\{T_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$은 발생률 r인 iid 지수 분포를 갖는 확률변수들의 합으로 표현되는데, $\{T_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$에서 관찰된 embedded 마코프 체인의

표 4.1 P{X(t) > k | X(0)=0}의 범위

시간	방법	n	k			
			1	2	3	4
1	참값		.9570343	.8179084	.5839276	.2991967
	A(t)	2^{10}	.9568488	.8173027	.5830374	.2985353
		2^{15}	.9570286	.8178896	.5839998	.2991761
	B(t)	2^{10}	.9572190	.8185113	.5848137	.2998553
		2^{15}	.9570402	.8179273	.5839554	.2992174
2	참값		.9825740	.9007525	.7054613	.3894980
	A(t)	2^{10}	.9825165	.9005506	.7051491	.3892590
		2^{15}	.9825723	.9007463	.7054517	.3894906
	B(t)	2^{10}	.9826303	.9009499	.7057667	.3897317
		2^{15}	.9825758	.9007588	.7054710	.3895054

$$D_{ij} \equiv E[P_{ij}(T_1)]$$
$$= (1/(q_i+r)) \sum_{k \in S} q_{ik} D_{kj} + (r/(q_i+r))\delta_{ij},\ i, j \in S \quad \cdots\cdots (2)$$

전이확률 행렬을 D라 하면,
(이 때 δ_{ij}는 $i=j$이면 1이고, $i \neq j$이면 0인 델타 함수이다.)
(2)를 정리하면

$$D = (I - R/r)^{-1} \quad \cdots\cdots (3)$$

를 얻고 $t = E[T_k] = k/r$를 만족하는 k는 rt이므로 P(t)의 또 하나의 근사값

$$D(t) = D^{d(t)} \text{ (혹은 } D^{e(t)}) \quad \cdots\cdots (4)$$

를 얻을 수 있다.

C(t)나 D(t)는 A(t)나 B(t)에 비해 보다 정확한 근사값을 주는 방법이므로 (Yoon and Shanthikumar(1989)) 이들을 이용한 bounding은 (10)에 비해 더욱 정확한 값을 줄 수 있다. 그러나 이들을 이용하려면 마코프 프로세스의 확률적 콘벡스(콘케이브)성이 요구되기 때문에 적용 대상이 되는 마코프 프로세스는 보다 제한적일 수 밖에 없다. 우선 종료시간 $T_{d(t)}$와 $T_{e(t)}$에 대한 다음의 사실을 관찰하자.

(렘마 5.1)

(i) $T_{d(t)} \leq_{icv} t$ (즉 모든 증가 콘케이브 함수 f에 대해 $E[f(T_{d(t)})] \leq f(t)$)

(ii) $T_{e(t)} \geq_{icv} t$ (즉 모든 증가 콘케이브 함수 f에 대해 $E[f(T_{e(t)})] \geq f(t)$)

(증명) Jensen의 부등식(Billingsley(1986))과 $E[T_{d(t)}] < t < E[T_{e(t)}]$에 의해 쉽게 알 수 있다. ■

(렘마 5.2)

(i) $N(t) \geq_{icx} d(t)$

(ii) $N(t) \geq_{icv} e(t)$

(증명) Jensen의 부등식과 $d(t) \leq E[N(t)] \leq$

(t)에 의해 쉽게 보여진다. ■

이제 3.2절의 확률적 콘벡스성의 결과를 이용하여 아래의 사실을 얻을 수 있다.

(정리 5.1) X가 단일화가 가능하고 $\sum_{j>k} R_{i,\,i+j}$가 모든 $k>0$에 대해 i의 증가함수이면, 모든 증가 콘벡스 함수 $f: S \to R$에 대해,

$$\sum_{j\in S} f(j)\ C_{oj}^{d(t)} \leq E[f(X(t)) \mid X(0)=0] \leq \sum_{j\in S} f(j)\ D_{oj}^{e(t)},\quad t \geq 0. \quad \cdots\cdots\cdots (5)$$

(증명) (정리 3.6)에 의해 $\{X(t),\ t\geq 0 \mid X(0)=0\}$은 SICX(sp)임을 알 수 있고 따라서 $E[f(X(t)) \mid X(0)=0]$는 t의 증가 콘벡스 함수가 된다. 한편 (5)의 우변은 $E[f(X(T_{e(t)}) \mid X(0)=0]$과 같으므로 (렘마 5.1)의 (ii)에 따라 두번째 부등식이 성립한다. (5)의 좌변은 $E[f(\underline{X}_{d(t)}) \mid X(0)=0]$ 인데,

$$E[f(X(t)) \mid X(0)=0] = E[f(\underline{X}_{N(t)}) \mid X(0)=0] \quad \cdots\cdots\cdots (6)$$

이므로 (렘마 5.2)의 (i)에 의해 첫번째 부등식이 확립된다. ■

위의 정리와 유사하게 확률적 콘케이브성을 이용하여 아래의 사실을 확립할 수 있다.

(정리 5.2) X가 단일화가 가능하고

(i) $\sum_{j\geq k} R_{i,\,i+j}$가 모든 $k>0$에 대해 i의 감소함수이고

(ii) $\sum_{j\leq k} R_{i,\,i+j}$가 모든 $k<0$에 대해 i의 증가함수이고

(iii) 모든 $k>0$에 대해, $i<k$일 때는 $\sum_{j\geq k} R_{ij}$가 i의 증가함수이고,

$i>k$일 때는 $\sum_{j\leq k} R_{ij}$가 i의 감소함수이면

모든 증가 콘케이브 함수 $f: S \to R$에 대해

$$\sum_{j\in S} f(j)\ D_{oj}^{d(t)} \leq E[f(X(t)) \mid X(0)=0] \leq \sum_{j\in S} f(j)\ C_{oj}^{e(t)},\quad t \geq 0. \quad \cdots\cdots\cdots (7)$$

(증명) R이 위의 조건을 만족할 때 Shaked and Shanthikumar(1988b) theorem 4.5에 의해 $\{X(t),\ t\geq 0 \mid X(0)=0\}$이 SICV임을 알 수 있으므로(렘마 5.1) (i)과 (렘마 5.2) (ii)를 사용하여 (정리 5.1)의 증명과 유사하게 증명할 수 있다. ■

6. 결론 및 토의

확률적 단조성과 콘벡스성을 이용하여 효율적인 범위한정 기법을 만들어 냄으로써 이러한 성질들이 계산 방법에 효과적으로 쓰일 수 있음을 보았다. 단지 확률적 콘벡스성(콘케이브성)의 경우 충분조건이 너무 상세하여서(5장 참조) 그 조건을 만족하는 마코프 체인을 고려하기가 쉽지 않아서 실용성에 문제가 있을 것이다. 그러나 5장에서 사용된 C(t)나 D(t)는 매우 4장의 A(t), B(t)에 비해 보다 정확한 근사값이 되므로 충분조건을 만족하는 마코프 체인의 경우 범위는 보다 정확할 것이다. 확률적 단조성의 경우는 birth-death 과정이 포함되므로 3장에서 언급한 바와 같이 실용적 가치가 보다 명백해 진다.

참고문헌

[1] Grassman, W. (1977) "Transient Solution in Markovian Queues," *European Journal of Operations Research*, 1, 396-402.

[2] ____________ (1983) "The Convexity of the Mean Queue Size of the M/M/c Queue with respect to the Traffic Intensity," *Journal of the Applied Probability*, 20, 916-919.

[3] Gross, D. and D.R. Miller(1984) "The Randomization Techniques as a Modelling Tool and Solution Procedures for Transient Markov Proces-

ses," *Operations Research*, 32, 343-361.

[4] Keilson, J. (1979) *Markov Chains-Raity and Exponentiality*, Springer-Verlag, New York.

[5] Lee, H.L. and M.A. Cohen(1983)" A Note on the Perfomance Measure of M／M／c Queueing Sysyems," *j*. Appl. *Prob*., 20, 920-923.

[6] Mellamed, B. and M. Yadin(1984) "Randomization Procedures in the Computation of Cumulative-Time Distributions over Discrete State Markov Processes," *Operations Research*, 32, 926-944.

[7] Reibman, A. and K. Trivedi(1988) "Numerical Transient Analysis of Markov Mpdels," *Compt. Opns. Res*., 15, 19-36.

[8] Ross, S.M. (1987) "Approximating Transition Probability and Mean Occupation Times in Continuous Time Markov Chains," *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 1, 251-264.

[9] Shaked, M. and J.G. Shanthikumar(1988a) "Stochastic Convexity and Its Applications," *Advances in Applied Probability*, 20, 427-446.

[10] ______________(1988b) "Temporal Stochastic Convexity and Concavity," *Stochastic Processes and Teir Applications*, 20, 1-20.

[11] Shanthikumar, J.G. and D.D.W. Yao (1989) "Second-Order Stochastic Properties in Queueing Systems," *Proceedings of OEEE*, 77, 162-170.

[12] Stoyan, S. (1983) *Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models*, Wiley, New York.

[13] Sumita, U and J.G. Shanthikumar(1986), "A Software Reliability Model with Multiple-Error Introduction and Removal," *IEEE Trans. Reliab*., R-35, 459-462.

[14] Yoon, B.S. (1988) *Approximations for the Transient Behavior of Stochastic Processes : Discretization and Uniformizsation*, Ph.D. Dissertation, University of California, Berkeley.

[15] Yoon, B.S. and J.G. Shanthikumar(1989), "Bounds and Approximations for the Transient Behavior of Continuous-time Markov Chains," *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 3, 175-198.

[16] 윤복식(1991) 마코프 누적 프로세스에서의 확률적 콘벡스성과 그 응용, (한국경영과학회지에 제출).